

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ОСНОВНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ СМУГИ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЇ ВІГАКА

Показано, що три основні крайові задачі теорії пружності для смуги можна розв'язати з використанням єдиного підходу, який ґрунтується на застосуванні методу безпосереднього інтегрування з поданням шуканих компонент тензора напружень та вектора переміщень через визначальну функцію Вігака. Таке подання є вигідним для використання у задачах оптимізації та керування напруженим станом, оскільки забезпечує безпосередню можливість керувати компонентами напружено-деформованого стану з використанням єдиної функції. Показано, що інтегральні умови рівноваги, отримані шляхом інтегрування рівнянь рівноваги з урахуванням впливу межі (тобто заданих – у випадку першої основної задачі, чи реактивних – у випадку другої та третьої основних задач напружень на поздовжніх сторонах смуги) є ефективним критерієм перевірки точності обчислень для трьох основних задач.

Ключові слова: пружність, основні крайові задачі, аналітичні розв'язки, метод безпосереднього інтегрування, функція Вігака, інтегральні умови.

Вступ. Проблема побудови точних розв'язків основних задач теорії пружності посідає ключове місце у сучасній механіці деформівного твердого тіла. Зокрема це пов'язано з тим, що теорія пружності є фундаментальною основою для опису напружено-деформованого стану конструкційних елементів у машинобудуванні, авіакосмічній техніці, енергетиці, будівництві та ін. [11, 33]. Особливе значення мають методи побудови розв'язків для простих геометрій у тривимірній (простір, півпростір, шар тощо) та двовимірній (площина, півплощина, смуга тощо) постановках, оскільки вони є своєрідним полігоном для розвитку загальної методології розв'язування важливих з теоретичної та прикладної точок зору задач [27], слугують тестовими моделями для перевірки точності числових методів [40], а також дають змогу встановити ключові закономірності для оптимізації та керування напруженим станом [1, 5]. Крім того, у сучасній інженерії та промисловості зростає запит на використання точних моделей для розв'язування задач теорії пружності. Це зумовлено необхідністю оптимізації конструкцій у авіаційній, автомобільній та енергетичній галузях, де аналітичні розв'язки відкривають можливість швидкої і адекватної оцінки впливу навантажень та геометрії на міцність і довговічність конструкцій [32]. Разом з тим, в умовах активного розвитку технологій виробництва наноструктурованих матеріалів розробка універсальних аналітичних методів розрахунку (зокрема для смуг і пластин) стає необхідною умовою інженерного прогнозування [13, 21].

Класичні підходи до розв'язування двовимірних задач теорії пружності для геометрично простих областей без особливих точок межі, зокрема смуги, ґрунтуються на використанні потенціальних функцій [23, 29, 33], функцій комплексної змінної [20, 25] та інтегральних перетворень [12, 18]. Зокрема, з використанням методу комплексного потенціалу Мусхелішвілі [25] вдалося побудувати точні аналітичні розв'язки для багатьох плоских задач теорії пружності, зокрема для тіл з отворами [4, 7]. Пізніші дослідження зосереджувались на застосуванні методів інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа, що забезпечувало ефективність при розв'язуванні нестационарних задач [26, 30, 31]. Водночас інтенсивно розвивали числові методи, зокрема метод скінченних елементів, що відкрило можливість будувати наближені

✉ tokovyy@iapmm.lviv.ua

розв'язки для геометрично та фізично складних систем [10, 14, 22]. Однак навіть у цьому випадку потреба у точних аналітичних моделях для тестування залишається актуальною [15, 16, 19].

Попри значний прогрес у розвитку методології теорії пружності, низка питань залишається відкритою. Одним із них є коректне формулювання і розв'язування задач теорії пружності для певних гармонік розвинення у ряди для відокремлення змінних, зокрема першої [35, 36], де класичні умови рівноваги не забезпечують можливості отримати однозначний розв'язок. Крім того, у літературі бракує систематичних порівнянь точних аналітичних розв'язків з результатами числових методів для нестационарних випадків. Також залишається малодослідженим питання використання єдиного підходу при побудові аналітичних розв'язків основних задач теорії пружності (коли крайові умови задано цілковито у термінах напружень чи переміщень або ж для умов змішаного типу [24, 29]). Використання єдиного підходу дало б можливість суттєво спростити аналіз напружено-деформованого стану досліджуваних тіл, а також полегшити керування їхнім напруженим станом за допомогою функцій, пов'язаних із зовнішнім впливом.

У цій статті розглянуто три основні крайові задачі теорії пружності для безмежної смуги за використання плоских гіпотез. Точні аналітичні розв'язки задач запропоновано будувати з використанням методу безпосереднього інтегрування, який був запроваджений професором В. М. Вігаком [2, 3]. У рамках використання методу у роботах [6, 8] було запропоновано використовувати визначальну функцію, яку названо функцією Вігака. Оскільки на відміну від альтернативної бігармонічної функції Ері визначення компонент тензора напружень через функцію Вігака здійснюються на основі співвідношень інтегрального типу з урахуванням впливу крайових умов, такий підхід дає можливість полегшити побудову аналітичних розв'язків для тіл складнішої геометрії [9, 39], а також, як показано нижче, використовувати єдиний підхід для розв'язування основних задач теорії пружності.

1. Формулювання задачі. Розглянемо плоску задачу теорії пружності для смуги $\mathcal{S} = \{x \in (-\infty, +\infty), y \in [-h, h]\}$, де $\{x, y, h\} = \{X, Y, H\}/y_0$, X, Y – розмірні координати, H – півтовщина смуги, $|Y| \leq H$, y_0 – характерна довжина, вибір якої залежить від умов задачі. Для визначення компонент тензора напружень σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{xy} та вектора переміщень u_x , u_y у смугі за відсутності масових сил використаємо [29] рівняння рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{S}, \quad (1)$$

та рівняння Коші з урахуванням співвідношень закону Гука для випадку плоского напруженого стану

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial x} &= \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}), & \frac{\partial u_y}{\partial y} &= \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx}), \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} &= 2 \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy}, & (x, y) &\in \mathcal{S}. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона. Для випадку плоскої деформації у (2) замість ν слід підставити $\nu / (1 - \nu)$.

Розглянемо три випадки крайових умов, які відповідають трьом основним крайовим задачам [24, 29] теорії пружності:

- **задача I** (перша основна задача), коли на межі смуги задано відповідні компоненти тензора напружень

$$\sigma_{yy}(x, \pm h) = -p^\pm(x), \quad \sigma_{xy}(x, \pm h) = \tau^\pm(x); \quad (3)$$

- **задача II** (друга основна задача), коли на межі смуги задано компоненти вектора переміщень

$$u_x(x, \pm h) = u^\pm(x), \quad u_y(x, \pm h) = v^\pm(x); \quad (4)$$

– **задача III** (третя (змішана) основна задача), коли на межі смуги задано деякі компоненти тензора напружень та деякі компоненти вектора переміщень. Розглянемо для визначеності такі змішані умови:

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}(x, h) &= -p^+(x), & \sigma_{xy}(x, h) &= \tau^+(x), \\ u_x(x, -h) &= u^-(x), & u_y(x, -h) &= v^-(x). \end{aligned} \quad (5)$$

Тут $p^\pm(x)$, $\tau^\pm(x)$, $u^\pm(x)$, $v^\pm(x)$ – задані функції відповідних розмірностей, які згасають при $x^2 \rightarrow \infty$.

Розглянемо побудову коректних розв’язків кожної основної задачі.

2. Побудова розв’язків.

2.1. Задача I (перша основна задача). Розглянемо побудову розв’язку задачі (1)–(3). Оскільки крайові умови в цьому випадку задано у термінах напружень, класичний підхід до її розв’язання опирається на формулювання вихідних рівнянь у напруженнях [33]. Для цього разом із рівняннями (1) та умовами (3) використовують рівняння суцільності

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0. \quad (6)$$

Для його отримання застосовують диференціювання співвідношень Коші (2) з метою вилучення переміщень u_x та u_y , а також рівнянь рівноваги (1) для вилучення дотичних напружень σ_{xy} . Як показано в роботах [28, 37], операція диференціювання є математично обґрунтованою лише для необмежених областей. Для обмежених областей її коректне використання приводить до необхідності виконання додаткових умов, які повинні задовольняти компоненти вектора переміщень та тензора напружень. У випадку смуги \mathcal{S} такі додаткові умови зводяться до умов

$$\left. \frac{\partial \sigma_{yy}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=\pm h} = - \frac{d\tau^\pm(x)}{dx}, \quad (7)$$

які є еквівалентними умовам (3) для дотичних напружень. Певні умови будуть накладатися і на похідні від переміщень, які потім слід враховувати при їхньому визначенні [28, 37]. Крім того, для коректного використання умов (7) задані на межі дотичні напруження повинні бути гладкими функціями змінної x .

Зауважимо, що побудова коректного розв’язку задачі (1)–(3) вимагає накладання загальних умов рівноваги [37] для зовнішніх силових навантажень в умовах (3):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^-(x) - \tau^+(x)) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (p^-(x) - p^+(x)) dx = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(p^-(x) - p^+(x)) dx &= h \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^+(x) + \tau^-(x)) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

При цьому компоненти тензора напружень повинні задовольняти інтегральні умови в сенсі головного вектора та моменту у відповідних поперечних перерізах:

$$2 \int_{-h}^h \sigma_{xx}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^-(\xi) - \tau^+(\xi)) \operatorname{sgn}(x - \xi) d\xi, \quad x = \operatorname{const},$$

$$\begin{aligned}
2 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(x, y) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} (p^+(x) + p^-(x)) dx, \quad y = \text{const}, \\
2 \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{xy}(x, y) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^+(x) + \tau^-(x)) dx, \quad y = \text{const}, \\
2 \int_{-h}^h \sigma_{xy}(x, y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} (p^+(\xi) - p^-(\xi)) \text{sgn}(x - \xi) d\xi, \quad x = \text{const}, \\
2 \int_{-h}^h y \sigma_{xx}(x, y) dy &= \int_{-\infty}^{\infty} (p^+(\xi) - p^-(\xi)) |x - \xi| d\xi - \\
&\quad - h \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^+(\xi) + \tau^-(\xi)) \text{sgn}(x - \xi) d\xi, \quad x = \text{const}, \\
2 \int_{-\infty}^{\infty} x \sigma_{yy}(x, y) dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} x(p^+(x) + p^-(x)) dx + \\
&\quad + y \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^-(x) + \tau^+(x)) dx, \quad y = \text{const}, \tag{9}
\end{aligned}$$

а також загалом в області \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \sigma_{xx}(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau^+(x) - \tau^-(x)) dx, \\
\iint_{\mathcal{S}} \sigma_{yy}(x, y) dx dy &= -h \int_{-\infty}^{\infty} (p^+(x) + p^-(x)) dx, \\
\iint_{\mathcal{S}} \sigma_{xy}(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} x(p^-(x) - p^+(x)) dx = h \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^+(x) + \tau^-(x)) dx, \\
\iint_{\mathcal{S}} y \sigma_x(x, y) dx dy &= h \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau^+(x) + \tau^-(x)) dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^2(p^+(x) - p^-(x)) dx, \\
\iint_{\mathcal{S}} x \sigma_{yy}(x, y) dx dy &= h^2 \int_{-\infty}^{\infty} (\tau^-(x) - \tau^+(x)) dx - h \int_{-\infty}^{\infty} x(p^+(x) + p^-(x)) dx.
\end{aligned}$$

Розглянемо побудову розв'язку плоскої задачі теорії пружності (1)–(3) без залучення рівняння суцільності (6). Для цього використаємо функцію Вігака $\mathcal{V}(x, y)$, яку для плоскої задачі вводять так [6, 8]:

$$\mathcal{V} = \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = - \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}. \tag{10}$$

Такий спосіб запровадження визначальної функції \mathcal{V} , як і у випадку використання класичного бігармонічного потенціалу Ері [29], забезпечує автоматичне виконання рівнянь рівноваги (1). Однак, на відміну від випадку використання класичного потенціалу, напруження виражено через функцію Вігака за допомогою інтегральних операторів з урахуванням впливу крайових умов. Ці вирази отримуємо шляхом інтегрування (10) з урахуванням відпо-

відних умов (3), (7):

$$\begin{aligned}
2\sigma_{xx}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}(\xi, y) |x - \xi| d\xi, \\
2\sigma_{yy}(x, y) &= -p^+(x) - p^-(x) - (y - h) \frac{d\tau^+(x)}{dx} - \\
&\quad - (y + h) \frac{d\tau^-(x)}{dx} + \int_{-h}^h \mathcal{V}(x, \eta) |y - \eta| d\eta, \\
2\sigma_{xy}(x, y) &= \tau^+(x) + \tau^-(x) - \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{S}} \mathcal{V}(\xi, \eta) \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\xi d\eta. \quad (11)
\end{aligned}$$

Нескладно переконатися, що вирази (11) задовольняють крайові умови (3), якщо функція Вігака забезпечує виконання інтегральних умов

$$\begin{aligned}
\int_{-h}^h \mathcal{V}(x, y) dy &= \frac{d}{dx} (\tau^-(x) - \tau^+(x)), \\
\int_{-h}^h y \mathcal{V}(x, y) dy &= p^+(x) - p^-(x) - h \frac{d}{dx} (\tau^+(x) + \tau^-(x)). \quad (12)
\end{aligned}$$

Напруження (11) згасають у безмежно віддалених точках, якщо

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \mathcal{V}(x, y) dx = 0. \quad (13)$$

Отже, компоненти тензора напружень виражено через функцію Вігака інтегральними залежностями (11), а виконання крайових умов (3) та умов згасання напружень при $x^2 \rightarrow \infty$ забезпечується інтегральними умовами (12), (13). При цьому рівняння рівноваги (1) виконуються тотожно, а співвідношення Коші (2) з урахуванням (11) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
2E \frac{\partial u_x(x, y)}{\partial x} &= v \left(p^+(x) + p^-(x) + (y - h) \frac{d\tau^+(x)}{dx} + \right. \\
&\quad \left. + (y + h) \frac{d\tau^-(x)}{dx} - \int_{-h}^h \mathcal{V}(x, \eta) |y - \eta| d\eta \right) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}(\xi, y) |x - \xi| d\xi, \\
2E \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial y} &= -p^+(x) - p^-(x) - (y - h) \frac{d\tau^+(x)}{dx} - (y + h) \frac{d\tau^-(x)}{dx} + \\
&\quad + \int_{-h}^h \mathcal{V}(x, \eta) |y - \eta| d\eta - v \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{V}(\xi, y) |x - \xi| d\xi, \\
\frac{E}{1 + v} \left(\frac{\partial u_x(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial u_y(x, y)}{\partial x} \right) &= \tau^+(x) + \tau^-(x) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{S}} \mathcal{V}(\xi, \eta) \operatorname{sgn}(x - \xi) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\xi d\eta. \quad (14)
\end{aligned}$$

Рівняння (14) містять три невідомі функції: u_x , u_y і \mathcal{V} . Тому будь-які два з цих рівнянь можна використати для вираження переміщень через \mathcal{V} , а третє – для формулювання ключового рівняння для цієї функції.

З метою реалізації описаного підходу спершу відокремимо змінні у рівняннях (14) за допомогою інтегрального перетворення Фур'є [17]

$$\bar{f}(y) \equiv \bar{f}(s; y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \exp(-isx) dx, \quad (15)$$

де f – довільна функція, s – параметр перетворення, $i^2 = -1$. Коректність застосування перетворення (15) обумовлена згасанням напружень у безмежно віддалених точках, що узгоджується з умовами (13).

У просторі перетворення (15) вирази (11) набувають вигляду

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx}(y) &= -\frac{1}{s^2} \bar{\mathcal{V}}(y), \quad \bar{\sigma}_{xy} = \frac{\bar{\tau}^+ + \bar{\tau}^-}{2} + \frac{i}{2s} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta, \\ \bar{\sigma}_{yy}(y) &= -\frac{\bar{p}^+ + \bar{p}^-}{2} - \frac{is}{2} ((y + h)\bar{\tau}^- + (y - h)\bar{\tau}^+) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) |y - \eta| d\eta, \end{aligned} \quad (16)$$

умови (12) подаються так:

$$\int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(y) dy = -is(\bar{\tau}^+ - \bar{\tau}^-), \quad \int_{-h}^h y \bar{\mathcal{V}}(y) dy = \bar{p}^+ - \bar{p}^- - ihs(\bar{\tau}^+ + \bar{\tau}^-), \quad (17)$$

а рівняння (14) –

$$\begin{aligned} isE\bar{u}_x(y) &= \frac{isv}{2} ((y - h)\bar{\tau}^+ + (y + h)\bar{\tau}^-) + \frac{v}{2} (\bar{p}^+ + \bar{p}^-) - \\ &\quad - \frac{v}{2} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) |y - \eta| d\eta - \frac{1}{s^2} \bar{\mathcal{V}}(y), \\ E \frac{d\bar{u}_y(y)}{dy} &= -\frac{is}{2} ((y - h)\bar{\tau}^+ + (y + h)\bar{\tau}^-) - \frac{1}{2} (\bar{p}^+ + \bar{p}^-) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) |y - \eta| d\eta + \frac{v}{s^2} \bar{\mathcal{V}}(y), \\ \frac{E}{1 + v} \left(\frac{d\bar{u}_x(y)}{dy} + is\bar{u}_y(y) \right) &= \bar{\tau}^+ + \bar{\tau}^- + \frac{i}{s} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta. \end{aligned} \quad (18)$$

Як зазначено вище, розв'язування системи інтегро-диференціальних рівнянь (18) можна здійснювати різними способами, вибираючи рівняння для визначення переміщень та отримання ключового рівняння для визначальної функції. Таких способів вибору рівнянь є три. Розглянемо реалізацію кожного з них.

2.1.1. Спосіб 1. Найпростішим виглядає спосіб визначення \bar{u}_x із першого рівняння, а \bar{u}_y – із третього рівняння системи (18), оскільки у цьому разі не потрібно застосовувати операцій інтегрування. У результаті маємо такі вирази:

$$E\bar{u}_x(y) = \frac{v}{2} ((y - h)\bar{\tau}^+ + (y + h)\bar{\tau}^-) - \frac{iv}{2s} (\bar{p}^+ + \bar{p}^-) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{i\nu}{2s} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) |y - \eta| d\eta + \frac{i}{s^3} \bar{\mathcal{V}}(y), \\
E\bar{u}_y(y) &= \frac{2 + \nu}{2s} \left(i(\bar{\tau}^+ + \bar{\tau}^-) + \frac{1}{s} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta \right) - \frac{1}{s^4} \frac{d\bar{\mathcal{V}}(y)}{dy}. \quad (19)
\end{aligned}$$

Тоді, підставивши (19) у друге рівняння (18), отримаємо ключове рівняння

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \bar{\mathcal{V}}(y)}{dy^2} - 2s^2 \bar{\mathcal{V}}(y) + \frac{s^4}{2} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) |y - \eta| d\eta &= \\
&= \frac{s^4}{2} \left(\bar{p}^+ + \bar{p}^- + is((y+h)\bar{\tau}^+ + (y-h)\bar{\tau}^-) \right). \quad (20)
\end{aligned}$$

Слід зауважити, що аналогічне до інтегро-диференціального рівняння (20) отримуємо із рівняння суцільності (6) з урахуванням (11) і застосуванням інтегрального перетворення Фур'є (15).

Загальний розв'язок ключового рівняння (20) має вигляд:

$$\bar{\mathcal{V}}(y) = (A_0 + A_1 y) \cosh(sy) + (A_3 + A_2 y) \sinh(sy). \quad (21)$$

Чотири сталі інтегрування A_ℓ , $\ell = 0, 1, 2, 3$, визначимо з двох інтегральних умов (17) та ще двох умов, отриманих шляхом підстановки (21) у (20) із подальшим зануленням лінійної складової (множники при 1 та y), яка виникає внаслідок інтегрування. У результаті знаходимо такі вирази для сталих інтегрування:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \frac{s^2}{\Delta_+} ((\bar{p}^+ + \bar{p}^-)(\sinh(sh) - sh \cosh(sh)) - \\
&\quad - i(\bar{\tau}^+ - \bar{\tau}^-)(2 \cosh(sh) - sh \sinh(sh))), \\
A_1 &= \frac{s^3}{\Delta_-} ((\bar{p}^+ - \bar{p}^-) \cosh(sh) - i(\bar{\tau}^+ + \bar{\tau}^-) \sinh(sh)), \\
A_2 &= \frac{s^3}{\Delta_+} ((\bar{p}^+ + \bar{p}^-) \sinh(sh) - i(\bar{\tau}^+ - \bar{\tau}^-) \cosh(sh)), \\
A_3 &= \frac{s^2}{\Delta_-} ((\bar{p}^+ - \bar{p}^-)(\cosh(sh) - sh \sinh(sh)) - \\
&\quad - i(\bar{\tau}^+ + \bar{\tau}^-)(2 \sinh(sh) - sh \cosh(sh))), \\
\Delta_\pm &= \sinh(2sh) \pm 2sh. \quad (22)
\end{aligned}$$

З використанням (21) та (16), (19) знаходимо трансформанти компонент тензора напружень та вектора переміщень

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx}(y) &= -\frac{1}{s^2} ((A_0 + A_1 y) \cosh(sy) + (A_3 + A_2 y) \sinh(sy)), \\
\bar{\sigma}_{xy}(y) &= \frac{i}{s^3} ((s(A_3 + A_2 y) - A_1) \cosh(sy) + \\
&\quad + (s(A_0 + A_1 y) - A_2) \sinh(sy)), \\
\bar{\sigma}_{yy}(y) &= \frac{1}{s^3} ((s(A_0 + A_1 y) - 2A_2) \cosh(sy) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (s(A_3 + A_2y) - 2A_1) \sinh(sy), \\
E\bar{u}_x(y) &= \frac{i}{s^4} ((s(1+\nu)(A_0 + A_1y) - 2\nu A_2) \cosh(sy) + \\
& + (s(1+\nu)(A_3 + A_2y) - 2\nu A_1) \sinh(sy)), \\
E\bar{u}_y(y) &= \frac{1}{s^4} ((s(1+\nu)(A_3 + A_2y) - (3+\nu)A_1) \cosh(sy) + \\
& + (s(1+\nu)(A_0 + A_1y) - (3+\nu)A_2) \sinh(sy)). \tag{23}
\end{aligned}$$

де A_ℓ , $\ell = 0, 1, 2, 3$, наведено формулами (22).

Остаточно визначальну функцію (21) та компоненти напружено-деформованого стану (23) у фізичному просторі знаходимо з використанням оберненого до (15) перетворення

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(y) \exp(isx) ds. \tag{24}$$

Зокрема, вираз для функції Вігака знаходимо у вигляді явної функціональної залежності від факторів навантаження (3):

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (p^+(\xi) \mathcal{P}^+(x, \xi, y) + p^-(\xi) \mathcal{P}^-(x, \xi, y) + \\
& + \tau^+(\xi) \mathcal{F}^+(x, \xi, y) + \tau^-(\xi) \mathcal{F}^-(x, \xi, y)) d\xi,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^\pm(x, \xi, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty s^2 P^\pm(y) \cos(s(x - \xi)) ds, \\
\mathcal{F}^\pm(x, \xi, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty s^2 T^\pm(y) \sin(s(x - \xi)) ds, \\
P^\pm(y) &= \pm \frac{1}{\Delta_+ \Delta_-} \left((\sinh(s(y \pm h)) + s(y \mp h) \cosh(s(y \pm h))) \sinh(2sh) + \right. \\
& \left. + 2sh (\sinh(s(y \mp h)) + s(y \pm h) \cosh(s(y \mp h))) \right), \\
T^\pm(y) &= \pm \frac{1}{\Delta_+ \Delta_-} \left((2 \cosh(s(y \pm h)) + s(y \mp h) \sinh(s(y \pm h))) \sinh(2sh) - \right. \\
& \left. - 2sh (\cosh(s(y \mp h)) + s(y \pm h) \sinh(s(y \mp h))) \right). \tag{25}
\end{aligned}$$

В аналогічному поданні нескладно визначити компоненти тензора напружень та вектора переміщень із застосуванням (24) до (23). Зокрема, напруження σ_{xx} знаходимо у вигляді

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} (p^+(\xi) \mathcal{P}_x^+(x, \xi, y) + p^-(\xi) \mathcal{P}_x^-(x, \xi, y) + \\
& + \tau^+(\xi) \mathcal{F}_x^+(x, \xi, y) + \tau^-(\xi) \mathcal{F}_x^-(x, \xi, y)) d\xi,
\end{aligned}$$

де

$$\mathcal{P}_x^\pm(x, \xi, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty P^\pm(y) \cos(s(x - \xi)) ds,$$

$$\mathcal{G}_x^\pm(x, \xi, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty T^\pm(y) \sin(s(x - \xi)) ds,$$

а вирази для $P^\pm(y)$, $T^\pm(y)$ наведено в (25).

2.1.2. Спосіб 2. Побудуємо розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь (18), визначивши \bar{u}_x із першого рівняння, а \bar{u}_y – з другого рівняння шляхом інтегрування по y з урахуванням першої умови (17). Звідси отримуємо такий вираз:

$$\begin{aligned} E\bar{u}_y = \frac{E}{2}(\bar{u}_y(h) + \bar{u}_y(-h)) + \int_{-h}^h \left(\left(\frac{y - \eta}{2} \right)^2 + \frac{\nu}{2s^2} \right) \bar{\mathcal{V}}(\eta) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta - \\ - \frac{y - h}{2} \bar{p}^+ - \frac{y + h}{2} \bar{p}^- - \frac{is}{4} ((y - h)^2 \bar{\tau}^+ + (y + h)^2 \bar{\tau}^-). \end{aligned} \quad (26)$$

Виконання рівності (26) на межі смуги $y = \pm h$ з використанням (17) забезпечує виконання інтегральної умови

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h y^2 \bar{\mathcal{V}}(y) dy = 2E(\bar{u}_y(h) - \bar{u}_y(-h)) + \\ + 2h(\bar{p}^+ + \bar{p}^-) + i \frac{2\nu - s^2 h^2}{s} (\bar{\tau}^+ - \bar{\tau}^-). \end{aligned} \quad (27)$$

Для знаходження трансформанти функції Вігака використаємо третє рівняння системи (18), яке з урахуванням (26) та першого виразу (19) матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathcal{V}}(y)}{dy} + s^2 \int_{-h}^h \left(\left(s \frac{y - \eta}{2} \right)^2 - 1 \right) \bar{\mathcal{V}}(\eta) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta = \\ = \frac{s^4}{2} ((y - h)\bar{p}^+ + (y + h)\bar{p}^- - E(\bar{u}_y(h) + \bar{u}_y(-h))) + \\ + \frac{is^3}{4} ((s^2(y - h)^2 - 2(2 + \nu))\bar{\tau}^+ + \\ + (s^2(y + h)^2 - 2(2 + \nu))\bar{\tau}^-). \end{aligned} \quad (28)$$

Ключове інтегро-диференціальне рівняння (28) є рівнянням першого порядку диференціювання за координатою y . Розв'язок цього рівняння шукатимемо у вигляді (21). Отже, шуканий розв'язок містить шість невідомих сталих: A_ℓ , $\ell = 0, 1, 2, 3$, та $\bar{u}_y(\pm h)$. Для їх знаходження використовуємо три інтегральні умови (17), (27) та ще три умови, отримані шляхом занулення множників при 1, y та y^2 у рівнянні (28) після підстановки у нього виразу (21). Нескладно показати, що у цьому випадку отримаємо вирази (23) зі сталими (22).

2.1.3. Спосіб 3. Нехай тепер \bar{u}_y знайдено з другого рівняння системи (18) у вигляді (26). При цьому отримано також умову (27). У результаті інтегрування третього рівняння (18) з урахуванням першої умови (17) отримуємо вираз

$$E\bar{u}_x(y) = \frac{E}{2}(\bar{u}_x(h) + \bar{u}_x(-h)) + (1 + \nu)((y - h)\bar{\tau}^+ + (y + h)\bar{\tau}^-) - \\ - \frac{is}{2} E \int_{-h}^h \bar{u}_y(\eta) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta + \frac{1 + \nu}{s} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) |y - \eta| d\eta. \quad (29)$$

З урахуванням виразу (26) та умов (17), (27) знаходимо

$$E \int_{-h}^h \bar{u}_y(\eta) \operatorname{sgn}(y - \eta) d\eta = E((y - h)\bar{u}_y(h) + (y + h)\bar{u}_y(-h)) - \\ - \frac{(y - h)^2}{2} \bar{p}^+ - \frac{(y + h)^2}{2} \bar{p}^- - \frac{is(y - h)^3}{6} \bar{\tau}^+ - \frac{is(y + h)^3}{6} \bar{\tau}^- + \\ + \frac{1}{6s^2} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) (s^2(y - h)^2 + 6\nu) |y - \eta| d\eta. \quad (30)$$

Підставивши (30) в (29), отримаємо вираз

$$E\bar{u}_x(y) = \frac{E}{2}(\bar{u}_x(h) + \bar{u}_x(-h)) - is \frac{E}{2}((y - h)\bar{u}_y(h) + (y + h)\bar{u}_y(-h)) + \\ + \frac{is}{4}((y - h)^2 \bar{p}^+ + (y + h)^2 \bar{p}^-) + \\ + \left(1 + \nu - \frac{s^2}{12}(y - h)^2\right)(y - h)\bar{\tau}^+ + \\ + \left(1 + \nu - \frac{s^2}{12}(y + h)^2\right)(y + h)\bar{\tau}^- + \\ + \frac{i}{2s} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) \left(2 + \nu - s^2 \frac{(y - \eta)^2}{6}\right) |y - \eta| d\eta. \quad (31)$$

На сторонах смуги $y = \pm h$ із виразу (31) з урахуванням умов (17) та (27) отримуємо таку інтегральну умову для функції Вігака:

$$\frac{is}{12} \int_{-h}^h y^3 \bar{\mathcal{V}}(y) dy = \frac{E}{2}(\bar{u}_x(h) - \bar{u}_x(-h)) + \frac{ish}{2}(E\bar{u}_y(h) + \bar{u}_y(-h)) + \\ + i \frac{2(2 + \nu) + s^2 h^2}{4s} (\bar{p}^+ - \bar{p}^-) - \frac{h}{2} \left(\nu - \frac{s^2 h^2}{6}\right) (\bar{\tau}^+ + \bar{\tau}^-). \quad (32)$$

Підставивши тепер вираз (31) у перше рівняння (18), отримуємо таке ключове рівняння:

$$\bar{\mathcal{V}}(y) + s^2 \int_{-h}^h \left(s^2 \frac{(y - \eta)^2}{12} - 1\right) \bar{\mathcal{V}}(\eta) |y - \eta| d\eta = \\ = - \frac{is^3 E}{2} (\bar{u}_x(h) + \bar{u}_x(-h)) - \\ - \frac{s^4 E}{2} ((y - h)\bar{u}_y(h) + (y + h)\bar{u}_y(-h)) + \\ + \frac{s^2}{4} (s^2(y - h)^2 + 2\nu) \bar{p}^+ + \frac{s^2}{4} (s^2(y + h)^2 + 2\nu) \bar{p}^- -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{is^3}{2}(y-h)\left(2+v-\frac{s^2}{6}(y-h)^2\right)\bar{\tau}^+ - \\
& -\frac{is^3}{2}(y+h)\left(2+v-\frac{s^2}{6}(y+h)^2\right)\bar{\tau}^-. \tag{33}
\end{aligned}$$

Рівняння (33) є інтегральним рівнянням другого роду, розв'язок якого будемо у вигляді (21). У такому разі шуканий розв'язок містить вісім довільних сталих A_ℓ , $\ell = 0, 1, 2, 3$, $\bar{u}_x(\pm h)$ та $\bar{u}_y(\pm h)$, для визначення яких використаємо (17), (27), (32) та ще чотири умови, отримані шляхом занулення коефіцієнтів, які виникають при 1 , y , y^2 та y^3 після підстановки (21) у (33). Отриманий у такий спосіб розв'язок збігається з (22), (23).

2.2. Задача II (друга основна задача). Розглянемо другу крайову задачу, яка полягає у знаходженні розв'язку рівнянь (1), (2) з умовами (4), де $u^\pm(x)$ та $v^\pm(x)$ – задані функції. З огляду на вже побудований розв'язок першої основної задачі, розв'язування другої можна здійснювати з використанням двох альтернативних стратегій. Перша стратегія полягає у зведенні другої основної задачі до силової (першої) задачі. Друга стратегія передбачає безпосереднє розв'язування вихідних рівнянь з крайовими умовами у термінах переміщень. Розглянемо реалізацію обох стратегій з використанням функції Вігака.

2.2.1. Зведення до першої основної крайової задачі. Використаємо підхід, запропонований у роботах [34, 38], згідно з яким будують розв'язок першої задачі, який явно залежить від зусиль на межі \bar{p}^\pm та $\bar{\tau}^\pm$, що їх вважають невідомими. З використанням цього розв'язку встановлюють взаємно-однозначні відповідності між переміщеннями $u^\pm(x)$ та $v^\pm(x)$, заданими на межі згідно з умовами (4), і невідомими зовнішніми зусиллями \bar{p}^\pm та $\bar{\tau}^\pm$. Знайшовши у такий спосіб останні, їх підставляють в явний розв'язок першої задачі.

У нашому випадку для реалізації цієї стратегії нам достатньо використати вирази (23) для компонент вектора переміщень на сторонах $y = \pm h$

$$\begin{aligned}
E\bar{u}^\pm &= \frac{i}{s^4} \left((s(1+v)(A_0 \pm A_1 h) - 2vA_2) \cosh(sh) \pm \right. \\
& \left. \pm (s(1+v)(A_3 \pm A_2 h) - 2vA_1) \sinh(sh) \right), \\
E\bar{v}^\pm &= \frac{1}{s^4} \left((s(1+v)(A_3 \pm A_2 h) - (3+v)A_1) \cosh(sh) \pm \right. \\
& \left. \pm (s(1+v)(A_0 \pm A_1 h) - (3+v)A_2) \sinh(sh) \right),
\end{aligned}$$

з яких визначаємо сталі

$$\begin{aligned}
A_0 &= -\frac{s^3 E}{2(1+v)\bar{\Delta}_+} \left((ish(1+v)(\bar{u}^+ + \bar{u}^-) - 2(\bar{v}^+ - \bar{v}^-)) \cosh(sh) - \right. \\
& \left. - (i(3+v)(\bar{u}^+ + \bar{u}^-) - sh(1+v)(\bar{v}^+ - \bar{v}^-)) \sinh(sh) \right), \\
A_1 &= -\frac{s^4 E}{2\bar{\Delta}_-} (i(\bar{u}^+ - \bar{u}^-) \cosh(sh) + (\bar{v}^+ + \bar{v}^-) \sinh(sh)),
\end{aligned}$$

$$A_2 = -\frac{s^4 E}{2\tilde{\Delta}_+} ((\bar{v}^+ - \bar{v}^-) \cosh(sh) - i(\bar{u}^+ + \bar{u}^-) \sinh(sh)),$$

$$A_3 = -\frac{s^3 E}{2(1+\nu)\tilde{\Delta}_-} \left((i(3+\nu)(\bar{u}^+ - \bar{u}^-) - sh(1+\nu)(\bar{v}^+ + \bar{v}^-)) \cosh(sh) - \right. \\ \left. - (ish(1+\nu)(\bar{u}^+ - \bar{u}^-) - 2\nu(\bar{v}^+ + \bar{v}^-)) \sinh(sh) \right), \quad (34)$$

$$\tilde{\Delta}_\pm = (1+\nu)sh \pm \frac{\nu-3}{2} \sinh(2sh).$$

Таким чином, розв'язок задачі (1), (2), (4) знайдено у просторі інтегрального перетворення (15) у вигляді (23) з константами, заданими виразами (34).

2.2.2. Безпосереднє розв'язування другої основної крайової задачі.

З використанням формул (18) на сторонах смуги отримаємо вирази

$$\bar{p}^\pm = \frac{1}{\nu s^2} \left(is^3 E \bar{u}^\pm - \bar{\mathcal{V}} \Big|_{y=\pm h} \right), \quad \bar{\tau}^\pm = \frac{i}{s^3(2+\nu)} \left(s^4 E \bar{v}^\pm + \frac{d\bar{\mathcal{V}}}{dy} \Big|_{y=\pm h} \right),$$

врахування яких дає змогу записати інтегральні умови (17) у вигляді

$$\int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(y) dy = \frac{1}{s^2(2+\nu)} \left(s^4 E (\bar{v}^+ - \bar{v}^-) + \frac{d\bar{\mathcal{V}}}{dy} \Big|_{y=h} - \frac{d\bar{\mathcal{V}}}{dy} \Big|_{y=-h} \right),$$

$$\int_{-h}^h y \bar{\mathcal{V}}(y) dy = \frac{1}{\nu s^2} (is^3 E (\bar{u}^+ - \bar{u}^-) - \bar{\mathcal{V}}(h) + \bar{\mathcal{V}}(-h)) + \\ + \frac{h}{s^2(2+\nu)} \left(s^4 E (\bar{v}^+ + \bar{v}^-) + \frac{d\bar{\mathcal{V}}}{dy} \Big|_{y=h} + \frac{d\bar{\mathcal{V}}}{dy} \Big|_{y=-h} \right), \quad (35)$$

а інтегро-диференціальне рівняння (20) – так:

$$\frac{d^2 \bar{\mathcal{V}}(y)}{dy^2} - 2s^2 \bar{\mathcal{V}}(y) + \frac{s^4}{2} \int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(\eta) |y - \eta| d\eta = \\ = \frac{s^2}{2\nu} (\bar{\mathcal{V}}(h) + \bar{\mathcal{V}}(-h) - is^3 E (\bar{u}^+ + \bar{u}^-)) + \\ - \frac{s^2}{2(2+\nu)} \left((y+h) \left(s^4 E \bar{v}^+ + \frac{d\bar{\mathcal{V}}(y)}{dy} \Big|_{y=h} \right) + \right. \\ \left. + (y-h) \left(s^4 E \bar{v}^- + \frac{d\bar{\mathcal{V}}(y)}{dy} \Big|_{y=-h} \right) \right). \quad (36)$$

Розв'язок рівняння (36) шукаємо у вигляді (21), а для визначення сталих A_ℓ , $\ell = 0, 1, 2, 3$, використаємо дві умови (35) та дві умови рівності нулю лінійної за координатою y частини, що виникає у рівнянні (36) після підстановки виразу (21). У результаті отримаємо вирази (23) з константами (34). Аналогічні результати отримуємо і для інших двох способів виведення ключового рівняння для функції Вігака.

2.3. Задача III (третья (змішана) основна задача). Розглянемо третю основну крайову задачу, яка полягає у знаходженні розв'язку рівнянь (1), (2) з умовами (5), де $p^+(x)$, $\tau^+(x)$, $u^-(x)$ та $v^-(x)$ – задані функції. Як і в попередньому випадку, цю задачу можна звести до першої основної

(силової) задачі. Для цього з використанням другого і третього виразів (23) при $y = h$ та четвертого і п'ятого виразів (23) при $y = -h$ визначимо сталі A_ℓ , $\ell = 0, 1, 2, 3$, у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
A_0 &= -\frac{s^3}{2}(\bar{p}^+ \cosh(sh) - i\bar{\tau}^+ \sinh(sh)) - \\
&\quad - \frac{s^4 E}{2(1+v)}(i\bar{u}^- \cosh(sh) - \bar{v}^- \sinh(sh)) + \\
&\quad + \frac{A_1}{1+v} \sinh(2sh) + \frac{A_2}{2} \left(3 - \frac{1-v}{1+v} \cosh(2sh) \right), \\
A_3 &= \frac{s^3}{2}(\bar{p}^+ \sinh(sh) - i\bar{\tau}^+ \cosh(sh)) - \\
&\quad - \frac{s^4 E}{2(1+v)}(i\bar{u}^- \sinh(sh) - \bar{v}^- \cosh(sh)) - \\
&\quad - \frac{A_2}{1+v} \sinh(2sh) + \frac{A_1}{2} \left(3 + \frac{1-v}{1+v} \cosh(2sh) \right), \\
A_1 &= -\frac{s^3(1+v)}{\Delta} \bar{p}^+ ((v\Delta_+ - \Delta_-) \cosh(sh) - 2 \sinh(sh) \cosh(2sh)) + \\
&\quad + \frac{is^3(1+v)}{\Delta} \bar{\tau}^+ ((v\Delta_+ - \Delta_-) \sinh(sh) - 2 \cosh(sh) \cosh(2sh)) + \\
&\quad + \frac{is^4 E}{\Delta} \bar{u}^- ((v\Delta_+ - \Delta_-) \cosh(sh) + 2 \sinh(sh) \cosh(2sh)) - \\
&\quad - \frac{s^4 E}{\Delta} \bar{v}^- ((v\Delta_+ - \Delta_-) \sinh(sh) + 2 \cosh(sh) \cosh(2sh)), \\
A_2 &= \frac{s^3(1+v)}{\Delta} \bar{p}^+ ((\Delta_+ - v\Delta_-) \sinh(sh) + 2 \cosh(sh) \cosh(2sh)) - \\
&\quad - \frac{is^3(1+v)}{\Delta} \bar{\tau}^+ ((\Delta_+ - v\Delta_-) \cosh(sh) + 2 \sinh(sh) \cosh(2sh)) + \\
&\quad + \frac{is^4 E}{\Delta} \bar{u}^- ((\Delta_+ - v\Delta_-) \sinh(sh) - 2 \cosh(sh) \cosh(2sh)) - \\
&\quad - \frac{s^4 E}{\Delta} \bar{v}^- ((\Delta_+ - v\Delta_-) \cosh(sh) - 2 \sinh(sh) \cosh(2sh)), \\
\Delta &= v(\Delta_+^2 + \Delta_-^2) - (1+v^2)\Delta_+ \Delta_- + 4 \cosh^2(2sh). \tag{37}
\end{aligned}$$

Таким чином, розв'язок задачі знайдено у вигляді (23) зі сталими (37).

Якщо використовувати другу стратегію, то з використанням (17) при $y = -h$ визначимо невідомі зусилля

$$\bar{p}^- = \frac{is}{v} E\bar{u}^- - \frac{1}{vs^2} \bar{\mathcal{V}} \Big|_{y=-h}, \quad \bar{\tau}^- = \frac{i}{2+v} \left(sE\bar{v}^- + \frac{1}{s^3} \frac{d\bar{\mathcal{V}}}{dy} \Big|_{y=-h} \right) \tag{38}$$

З урахуванням (38) подамо умови (17) у вигляді

$$\int_{-h}^h \bar{\mathcal{V}}(y) dy = -is\bar{\tau}^+ - \frac{1}{s^2(2+v)} \left(s^4 E\bar{v}^+ + \frac{d\bar{\mathcal{V}}}{dy} \Big|_{y=-h} \right),$$

$$\int_{-h}^h y \bar{V}(y) dy = \bar{p}^+ - ish \bar{\tau}^+ - \frac{1}{vs^2} \left(is^3 E \bar{u}_0^- - \bar{V} \Big|_{y=-h} \right) + \frac{h}{s^2(2+v)} \left(s^4 E \bar{v}^- + \frac{d\bar{V}}{dy} \Big|_{y=-h} \right), \quad (39)$$

а з (20) отримаємо ключове рівняння

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \bar{V}(y)}{dy^2} - 2s^2 \bar{V}(y) + \frac{s^4}{2} \int_{-h}^h \bar{V}(y) |y - \eta| d\eta = \\ = \frac{s^4}{2} \bar{p}^+ - \frac{s^2}{2v} (is^3 E \bar{u}^- - \bar{V}(-h)) + \frac{is^5}{2} (y-h) \bar{\tau}^- - \\ - \frac{s^2(y+h)}{2(2+v)} \left(s^4 E \bar{v}^- + \frac{d\bar{V}(y)}{dy} \Big|_{y=-h} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Розв'язок рівняння (40) шукаємо у вигляді (21), а для визначення сталих A_ℓ , $\ell = 0, 1, 2, 3$, використаємо дві умови (39) та дві умови рівності нулю лінійної за координатою y частини, що з'являється у рівнянні (40) після підстановки виразу (21). У результаті отримаємо вирази (23) з константами у вигляді (37).

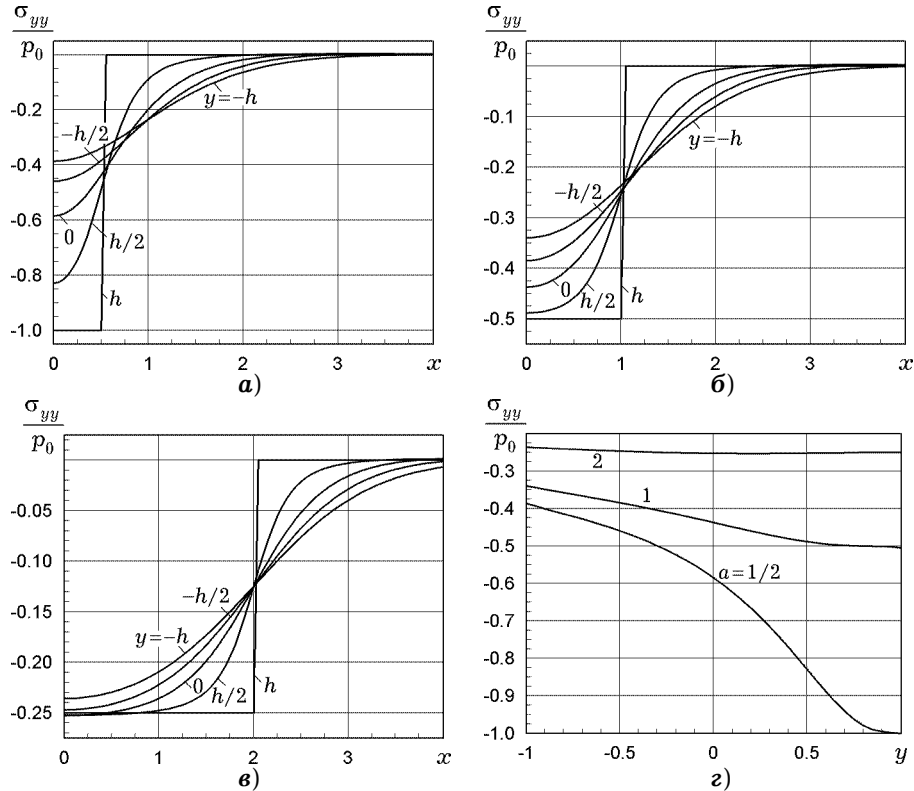


Рис. 1. Розподіли безрозмірних нормальних напружень σ_{yy}/p_0 у поздовжніх перерізах $y = \pm h, \pm h/2, 0$ смуги \mathcal{S} при а) $a = 1/2$, б) $a = 1$, в) $a = 2$ та г) у поперечному її перерізі $x = 0$.

3. Числові результати. Проаналізуємо розв'язок змішаної задачі (**Задача III**), коли зовнішні навантаження та переміщення в умовах (5) задано у вигляді

$$p^+(x) = p_a \begin{cases} 1, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad \tau^+(x) = u^-(x) = v^-(x) = 0, \quad (41)$$

де $a > 0$ – півширина ділянки межі $y = h$, де рівномірно розподілено нормальний тиск, $p_a = p_0/(2a)$, p_0 – стала у розмірності напружень. Зауважимо, що параметр p_a підбрано так, що для будь-якого додатного значення a головний вектор нормальних зусиль $p^+(x)$ дорівнює p_0 . Таким чином, функції (41) задовольняють умови рівноваги (8).

На рис. 1 показано розподіли нормальних напружень σ_{yy} у перерізах $y = \text{const}$ та $x = 0$ з урахуванням парності цієї функції за змінною x для різної ширини навантаженої ділянки $2a$. Тут і нижче $h = 1$. Нескладно переконатися, що у кожному поздовжньому перерізі $y = \text{const}$, включно з нижньою межею $y = -h$ (див. рис. 1а – рис. 1б), розраховані напруження σ_{yy} задовольняють інтегральні умови (9), які у випадку зовнішніх навантажень (41) мають вигляд

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{yy}(x, y) dx = 2ap_a = p_0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} y\sigma_{yy}(x, y) dx = 0, \quad y = \text{const}. \quad (42)$$

На межі $y = h$ напруження точно задовольняють задану межову умову. З віддаленням від навантаженої межі $y = h$ розподіли напружень «згладжуються» в околах точок розриву зусиль (41). На зацмленій межі $y = -h$ ці напруження, зберігаючи значення головного моменту та головного вектора відповідно до умов (42), є найбільш інтенсивними посередині навантаженої зони $x = 0$ у випадку найменшого із розглянутих значень параметра $a = 1/2$. Розподіли напружень за товщиною смуги (рис. 1г) свідчать про їхній перепад. Внаслідок однорідної крайової умови для дотичних напружень на межі $y = h$ криві на рис. 1г зближаються до цієї межі так, що дотична при $y \rightarrow h$ є паралельною до осі Oy . При наближенні до закріпленої межі такого ефекту не спостерігається, що свідчить про очікувану відмінність від нуля дотичних напружень при $y = -h$ у розглянутому перерізі.

Розраховані розподіли нормальних напружень σ_{xx} наведено на рис. 2 для тих самих перерізів та значень параметрів, які використано для зображень на рис. 1. Як видно з рис. 2а – рис. 2б, поздовжні напруження σ_{xx} на межі $y = h$ мають розриви у тих самих точках $x = \pm a$, що й зусилля (41). З віддаленням від навантаженої межі ці напруження стають неперервними у перерізах $x = \pm a$, маючи тут точки перегину. Крім того, у випадку зовнішніх зусиль (41) інтегральні умови (9) для цих напружень набувають вигляду

$$2 \int_{-h}^h \sigma_{xx}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^-(\xi) \text{sgn}(x - \xi) d\xi,$$

$$2 \int_{-h}^h y\sigma_{xx}(x, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} ((p^+(\xi) - p^-(\xi))|x - \xi| - h\tau^-(\xi) \text{sgn}(x - \xi)) d\xi$$

у довільному перерізі $x = \text{const}$. Згідно з цими умовами та з огляду на парність нормальних та непарність дотичних напружень за координатою x , розподіли, наведені на рис. 2г, при $x = 0$ повинні задовольняти такі інтегральні умови:

$$S_{xx}^x = P_{xx}^x, \quad x = 0, 1, \quad (43)$$

де

$$S_{xx}^0 = \int_{-1}^1 \sigma_{xx}(0, y) dy, \quad P_{xx}^0 = -\int_0^{\infty} \tau^-(x) dx,$$

$$S_{xx}^1 = \int_{-1}^1 y \sigma_{xx}(0, y) dy, \quad P_{xx}^1 = \frac{a}{4} p_0 - h P_{xx}^0 - \int_0^{\infty} x p^-(x) dx. \quad (44)$$

Рівності (43) можуть слугувати критерієм перевірки точності обчислень поздовжніх, поперечних та дотичних напружень. У таблиці 1 наведено значення S_{xx}^x , розраховані на основі формул (44) з урахуванням даних, наведених на рис. 2г, та відповідних значень P_{xx}^x , $x = 0, 1$, обчислених за даними на рис. 1а – рис. 1в та рис. 3а – рис. 3в при $y = -h$. Значення у дужках вказують відносно відхилення обчислених величин P_{xx}^x від S_{xx}^x . Із наведених значень робимо висновок, що умови (43) задовольняються із прийнятною точністю. Зі збільшенням параметра a точність задоволення умов (43) дещо погіршується, що пояснюється більш розлогим розподілом функцій за координатою x та водночас обмеженістю наведених на графіку проміжків розрахунку.

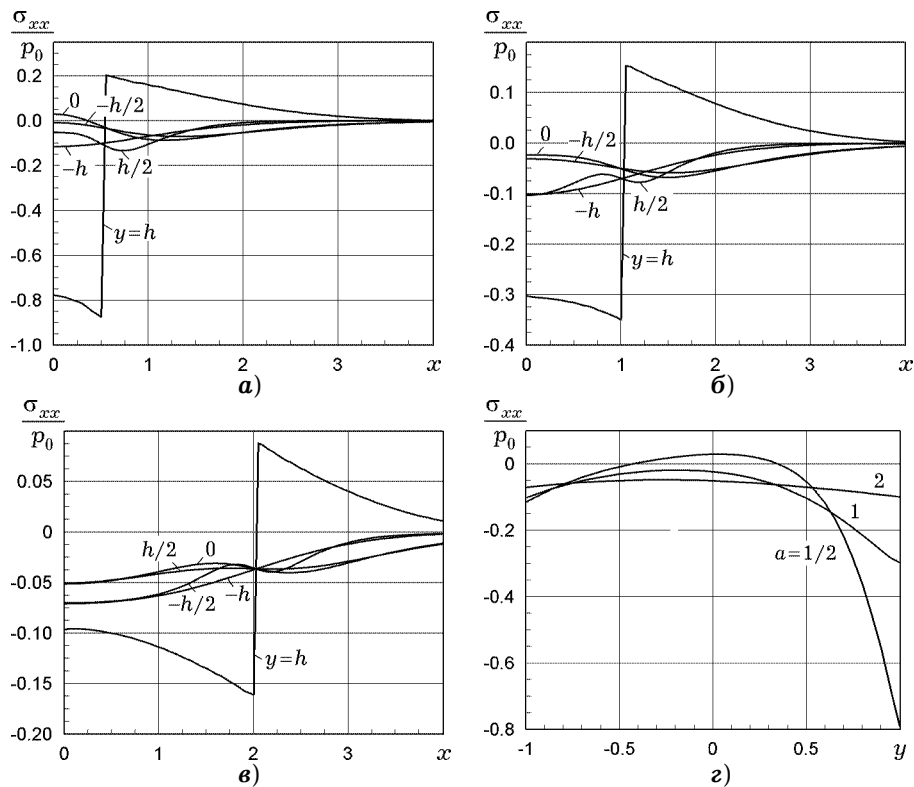


Рис. 2. Розподіли безрозмірних нормальних напружень σ_{xx}/p_0 у перерізах $y = \pm h, \pm h/2, 0$ смуги \mathcal{S} при а) $a = 1/2$, б) $a = 1$, в) $a = 2$ та г) у перерізі $x = 0$.

Таблиця 1. Значення параметрів (44) при $a = 1/2, 1, 2$.

	S_{xx}^0	P_{xx}^0	S_{xx}^1	P_{xx}^1
$a = 1/2$	-0.18283	-0.17997 (1.6%)	-0.11971	-0.11793 (1.5%)
$a = 1$	-0.16653	-0.16295 (2.1%)	-0.05916	-0.05702 (3.6%)
$a = 2$	-0.12545	-0.12043 (4.0%)	-0.01124	-0.01079 (4.0%)

На рис. 3а – рис. 3в показано розподіли дотичних напружень σ_{xy} для тих самих параметрів, що й на аналогічних рисунках вище. Внаслідок непарності за змінною x ці напруження дорівнюють нулеві при $x = 0$. Тому на рис. 3г наведено їх для значень $x = a = 1/2, 1, 2$, для яких згідно з розподілами на рис. 3а – рис. 3в, вони є близькими до максимальних. Очевидно, що умови рівноваги (9) для дотичних напружень виконуються автоматично.

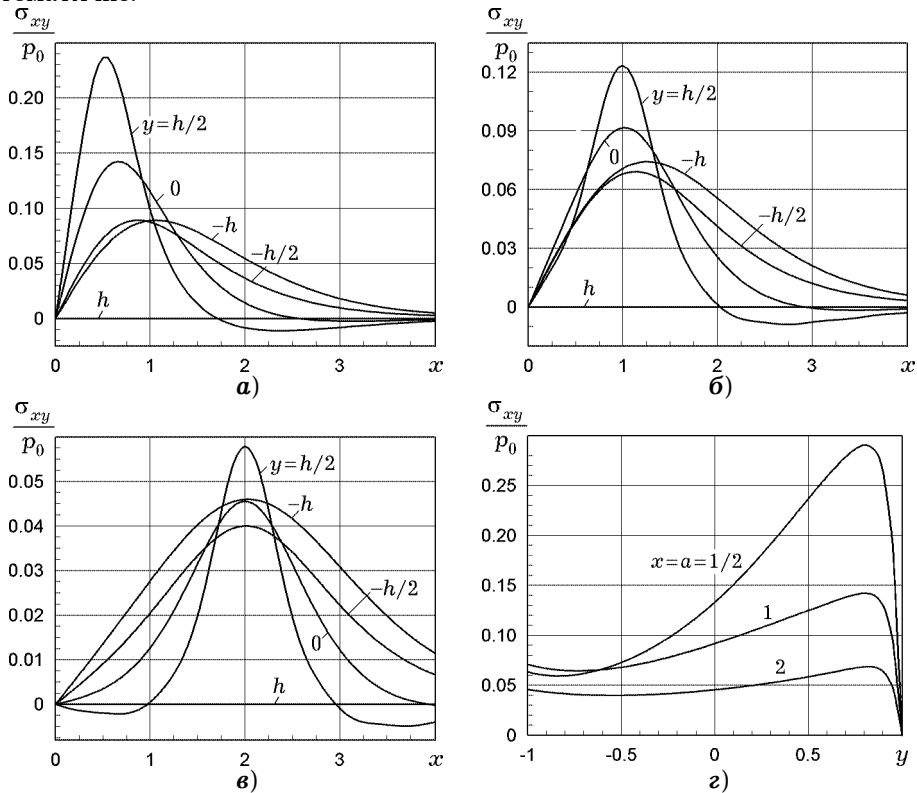


Рис. 3. Розподіли безрозмірних дотичних напружень σ_{xy}/p_0 у перерізах $y = \pm h, \pm h/2, 0$ смуги \mathcal{S} при а) $a = 1/2$, б) $a = 1$, в) $a = 2$ та г) у перерізі $x = 1/2$ при $a = 1/2$, $x = 1$ при $a = 1$ та $x = 2$ при $a = 2$.

Розподіли поперечних переміщень наведено на рис. 4. Вони точно задовольняють однорідну крайову умову при $y = -h$ та досягають максимальних значень при $y = h$. Розподіл цих переміщень за товщиною смуги у поперечному перерізі $x = 0$, де вони є найбільшими для кожного фіксованого y , показано на рис. 4г. Поздовжні переміщення показано на рис. 5 для тих самих параметрів, які використано на рис. 3.

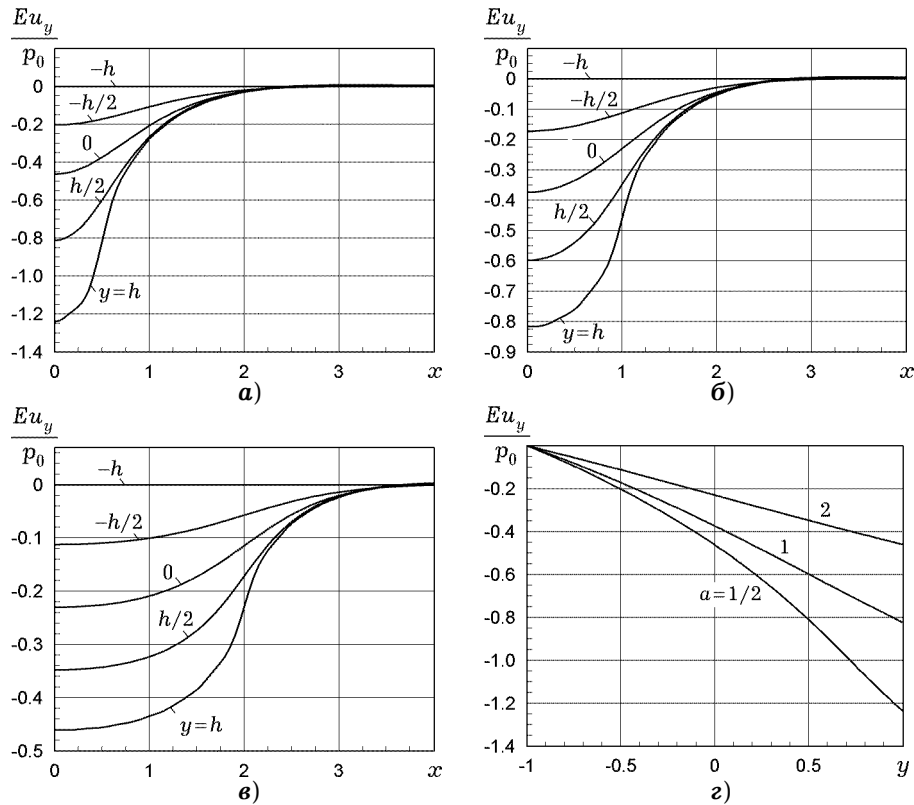


Рис. 4. Розподіли безрозмірних поперечних переміщень Eu_y/p_0 у перерізах $y = \pm h, \pm h/2, 0$ смуги \mathcal{S} при а) $a = 1/2$, б) $a = 1$, в) $a = 2$ та г) у перерізі $x = 0$.

Висновки. У статті на прикладі безмежної пружної смуги досліджено проблему розв'язання трьох основних задач теорії пружності з використанням єдиного підходу, а саме методу безпосереднього інтегрування із застосуванням визначальної функції Вігака. Основними рівняннями, які описують напружено-деформований стан досліджуваної області, є рівняння рівноваги та співвідношення Коші, де деформації подано через напруження з використанням закону Гука. Використання функції Вігака дало можливість звести задачі для трьох розглянутих типів крайових умов до розв'язання зв'язаної системи інтегро-диференціальних рівнянь першого порядку. Залежно від вибору рівнянь для визначення компонент вектора переміщень отримано інтегро-диференціальні рівняння різного порядку (другого, першого та нульового) за похідними та відповідні додаткові інтегральні умови, що підтверджує той факт, що для областей із межею додаткове диференціювання накладає певні обмеження на розглядувані компоненти напружено-деформованого стану.

Показано, що встановлені на основі інтегрування рівнянь рівноваги інтегральні умови для зусиль та моментів на межі смуги, а також для головних вектора та моменту компонент тензора напружень у відповідних поздовжніх та поперечних перерізах можна використовувати для забезпечення коректності формулювання другої та третьої основних задач, коли на усій або частині межі задано переміщення. Крім того, ці умови є своєрідним критерієм перевірки точності обчислень компонент напруженого стану.

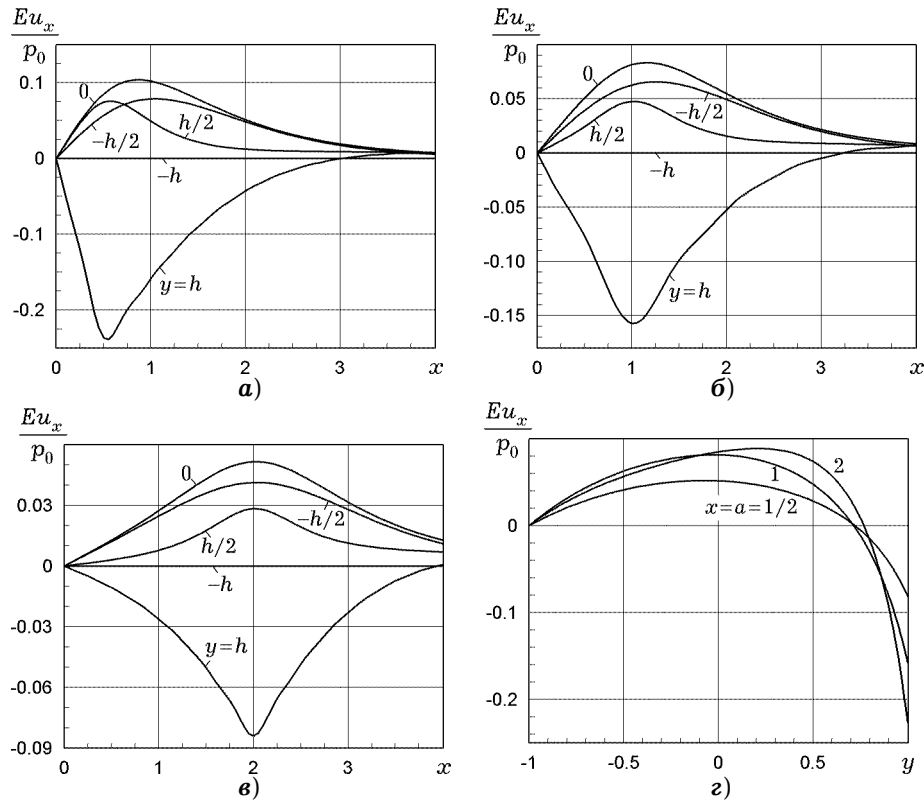


Рис. 5. Розподіли безрозмірних поздовжніх переміщень Eu_x/p_0 у перерізах $y = \pm h, \pm h/2, 0$ смуги \mathcal{S} при а) $a = 1/2$, б) $a = 1$, в) $a = 2$ та з) у перерізі $x = 1/2$ при $a = 1/2$, $x = 1$ при $a = 1$ та $x = 2$ при $a = 2$.

1. Вигак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. — Киев: Наук. думка, 1988. — 312 р.
2. Вигак В. М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності й термопружності для ортотропних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 1997. — **40**, № 1. — С. 24–29.
3. Калиняк Б. М., Токовий Ю. В., Ясінський А. В. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформівних твердих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2016. — **59**, № 3. — С. 28–42.
Te same: Kalyniak B. M., Tokovyy Yu. V., Yasinskyi A. V. Direct and inverse problems of thermomechanics concerning the optimization and identification of the thermal stressed state of deformed solids // J. Math. Sci. — 2019. — **236**, No. 1. — P. 21–34. — <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4095-3>.
4. Космодамианский А. С., Нескородев Н. М. Метод суперпозиции комплексных решений в двумерных задачах теории упругости для многосвязных анизотропных тел // Доп. НАН України. — 1995. — № 10. — С. 52–55.
5. Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. — Львів: Сполом, 2011. — 256 с. — Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В. 5 т. — Т. 5.
6. Кушнір Р. М., Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В. Зведення двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками до ключових інтегродиференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. — 2021. — **73**, № 10. — С. 1355–1367. — <https://doi.org/10.37863/umzh.v73i10.6784>.
Te same: Kushnir R. M., Tokovyi Y. V., Yuzvyak M. Y., Yasinskyi A. V. Reduction of the two-dimensional thermoelasticity problems for solids with corner points to key integrodifferential equations // Ukr. Math. J. — 2022. — **73**, No. 10. — P. 1566–1579. — <https://doi.org/10.1007/s11253-022-02014-4>.

7. *Мишику М., Теодосіу К.* Решение при помощи теории функции комплексного переменного статической задачи теории упругости для неоднородных изотропных тел // Прикл. мат. и мех. – 1966. – **30**, № 2. – С. 379–387.
 The same: *Mishiku M., Teodosiu K.* Solution of an elastic static plane problem for nonhomogeneous isotropic bodies by means of the theory of complex variables // J. Appl. Math. Mech. – 1966. – **30**, No. 2. – P. 459–468.
 – [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(67\)90195-5](https://doi.org/10.1016/0021-8928(67)90195-5).
8. *Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В.* Подання розв'язків плоских задач теорії пружності для прямокутної області через функції Вігача // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2021. – № 3. – С. 123–126.
9. *Юзв'як М. Й., Токовий Ю. В.* Пружна рівновага порожнистого циліндра скінченної довжини за осесиметричного силового навантаження // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 3. – С. 65–89.
 – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2021.64.3.65-89>.
 The same: *Yuzvyak M. Yo., Tokovyy Yu. V.* Elastic equilibrium of a hollow cylinder of finite length under axisymmetric force loading // J. Math. Sci. – 2024. – **278**, No. 5. – P. 807–841. – <https://doi.org/10.1007/s10958-024-06963-y>.
10. *Ainsworth M., Parker C.* Unlocking the secrets of locking: Finite element analysis in planar linear elasticity // Comput. Methods Appl. Mech. Eng. – 2022. – **395**. – Art. 115034. – <https://doi.org/10.1016/j.cma.2022.115034>.
11. *Barber J. R.* Elasticity. – Cham: Springer, 2022. – xx + 637 p.
12. *Bracewell R. N.* The Fourier transform and its applications. – Boston: McGraw-Hill, 1999. – 616 p.
13. *Buryachenko V. A.* Micromechanics of heterogeneous materials. – New York: Springer, 2007. – xx + 687 p.
14. *Chen J.-S., Hillman M., Chi S.-W.* Meshfree methods: Progress made after 20 years // J. Eng. Mech. – 2017. – **143**, No. 4. – Art. 04017001.
 – [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0001176](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0001176).
15. *Chen Y. Z.* A survey of new integral equations in plane elasticity crack problem // Eng. Fract. Mech. – 1995. – **51**, No. 1. – P. 97–134.
 – [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)00229-B](https://doi.org/10.1016/0013-7944(94)00229-B).
16. *Crouch S. L.* Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. I. Infinite body solution // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1976. – **10**, No. 2. – P. 301–343. – <https://doi.org/10.1002/nme.1620100206>.
17. *Davies B.* Integral transforms and their applications. – New York: Springer, 2002. – xviii + 370 p.
18. *Debnath L., Bhatta D.* Integral transforms and their applications. – Boca Raton: Taylor & Francis / CRC Press, 2014. – 768 p.
19. *Denda M., Kosaka I.* Dislocation and point-force-based approach to the special Green's function BEM for elliptic hole and crack problems in two dimensions // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 1997. – **40**, No. 15. – P. 2857–2889.
 – [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19970815\)40:15<2857::AID-NME195>3.0.CO;2-3](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19970815)40:15<2857::AID-NME195>3.0.CO;2-3).
20. *England A. H.* Complex variable methods in elasticity. – New York: Wiley-Interscience, 1971. – 181 p.
21. *Geymonat G., Müller S., Triantafyllidis N.* Homogenization of nonlinearly elastic materials, microscopic bifurcation and macroscopic loss of rank-one convexity // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1993. – **122**. – P. 231–290.
 – <https://doi.org/10.1007/BF00380256>.
22. *Liu Y. J., Mukherjee S., Nishimura N., Schanz M., Ye W., Sutradhar A., Pan E., Dumont N. A., Frangi A., Sáez A.* Recent advances and emerging applications of the boundary element method // Appl. Mech. Rev. – 2011. – **64**, No. 3. – Art. 030802. – <https://doi.org/10.1115/1.4005491>.
23. *Love A. E. H.* A treatise on the mathematical theory of elasticity. – Cambridge: Cambridge University Press, 1927. – xviii+643 p.
24. *Lubarda M. V., Lubarda V. A.* Intermediate solid mechanics. – Cambridge: Cambridge University Press, 2020. – xiv+486 p.
25. *Muskhelishvili N. I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Gröningen: Noordhoff, 1953. – xxxi+704 p.
26. *Oane M., Mahmood M. A., Popescu A. C.* A state-of-the-art review on integral transform technique in laser–material interaction: Fourier and non-Fourier heat equations // Materials. – 2021. – **14**, No. 16. – Art. 4733.
 – <https://doi.org/10.3390/ma14164733>.
27. *Rekach V. G.* Manual of the theory of elasticity. – Moscow: Mir Publ., 1979. – 317 p.

28. Rychahivskyy A. V., Tokovyy Yu. V. Correct analytical solutions to the thermoelasticity problems in a semi-plane // *J. Thermal Stresses*. – 2008. – **31**, No. 11. – P. 1125–1145. – <https://doi.org/10.1080/01495730802250854>.
29. Sadd M. H. *Elasticity. Theory, applications, and numerics*. – Amsterdam: Elsevier, 2014. – 600 p.
30. Shakeriaski F., Ghodrat M., Escobedo-Diaz J., Behnia M. Recent advances in generalized thermoelasticity theory and the modified models: a review // *J. Comput. Des. Eng.* – 2021. – **8**, No. 1. – P. 15–35. – <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa082>.
31. Tahan N., Pavlović M. N., Kotsovos M. D. Annular sector plates under in-plane loading: general symbolic solution and its application to the collinear compression case // *J. Strain Anal.* – 2004. – **39**, No. 3 – P. 299–313. – <https://doi.org/10.1243/030932404323042722>.
32. Talreja R., Singh C. V. *Damage and failure of composite materials*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2012. – x+304 p.
33. Timoshenko S. P., Goodier J. N. *Theory of elasticity*. – New York: McGraw-Hill, 1969. – 567 p.
34. Tokovyy Y., Lozynskyy Y., Ma C.-C. Two-dimensional thermal stresses and displacements in an arbitrarily inhomogeneous elastic layer // *Appl. Mech. Mater.* – 2014. – **627**. – P. 141–144. – <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.627.141>.
35. Tokovyy Y. V., Ma C.-C. Analytical solutions to the planar non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for homogeneous and inhomogeneous annular domains // *Int. J. Eng. Sci.* – 2009. – **47**, No. 3. – P. 413–437. – <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2008.10.005>.
36. Tokovyy Y. V., Ma C.-C. Thermal stresses in anisotropic and radially inhomogeneous annular domains // *J. Thermal Stresses*. – 2008. – **31**, No. 9. – P. 892–913. – <https://doi.org/10.1080/01495730802194433>.
37. Tokovyy Y., Ma C.-C. *The direct integration method for elastic analysis of nonhomogeneous solids*. – Newcastle: Cambridge Scholars Publ., 2021. – xiii + 329 p.
38. Tokovyy Yu., Ma C.-C. Steady-state heat transfer and thermo-elastic analysis of inhomogeneous semi-infinite solids / in Vikhrenko V. S. (ed.) *Heat Conduction – Basic Research*. – Rijeka: InTech, 2011. – P. 249–268. – <https://doi.org/10.5772/28011>.
39. Tokovyy Y., Yuzvyak M. Spatial stress analysis in an elastic parallelepiped // *J. Mech.* – 2024. – **40**. – P. 625–643. – <https://doi.org/10.1093/jom/ufae049>.
40. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Govindjee S. *The finite element method. Its Basis and Fundamentals*. – Waltham: Butterworth-Heinemann, 2025. – 650 p. – <https://doi.org/10.1016/C2022-0-01494-X>.

SOLVING THE BASIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY FOR A STRIP VIA VIHAK'S FUNCTION

It is shown that the three basic boundary value problems of elasticity theory for a strip can be solved within a unified framework based on the method of direct integration, in which the sought components of the stress tensor and the displacement vector are expressed through Vihak's key function. Such a representation is advantageous for applications in problems on the optimization and stress-state control, as it provides a direct means of governing the components of the stress-strain state through a single function. It is further demonstrated that the integral equilibrium conditions, obtained by integrating the equilibrium equations while accounting for boundary effects (i.e., prescribed stresses in the case of the first basic problem or reactive stresses in the case of the second and third basic problems on the longitudinal sides of the strip), serve as an effective criterion for verifying the accuracy of computations in all three basic problems.

Key words: *elasticity, basic boundary value problems, analytical solutions, direct integration method, Vihak's function, integral conditions.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.02.24