

ПОЛІНОМІАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ РІВНЯНЬ ГАММЕРШТЕЙНА В ЗАДАЧАХ З ВІЛЬНОЮ ФАЗОЮ

Розглянуто інтегральні рівняння Гаммерштейна, що виникають у задачах з вільною фазою. Запропоновано метод аналітично-числового розв'язування таких рівнянь. В основу методу покладено властивість логарифмічної похідної полінома скінченного степеня, що дає змогу аналітично обчислювати аргумент функції та звести вихідне нелінійне інтегральне рівняння до розв'язання систем трансцендентних рівнянь малої розмірності. Наведено числові результати, які свідчать про можливість застосування запропонованого підходу до інтегральних рівнянь, що досліджуються.

Ключові слова: логарифмічна похідна від полінома, інтегральне рівняння Гаммерштейна, система інтегро-трансцендентних рівнянь.

Вступ. У 1930 році А. Hammerstein [17] ввів і дослідив новий тип інтегральних рівнянь, які використовують в численних практичних застосуваннях. Існування і єдиність розв'язку таких рівнянь були доведені у роботах [17, 18] за допомогою варіаційних методів (див. [21]). Останнім часом чисельні методи розв'язування рівнянь Гаммерштейна отримали широке застосування та розвиток. У роботі [19] було розроблено метод колокації, властивості якого досліджено в [20]. Повний огляд чисельних методів розв'язування рівнянь Гаммерштейна наведено в [10].

Рівняння Гаммерштейна виникає в задачах синтезу з вільною фазою (аргументом), що є предметом теорії та практики антенних систем. Тривалий час для розв'язування цього нелінійного інтегрального рівняння використовували ітераційні чисельні методи [1, 9, 12, 14]. У роботі [25] вперше застосовано скінченно-поліноміальний підхід до розв'язування рівняння Гаммерштейна синтезу лінійної антени та оцінено залежність степеня комплексного полінома в поданні розв'язку від додатного числового параметра, що міститься в ядрі рівняння. Для подання розв'язку в замкненому вигляді отримано систему трансцендентних рівнянь скінченної розмірності, яка визначається кількістю множників у поданні розв'язку. Нові числові результати на основі розв'язків цієї системи отримано в [22, 27]. Запропонований підхід поширено на рівняння Гаммерштейна, які виникають при синтезі антенних решіток [23, 24], і оцінено степінь тригонометричного полінома, через який подається розв'язок, залежно від кількості елементів в антенній решітці. У [15] підхід роботи [25] було поширено на випадок лінійної антени з нулями в розв'язку на інтервалі інтегрування. Залежність степеня полінома в поданні розв'язку в цьому випадку від числового параметра в ядрі та кількості дійсних нулів на інтервалі інтегрування уточнено в [16]. Строго обґрунтування запропонованого скінченно-поліноміального підходу наведено в [5, 26]. Подальші дослідження з отриманими числовими результатами опубліковано в [3, 7]. Нові розв'язки у випадку ізометричного оператора прямої електродинамічної задачі чисельно досліджено в [11].

Ядро рівняння Гаммерштейна, що розглядається, є симетричним. Коли задана підінтегральна функція є несиметричною на симетричному інтервалі інтегрування, то отримуються нові результати стосовно кількості розв'язків. Дослідження в цьому напрямку проводилися в [13].

Застосування скінченно-поліноміального зображення розв'язку виявилося ефективним для знаходження його точок галуження і відгалужених

[✉] top@iapmm.lviv.ua

розв'язків у точках біфуркації. Перші результати таких досліджень опубліковано в роботах [2, 4].

У цій статті для аналітичного знаходження аргументу комплексного полінома використано логарифмічну похідну полінома та її властивості. При такому підході інтегральні рівняння Гаммерштейна розв'язано в класі поліномів скінченного степеня. Комплексні корені поліномів є невідомими параметрами задачі. Розглянуто два типи рівнянь Гаммерштейна. У рівнянні *першого типу* модуль невідомої функції *не міститься* в підінтегральному виразі. У цьому випадку отримано системи трансцендентних рівнянь для знаходження невідомих параметрів у розв'язку, які є комплексними коренями розв'язувального полінома. Новизна полягає в тому, що модуль шуканої функції отримано в явному вигляді. У рівнянні *другого типу* невідомий модуль функції *міститься* в підінтегральному виразі. У цьому випадку для знаходження розв'язку отримано систему інтегро-трансцендентних рівнянь. У деяких часткових випадках інтегральним рівнянням цієї системи є лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду. Числові результати наведено для рівнянь першого типу.

Статтю організовано так. У **вступі** наведено огляд літератури за предметом досліджень і загальний огляд отриманих результатів. У **п. 1** наведено означення логарифмічної похідної полінома та показано її зв'язок із функцією аргументу. У **п. 2** запропоновано загальну методикку побудови систем трансцендентних рівнянь для знаходження комплексних коренів розв'язувального полінома. У **п. 3** результати **п. 2** узагальнено на випадок рівнянь зі складнішою нелінійністю. У **п. 4** встановлено рівняння для можливих точок розгалуження розв'язків у поліноміальному представленні, отриманих у двох попередніх **пунктах**. У **п. 5** наведено числові результати для рівнянь першого типу.

1. Логарифмічна похідна від полінома. Розглянемо поліном скінченного степеня $n \geq 1$:

$$P_n(v) = \sum_{k=0}^n a_k v^k, \quad (1)$$

де a_k – комплексні коефіцієнти полінома. Очевидно, що $a_n \neq 0$, а вираз (1) можна переписати у вигляді

$$P_n(v) = \prod_{k=1}^n (v - v_k), \quad (2)$$

де $v_k = v'_k + i v''_k$ є коренями полінома $P_n(v)$.

Функцію

$$\frac{P'_n(v)}{P_n(v)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{v - v_k} \quad (3)$$

називають логарифмічною похідною від полінома (2) [8].

На основі (3) розглянемо функцію

$$J_n(v) = \operatorname{Im} \left(\frac{P'_n(v)}{P_n(v)} \right). \quad (4)$$

Використовуючи (3) та (4), легко отримати

$$J_n(v) = \sum_{m=1}^n \frac{-v''_m}{(v - v'_m)^2 + (v''_m)^2}. \quad (5)$$

З іншої сторони, як показано в [8, ст. 7], функцію (4) можна подати у вигляді похідної від аргументу полінома (2):

$$J_n(v) = \frac{d}{dv} (\arg P_n(v)). \quad (6)$$

Кожен доданок у рівності (5) запишемо у вигляді

$$J_m(v) = \frac{-v''_m}{(v - v'_m)^2 + (v''_m)^2}. \quad (7)$$

Використовуючи (6) і (7), можемо отримати головну частину інтеграла:

$$\int J_m(v) dv = \int \frac{-v''_m}{(v - v'_m)^2 + (v''_m)^2} dv = \operatorname{arctg} \left(\frac{v - v'_m}{-v''_m} \right). \quad (8)$$

Ця формула дає можливість аналітично обчислювати аргументи поліномів скінченного степеня.

2. Системи трансцендентних рівнянь, що породжують розв'язки рівняння Гаммерштейна.

2.1. Випадок $n = 1$. Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння типу Гаммерштейна [1, ст. 25]

$$f(\zeta) = \int_{-1}^1 F(\zeta') K(c, \zeta, \zeta') e^{i \operatorname{arg} f(\zeta')} d\zeta', \quad (9)$$

де $F(\zeta')$ – задана неперервна невід'ємна функція на проміжку $[-1, 1]$, c – додатний дійсний параметр, а ядро $K(c, \zeta, \zeta')$ має вигляд

$$K(c, \zeta, \zeta') = \frac{\sin c(\zeta - \zeta')}{\pi(\zeta - \zeta')}.$$

Якщо функція $f(\zeta')$ така, що $e^{i \operatorname{arg} f(\zeta')} \equiv 1$ на проміжку $[-1, 1]$, то рівняння (9) має дійсний розв'язок

$$f(\zeta) = \int_{-1}^1 F(\zeta') K(c, \zeta, \zeta') d\zeta'. \quad (10)$$

Для отримання комплексного розв'язку використаємо поліном $P_1(\zeta)$ першого степеня (2). Розв'язок рівняння (9) шукаємо у вигляді

$$f(\zeta) = |f(\zeta)| e^{i \operatorname{arg} P_1(\zeta)}. \quad (11)$$

Щоб подати $e^{i \operatorname{arg} P_1(\zeta)}$ через корені полінома, використаємо формули

$$\cos \operatorname{arctg} x = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (12)$$

$$\sin \operatorname{arctg} x = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \in (-\infty, \infty). \quad (13)$$

Враховуючи (12), (13) та (8), отримаємо

$$\cos \operatorname{arctg} \frac{\zeta - v'_1}{-v''_1} = \frac{|v''_1|}{\sqrt{(\zeta - v'_1)^2 + (v''_1)^2}}, \quad (14)$$

$$\sin \operatorname{arctg} \frac{\zeta - v'_1}{-v''_1} = \frac{\operatorname{sgn}(-v''_1)(\zeta - v'_1)}{\sqrt{(\zeta - v'_1)^2 + (v''_1)^2}}. \quad (15)$$

Інтегральне рівняння (9) у цьому випадку за допомогою формул (11), (14) і (15) перепишемо у вигляді

$$|f(\zeta)| \Phi_1(\zeta) = \int_{-1}^1 F(\zeta') K(c, \zeta, \zeta') \Phi_1(\zeta') d\zeta', \quad (16)$$

$$\text{де } \Phi_1(\zeta) = \frac{|v_1''|}{\sqrt{(\zeta - v_1')^2 + (v_1'')^2}} + i \frac{\text{sgn}(-v_1'')(\zeta - v_1')}{\sqrt{(\zeta - v_1')^2 + (v_1'')^2}}.$$

Помноживши ліву та праву частини рівняння (16) на функцію $\bar{\Phi}_1(\zeta)$, комплексно-спряжену до функції $\Phi_1(\zeta)$, отримаємо

$$|f(\zeta)| \Phi_1(\zeta) \bar{\Phi}_1(\zeta) = \int_{-1}^1 F(\zeta') K(c, \zeta, \zeta') \Phi_1(\zeta') \bar{\Phi}_1(\zeta) d\zeta'. \quad (17)$$

Виділивши в (17) дійсну частину, отримуємо вираз для знаходження $|f(\zeta)|$:

$$|f(\zeta)| = \int_{-1}^1 F(\zeta') K(c, \zeta, \zeta') \text{Re}[\Phi_1(\zeta') \bar{\Phi}_1(\zeta)] d\zeta'. \quad (18)$$

Виділивши уявну частину, отримаємо

$$\text{Im}[\Phi_1(\zeta') \bar{\Phi}_1(\zeta)] = \frac{|v_1''| \text{sgn}(v_1'')(\zeta - \zeta')}{\alpha_1(\zeta) \alpha_1(\zeta')}, \quad (19)$$

де $\alpha_1(\zeta) = \sqrt{(\zeta - v_1')^2 + (v_1'')^2}$. Використовуючи (19), маємо

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 F(\zeta') \sin c(\zeta - \zeta') \frac{|v_1''| \text{sgn}(v_1'')}{\alpha_1(\zeta) \alpha_1(\zeta')} d\zeta' = 0. \quad (20)$$

З огляду на формулу

$$\sin c(\zeta - \zeta') = \sin c\zeta \cos c\zeta' - \cos c\zeta \sin c\zeta', \quad (21)$$

із (20), враховуючи, що уявна частина в лівій частині (17) дорівнює нулеві, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\sin c\zeta}{\alpha_1(\zeta)} \int_{-1}^1 F(\zeta') \cos c\zeta' \frac{|v_1''| \text{sgn}(v_1'')}{\alpha_1(\zeta')} d\zeta' - \\ - \frac{\cos c\zeta}{\alpha_1(\zeta)} \int_{-1}^1 F(\zeta') \sin c\zeta' \frac{|v_1''| \text{sgn}(v_1'')}{\alpha_1(\zeta')} d\zeta' = 0. \end{aligned}$$

Оскільки функції $\sin c\zeta$ і $\cos c\zeta$ є лінійно незалежними і $\alpha_1(\zeta) > 0$, отримуємо систему трансцендентних рівнянь для визначення дійсної v_1' та уявної v_1'' частин полінома $P_1(\zeta)$ (2):

$$\int_{-1}^1 F(\zeta') \cos c\zeta' \frac{|v_1''| \text{sgn}(v_1'')}{\alpha_1(\zeta')} d\zeta' = 0, \quad (22)$$

$$\int_{-1}^1 F(\zeta') \sin c\zeta' \frac{|v_1''| \text{sgn}(v_1'')}{\alpha_1(\zeta')} d\zeta' = 0. \quad (23)$$

Модуль розв'язку рівняння (9) можна визначити за формулою (18).

Обчислення значення полінома $P_1(\zeta)$, згідно з (2), дає змогу визначити функцію $e^{i \arg f(\zeta)}$. І, нарешті, розв'язок рівняння (9) знаходимо за формулою (11) з використанням (18).

2.2. Випадок $n = 2$. Розглянемо випадок полінома другого степеня $P_2(\zeta)$ в (2). Розв'язок рівняння (9) подаємо у вигляді

$$f(\zeta) = |f(\zeta)| e^{i \arg P_2(\zeta)}. \quad (24)$$

Враховуючи (8), запишемо

$$\begin{aligned}\Phi_2(\zeta) &= e^{i \sum_{m=1}^2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\zeta - v'_m}{-v''_m}\right)} = \cos\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\zeta - v'_1}{-v''_1}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\zeta - v'_2}{-v''_2}\right)\right) + \\ &+ i \sin\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{\zeta - v'_1}{-v''_1}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{\zeta - v'_2}{-v''_2}\right)\right).\end{aligned}\quad (25)$$

Із (25), використовуючи (21) і відому формулу

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$

отримуємо

$$\begin{aligned}\Phi_2(\zeta) &= \frac{|v''_1|}{\alpha_1(\zeta)} \frac{|v''_2|}{\alpha_2(\zeta)} - \frac{\operatorname{sgn}(-v''_1)(\zeta - v'_1)}{\alpha_1(\zeta)} \frac{\operatorname{sgn}(-v''_2)(\zeta - v'_2)}{\alpha_2(\zeta)} + \\ &+ i \left(\frac{\operatorname{sgn}(-v''_1)(\zeta - v'_1)}{\alpha_1(\zeta)} \frac{|v''_2|}{\alpha_2(\zeta)} + \frac{|v''_1|}{\alpha_1(\zeta)} \frac{\operatorname{sgn}(-v''_2)(\zeta - v'_2)}{\alpha_2(\zeta)} \right),\end{aligned}$$

де $\alpha_2(\zeta) = \sqrt{(\zeta - v'_2)^2 + (v''_2)^2}$. Тут v_1 і v_2 – комплексні корені многочлена (2) другого степеня. Аналогічно, як у випадку $n = 1$, перепишемо рівняння (9) у вигляді

$$|f(\zeta)|\Phi_2(\zeta) = \int_{-1}^1 F(\zeta')K(c, \zeta, \zeta')\Phi_2(\zeta')d\zeta'. \quad (26)$$

Помноживши ліву та праву частини рівняння (26) на $\bar{\Phi}_2(\zeta)$ і виділивши дійсну частину, отримаємо вираз для знаходження модуля шуканого розв'язку:

$$|f(\zeta)| = \int_{-1}^1 F(\zeta')K(c, \zeta, \zeta')\operatorname{Re}[\Phi_2(\zeta')\bar{\Phi}_2(\zeta)]d\zeta', \quad (27)$$

а виділяючи уявну частину, отримуємо значення виразу

$$\operatorname{Im}[\Phi_2(\zeta')\bar{\Phi}_2(\zeta)] = \frac{(\zeta - \zeta')\zeta\beta_1(\zeta', v_1, v_2) + (\zeta - \zeta')\beta_2(\zeta', v_1, v_2)}{\alpha_1(\zeta)\alpha_1(\zeta')\alpha_2(\zeta)\alpha_2(\zeta')},$$

де

$$\begin{aligned}\beta_1(\zeta', v_1, v_2) &= \operatorname{sgn}(v''_1)|v''_1|(\zeta' - v'_2) + \operatorname{sgn}(v''_2)|v''_2|(\zeta' - v'_1), \\ \beta_2(\zeta', v_1, v_2) &= \operatorname{sgn}(v''_1)|v''_1|\left(|v''_2|^2 - v'_2(\zeta' - v'_2)\right) + \\ &+ \operatorname{sgn}(v''_2)|v''_2|\left(|v''_1|^2 - v'_1(\zeta' - v'_1)\right).\end{aligned}$$

Подібно, як у випадку $n = 1$, враховуючи лінійну незалежність функцій $\sin c\zeta$, $\cos c\zeta$, $\zeta \sin c\zeta$ і $\zeta \cos c\zeta$, а також те, що $\alpha_1(\zeta) > 0$ і $\alpha_2(\zeta) > 0$, отримуємо систему трансцендентних рівнянь для визначення параметрів v'_1 , v''_1 , v'_2 , v''_2 :

$$\int_{-1}^1 F(\zeta') \cos c\zeta' \frac{\beta_1(\zeta', v_1, v_2)}{\alpha_1(\zeta')\alpha_2(\zeta')} d\zeta' = 0, \quad (28)$$

$$\int_{-1}^1 F(\zeta') \sin c\zeta' \frac{\beta_1(\zeta', v_1, v_2)}{\alpha_1(\zeta')\alpha_2(\zeta')} d\zeta' = 0, \quad (29)$$

$$\int_{-1}^1 F(\zeta') \cos c\zeta' \frac{\beta_2(\zeta', v_1, v_2)}{\alpha_1(\zeta')\alpha_2(\zeta')} d\zeta' = 0, \quad (30)$$

$$\int_{-1}^1 F(\zeta') \sin c\zeta' \frac{\beta_2(\zeta', v_1, v_2)}{\alpha_1(\zeta')\alpha_2(\zeta')} d\zeta' = 0. \quad (31)$$

Знайдені корені $v_1 = v_1' + iv_1''$ і $v_2 = v_2' + iv_2''$ полінома з (28)–(31) використовуються для визначення аргументу (фази) розв'язку рівняння. Модуль розв'язку обчислюємо за формулою (27). Аналогічно, як і для випадку $n = 1$, розв'язок рівняння (9) визначаємо за формулою (24).

3. Узагальнення на рівняння інших видів. Інші типи рівнянь Гаммерштейна виникають також у застосуваннях теорії обернених задач з вільною фазою і мають вигляд

$$f(\zeta) = \int_{-1}^1 w(F(\zeta'), |f(\zeta')|) \frac{\sin c(\zeta - \zeta')}{\pi(\zeta - \zeta')} e^{i \arg f(\zeta')} d\zeta'. \quad (32)$$

Тут $F(\zeta')$ – задана невід'ємна функція, а функція $w(F(\zeta'), |f(\zeta')|)$ є диференційовною за $|f|$. Зокрема, функція w може мати вигляд [1]

$$w(F(\zeta'), |f(\zeta')|) = F(\zeta') - |f(\zeta')|. \quad (33)$$

Застосовуючи міркування попереднього пункту, розв'язування рівняння (32) при $n = 1$ зводимо до системи інтегро-трансцендентних рівнянь

$$|f(\zeta)| = \int_{-1}^1 w(F(\zeta'), |f(\zeta')|) K(c, \zeta, \zeta') \operatorname{Re} [\Phi_1(\zeta') \bar{\Phi}_1(\zeta)] d\zeta', \quad (34)$$

$$\int_{-1}^1 w(F(\zeta'), |f(\zeta')|) \cos c\zeta' \frac{|v_1''| \operatorname{sgn}(v_1'')}{\alpha_1(\zeta')} d\zeta' = 0, \quad (35)$$

$$\int_{-1}^1 w(F(\zeta'), |f(\zeta')|) \sin c\zeta' \frac{|v_1''| \operatorname{sgn}(v_1'')}{\alpha_1(\zeta')} d\zeta' = 0. \quad (36)$$

При $n = 2$ в (2) необхідно розв'язати систему рівнянь

$$|f(\zeta)| = \int_{-1}^1 w(F(\zeta'), |f(\zeta')|) K(c, \zeta, \zeta') \operatorname{Re} [\Phi_2(\zeta') \bar{\Phi}_2(\zeta)] d\zeta', \quad (37)$$

$$\int_{-1}^1 w(F(\zeta'), |f(\zeta')|) \cos c\zeta' \frac{\beta_1(\zeta', v_1, v_2)}{\alpha_1(\zeta')\alpha_2(\zeta')} d\zeta' = 0, \quad (38)$$

$$\int_{-1}^1 w(F(\zeta'), |f(\zeta')|) \sin c\zeta' \frac{\beta_1(\zeta', v_1, v_2)}{\alpha_1(\zeta')\alpha_2(\zeta')} d\zeta' = 0, \quad (39)$$

$$\int_{-1}^1 w(F(\zeta'), |f(\zeta')|) \cos c\zeta' \frac{\beta_2(\zeta', v_1, v_2)}{\alpha_1(\zeta')\alpha_2(\zeta')} d\zeta' = 0, \quad (40)$$

$$\int_{-1}^1 w(F(\zeta'), |f(\zeta')|) \sin c\zeta' \frac{\beta_2(\zeta', v_1, v_2)}{\alpha_1(\zeta')\alpha_2(\zeta')} d\zeta' = 0. \quad (41)$$

Важливо зазначити, що для функції w , яка визначена формулою (33), перші рівняння в системах (34)–(36) і (37)–(41) є лінійними інтегральними рівняннями Фредгольма другого роду відносно шуканої функції $|f|$, на від-

міну від випадку $n = 1$ (див. п. 2.1), де модуль шуканої функції визначається в явному вигляді (за формулою (18)).

4. Рівняння на можливі точки галуження. Кількість розв'язків рівняння (32) може змінюватись залежно від значення додатного параметра c . Різні ізольовані розв'язки можуть існувати при однакових значеннях c . Якщо при $c_0 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, існує локально єдиний розв'язок f_0 , а при $c_0 + \varepsilon$ існують принаймні два розв'язки f_0 і f_1 і виконується умова $\lim_{c \rightarrow +c_0} |f_0| = |f_1|$,

тоді значення c_0 є точкою галуження f_0 .

Для знаходження можливих точок розгалуження розв'язків рівняння (32), згідно з [12], отримуємо системи однорідних рівнянь

при $n = 1$:

$$\begin{aligned} \lambda_m w_m |f| &= \int_{-1}^1 [w(F, |f|)K(c, \zeta, \zeta') \operatorname{Im}(\Phi_1, \bar{\Phi}_1)v_m + \\ &+ w'(F, |f|)|f|K(c, \zeta, \zeta') \operatorname{Re}(\Phi_1, \bar{\Phi}_1)w_m] d\zeta', \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \lambda_m v_m |f| &= \int_{-1}^1 [w(F, |f|)K(c, \zeta, \zeta') \operatorname{Re}(\Phi_1, \bar{\Phi}_1)v_m + \\ &+ w'(F, |f|)|f|K(c, \zeta, \zeta') \operatorname{Im}(\Phi_1, \bar{\Phi}_1)w_m] d\zeta', \end{aligned} \quad (43)$$

при $n = 2$:

$$\begin{aligned} \lambda_m w_m |f| &= \int_{-1}^1 [w(F, |f|)K(c, \zeta, \zeta') \operatorname{Im}(\Phi_2, \bar{\Phi}_2)v_m + \\ &+ w'(F, |f|)|f|K(c, \zeta, \zeta') \operatorname{Re}(\Phi_2, \bar{\Phi}_2)w_m] d\zeta', \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \lambda_m v_m |f| &= \int_{-1}^1 [w(F, |f|)K(c, \zeta, \zeta') \operatorname{Re}(\Phi_2, \bar{\Phi}_2)v_m + \\ &+ w'(F, |f|)|f|K(c, \zeta, \zeta') \operatorname{Im}(\Phi_2, \bar{\Phi}_2)w_m] d\zeta'. \end{aligned} \quad (45)$$

Тут $\{v_m, w_m\}$ – вектор власних функцій систем (42), (43) або (44), (45), а $w'(F, |f|) = \frac{\partial w}{\partial |f|}$. Можливими точками розгалуження є такі значення параметра c , при яких власне значення $\lambda_m = 1$ є кратним. Легко бачити, що $\lambda_1 = 1$, і $\{v_1 = 1, w_1 = 0\}$ завжди є власною парою рівнянь (42), (43) або (44), (45).

5. Числові результати. Обчислення виконано, коли задано функцію $F(\zeta) = 1$. Систему рівнянь (22), (23) розв'язували чисельно. Для малих значень параметра c у ядрі ($0 < c < c_1$) існує лише дійсний розв'язок (10) рівняння (9). При $c = c_1$ комплексний розв'язок відгалужується від дійсного з появою полінома першого степеня з чисто уявним коренем $v_1 = iv_1''$. В межах зміни параметра c : ($c_2 < c < c_5$) існує два таких розв'язки. Обидва розв'язки стають однаковими в точці $c = c_5$ (крива **I** на рис. 1). Якщо значення параметра c належать до інтервалу $c_5 < c < c_3$, розв'язку такого типу не існує. Він знову відгалужується від дійсного розв'язку при значенні параметра $c = c_3$ і має ті самі властивості в межах зміни параметра c :

($c_4 < c < c_6$) (крива 2 на рис. 1). Можливість існування такого типу розв'язків було встановлено ще в [6], і точки галуження задовольняють рівняння

$$\int_{-1}^1 F(\xi) \cos(c\xi) d\xi = 0. \quad (46)$$

Як видно на рис. 1, у точках галуження $c_1 = \pi$ і $c_3 = 3\pi$ розв'язку (10) уявне значення кореня v_1'' виникає з нескінченності. А вже в точках $c_1 = 2\pi$ і $c_3 = 4\pi$ значення v_1'' зникає на нескінченності. Очевидно, що й корінь $v_1 = -iv_1''$ також задовольняє систему трансцендентних рівнянь (22), (23).

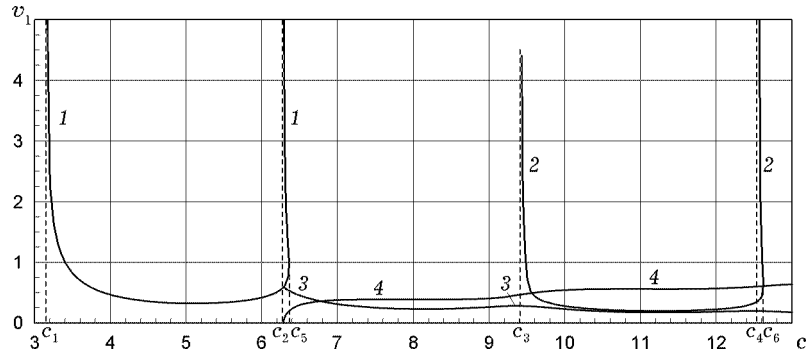


Рис. 1. Дійсна й уявна частина коренів розв'язувального полінома першого степеня для заданої $F(\zeta) = 1$.

Існує інший тип комплексних розв'язків системи (22), (23) з відмінною від нуля дійсною частиною. Значення дійсної v_1' й уявної v_1'' частин комплексних коренів $v_1 = v_1' + iv_1''$ також наведено на рис. 1 (криві 4 і 3, відповідно). Поряд з цим розв'язком існує розв'язок $v_1 = -v_1' + iv_1''$, який на рис. 1 не наведено. Такий тип розв'язків існує при всіх значеннях параметра $c > c_2$. Як бачимо на рис. 1, розв'язки з $v_1 = v_1' + iv_1''$ відгалужуються в точці $c = c_2$ від розв'язків з $v_1 = iv_1''$.

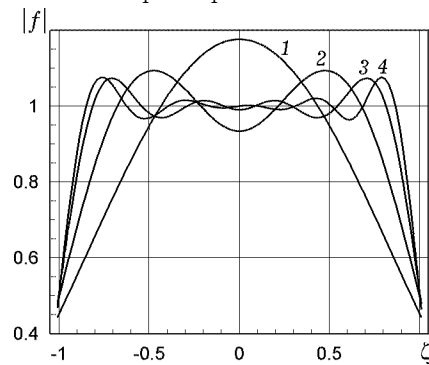


Рис. 2. Модулі розв'язків $|f|$ при різних значеннях c та v_1 для заданої $F(\zeta) = 1$.

На рис. 2 зображено обчислені за формулою (18) значення модулів $|f|$ отриманих розв'язків рівняння (9) при заданих значеннях параметра c і коренях $v_1 = v_1' + iv_1''$. Криві 1–4 відповідають таким значенням c та v_1 :

$$\begin{aligned} 1 - c = 3.15, \quad v_1 = 0 + i6.1297; & \quad 2 - c = 6, \quad v_1 = 0 + i0.4201; \\ 3 - c = 10, \quad v_1 = 0 + i0.2789; & \quad 4 - c = 13, \quad v_1 = 0.64 + i0.1799. \end{aligned}$$

Для оцінки наближення $F(\zeta)$ розв'язком $|f|$ виберемо середньоквадратичне відхилення:

$$\int_{-1}^1 (F(\xi) - |f(\xi)|)^2 d\xi. \quad (47)$$

Кривим **1-4** на рис. 2 відповідають такі значення відхилень (47):

$$1 - 0.1148, \quad 2 - 0.0468, \quad 3 - 0.0219, \quad 4 - 0.0163.$$

Як видно на рис. 2, модуль знайденого розв'язку краще наближає задану функцію $F(\zeta) = 1$ при зростанні параметра s . Це свідчить про те, що якість апроксимації функції F покращується при зростанні параметра s . Ця властивість підтверджується також числовими результатами, отриманими в [1].

Модулі розв'язків є симетричними відносно вертикальної осі при уявному корені розв'язувального полінома (криві **1-3**). Якщо ж корінь є комплексним з відмінною від нуля дійсною частиною, властивість симетричності втрачається (крива **4**).

Для порівняння було пораховано дійсний розв'язок за формулою (10) і для заданої функції $F(\zeta) = 1$. Результати обчислень подано на рис. 3. Кривим **1-4** відповідають такі значення s :

$$1 - s = 3.15, \quad 2 - s = 6, \quad 3 - s = 10, \quad 4 - s = 13.$$

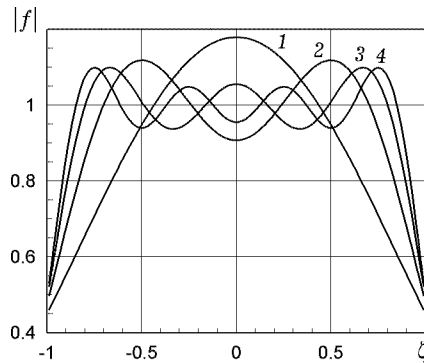


Рис. 3. Модулі дійсних розв'язків (10) при різних значеннях s для заданої $F(\zeta) = 1$.

Кривим **1-4** на рис. 3 відповідають такі значення середньоквадратичних відхилень за формулою (47):

$$1 - 0.1164, \quad 2 - 0.0518, \quad 3 - 0.0301, \quad 4 - 0.0222.$$

Отже, комплексні розв'язки є кращими в сенсі похибки (47).

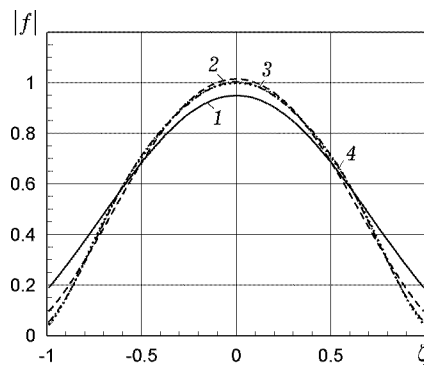


Рис. 4. Модулі дійсних розв'язків (10) при різних значеннях s для заданої $F(\zeta) = \cos(\pi\zeta/2)$.

Обчислення також виконано для заданої функції $F(\zeta) = \cos(\pi\zeta/2)$. Результати розрахунків дійсного розв'язку (10) для тих самих значень параметра c , що й на рис. 3, показано на рис. 4.

Кривим **1-4** на рис. 4 відповідають такі значення середньоквадратичних відхилень за формулою (47):

$$1 - 0.0083, \quad 2 - 0.0011, \quad 3 - 0.00016, \quad 4 - 0.000071.$$

Можливі точки галуження дійсного розв'язку (10) для заданої функції $F(\zeta) = \cos(\pi\zeta/2)$ знаходили за формулою (46). Першою можливою точкою галуження є значення $c_1 = 3\pi/2$. Числовими розрахунками було підтверджено, що в цій точці від дійсного розв'язку відгалужується комплексний поліноміальний розв'язок першого степеня з чисто уявним коренем. Цей уявний корінь $v_1'' = v_1''(c)$ задовольняє рівняння

$$\int_{-1}^1 \cos(\pi\zeta'/2) \cos c\zeta' \frac{|v_1''| \operatorname{sgn}(v_1'')}{\sqrt{(\zeta')^2 - (v_1'')^2}} d\zeta' = 0. \quad (48)$$

Формула (48) є наслідком системи рівнянь (22), (23), оскільки з огляду на непарність підінтегрального виразу в (23) значення інтеграла тотожно дорівнює нулеві. При числовому дослідженні рівняння (48) встановлено, що рівність нулю досягається не при будь-яких значеннях c . Числові результати знаходження нулів рівняння (48) наведено на рис. 5.

Функція $v_1'' = v_1''(c)$, яка є розв'язком (48) та існує на проміжку (c_1, c_3) , є чисто уявним коренем розв'язувального полінома рівняння (9), що відгалужується від дійсного розв'язку (10) в точці c_1 (крива **1** на рис. 5). Розв'язок системи (22), (23) з комплексним коренем $v_1 = v_1' + i v_1''$ також зображено на рис. 5 (крива **2** – дійсна частина, крива **3** – уявна частина). Цей корінь в точці c_2 відгалужується від поліноміального подання розв'язку з чисто уявним коренем.

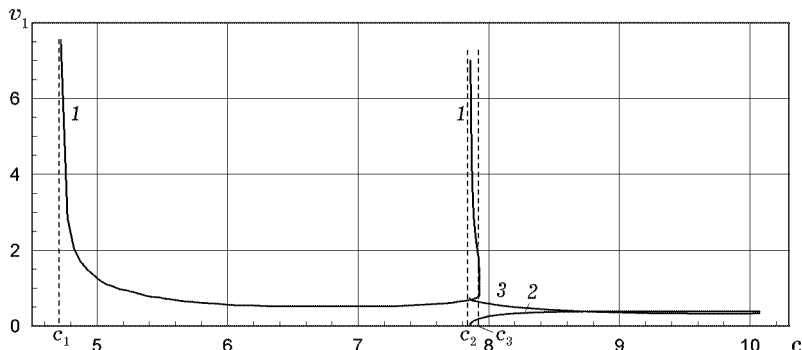


Рис. 5. Дійсна й уявна частина коренів розв'язувального полінома першого степеня для заданої $F(\zeta) = \cos(\pi\zeta/2)$.

Для обчислених значень коренів розв'язувального комплексного полінома пораховано модулі знайденого розв'язку, які зображено на рис. 6 та рис. 7.

Криві **1-3** відповідають таким значенням c та v_1 :

$$1 - c = 5, \quad v_1 = 0 + i1.2; \quad 2 - c = 6, \quad v_1 = 0 + i0.56;$$

$$3 - c = 7, \quad v_1 = 0 + i0.5258.$$

Відповідно середньоквадратична похибка (47) має такі значення:

$$1 - 0.0018, \quad 2 - 0.00056, \quad 3 - 0.00069.$$

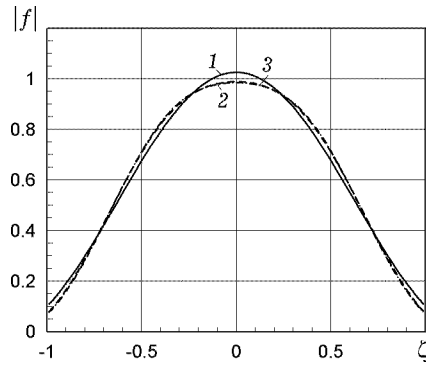


Рис. 6. Модулі розв'язків (10) при різних значеннях c та уявних v_1 для заданої $F(\zeta) = \cos(\pi\zeta/2)$.

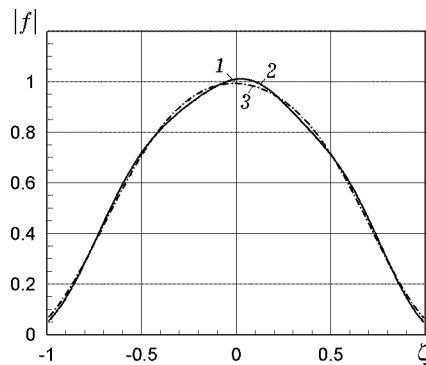


Рис. 7. Модулі розв'язків (10) при різних значеннях c та комплексних v_1 для заданої $F(\zeta) = \cos(\pi\zeta/2)$.

Криві 1–3 відповідають таким значенням c та v_1 :

$$\begin{aligned} 1 - c = 8, \quad v_1 = 0.26 + i0.59; \quad 2 - c = 9, \quad v_1 = 0.39 + i0.35; \\ 3 - c = 10, \quad v_1 = 0.39 + i0.33. \end{aligned}$$

Відповідно середньоквадратична похибка (47) має такі значення:

$$1 - 0.00035, \quad 2 - 0.00021, \quad 3 - 0.00028.$$

Тут комплексний розв'язок при порохованих значеннях c кращий ніж чисто уявний в сенсі (47).

Висновки. В роботі отримано системи трансцендентних рівнянь для коренів розв'язувального полінома та систему інтегро-трансцендентних рівнянь для цих коренів і модуля невідомої функції в зображенні розв'язків інтегральних рівнянь Гаммерштейна. Для отримання цієї системи використано властивості логарифмічної похідної від полінома. Виведено систему рівнянь для можливих точок розгалуження розв'язку. Процес галуження виникає при зростанні характерного числового параметра c в ядрі отриманих систем.

Отриману систему трансцендентних рівнянь розв'язано чисельно для випадку $n = 1$. Модуль невідомої функції знайдено в явному вигляді. Для визначення фази розв'язку виведено просту систему трансцендентних рівнянь. Числові результати підтверджують ефективність запропонованого підходу і не суперечать чисельним результатам, отриманим раніше з використанням ідей роботи [25]. Підхід можна узагальнити на інтегральні рівняння Гаммерштейна з іншою формою ядра.

Запропонований спосіб отримання розв'язку нелінійних інтегральних рівнянь типу Гаммерштейна є новим і ґрунтується на ідеях, викладених в монографії [12]. Тут вперше використана логарифмічна похідна від поліно-

ма для отримання розв'язувальних трансцендентних і інтегро-трансцендентних рівнянь. На відміну від результатів [12], модуль шуканого розв'язку визначається безпосередньо в квадратурах і не потрібно проводити додатково допоміжних обчислень.

1. Андрийчук М. И., Войтович Н. Н., Савенко П. А., Ткачук В. П. Синтез антен по амплитудной диаграмме направленности. Численные методы и алгоритмы. – Киев: Наук. думка, 1993. – 256 с.
2. Булацик О. О. Дослідження галужень розв'язків нелінійного інтегрального рівняння модифікованої фазової проблеми у випадку дискретного перетворення Фур'є // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. інформ. – 2003. – Вип. 7. – С. 20–32.
3. Булацик О. О., Войтович М. М. Аналітичне зображення розв'язків нелінійного інтегрального рівняння задачі наближення фінітних функцій з вільною фазою функціями з фінітним дискретним спектром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 2. – С. 55–63.
4. Булацик О. О., Войтович М. М., Гісь О. М. Галуження розв'язків нелінійних рівнянь у модифікованій фазовій проблемі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – **45**, № 2. – С. 64–74.
5. Войтович М. М., Гісь О. М., Тополук Ю. П. Середньоквадратична апроксимація фінітних функцій з вільною фазою функціями з фінітним спектром // Доп. НАН України. – 1999. – № 3. – С. 7–10.
6. Войтович Н. Н., Савенко П. А. Об одном интегральном уравнении теории синтеза антен // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1975. – Вып. 2. – С. 161–163.
7. Гісь О. М., Тополук Ю. П. Середньоквадратичне наближення невід'ємних фінітних функцій модулем функцій з фінітним спектром (випадок занулення апроксиманти на носії фінітної функції) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44**, № 2. – С. 48–54.
8. Мелкумян О. Д. Анализ систем методом логарифмической производной. – Москва: Энергоиздат, 1981. – 112 с.
9. Савенко П. О. Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем (теорія і методи розв'язування). – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2002. – 320 с.
10. Atkinson K. E. A survey of numerical methods for solving nonlinear integral equations // J. Integr. Equat. Appl. – 1992. – **4**, No. 1. – P. 15–46.
– <https://doi.org/10.1216/jiea/1181075664>.
11. Bulatsyk O. O., Gis O. M., Voitovich N. N. Some peculiar properties of solutions of the generalized phase problem // Proc. of VI Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2001), September 18–20, 2001, Lviv, Ukraine. – Lviv, 2001. – P. 38–41.
12. Bulatsyk O. O., Katsenelenbaum B. Z., Topolyuk Yu. P., Voitovich N. N. Phase optimization problems: Applications in wave field theory. – Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2010. – x+309 p.
– <https://doi.org/10.1002/9783527629824>.
13. Bulatsyk O. O., Voitovich N. N. Modified phase problem with nonsymmetrical data // Proc. of VII Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-2002), October 10–13, 2002, Tbilisi, Georgia. – Lviv–Tbilisi, 2002. – P. 137–141.
14. Fienup J. R. Phase retrieval algorithms: a comparison // Appl. Optics. – 1982. – **21**, No. 15. – P. 2758–2769. – <https://doi.org/10.1364/AO.21.002758>.
15. Gis O. M. Some new vanishing solutions of linear antenna synthesis problem according to prescribed amplitude radiation pattern // Proc. of III Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-1998), November 2–5, 1998, Tbilisi, Georgia. – Lviv–Tbilisi, 1998. – P. 72–75.
16. Gis O. M., Topolyuk Yu. P. Closed vanishing solution of the nonlinear problems of the antenna synthesis // Proc. of IV Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-1999), September 20–23, 1999, Lviv, Ukraine. – Lviv, 1999. – P. 75–79.
17. Hammerstein A. Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen // Acta Math. – 1930. – **54**. – P. 117–176. – <https://doi.org/10.1007/BF02547519>.
18. Iglisch R. Existenz- und Eindeutigkeitsätze bei nichtlineare Integralgleichungen // Math. Ann. – 1933. – **108**. – S. 161–189. – <https://doi.org/10.1007/BF01452830>.

19. Kumar S. Superconvergence of a collocation-type method for Hammerstein equations // IMA J. Numer. Anal. – 1987. – 7, No. 3. – P. 313–325.
– <https://doi.org/10.1093/imanum/7.3.313>.
20. Kumar S., Sloan I. H. A new collocation-type method for Hammerstein equations // Math. Comput. – 1987. – 48, No. 178. – P. 585–593.
21. Lardy L. J. A variation of Nyström's method for Hammerstein equations // J. Integr. Equat. – 1981. – 3, No. 1. – P. 43–60.
– <https://www.jstor.org/stable/26164052>.
22. Voitovich N. N., Gis O. M., Reshnyak O. O., Topolyuk Yu. P. New rigorous solution of some antenna synthesis problems according to prescribed amplitude radiation pattern // Proc. of Int. Conf. on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, June 2–5, 1998, Kharkiv, Ukraine. – Kharkiv, 1998. – Vol. 2. – P. 133–135.
23. Voitovich N. N., Reshnyak O. O. Closed solutions of a nonlinear integral equation arisen in the antenna arrays synthesis theory // Proc. of III Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-1998), November 2–5, 1998, Tbilisi, Georgia. – Lviv–Tbilisi, 1998. – P. 67–71.
24. Voitovich N. N., Reshnyak O. O. Solutions of nonlinear integral equation of synthesis of the linear antenna arrays // J. Appl. Electromagnetism (BSUAE). – 1999. – 2, No. 1. – P. 43–52.
25. Voitovich N. N., Topolyuk Yu. P. Antenna synthesis according to prescribed amplitude radiation pattern and the phase problem // Proc. of II Int. Seminar/Workshop on Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory (DIPED-1997), September 26–29, 1997, Lviv, Ukraine. – Lviv, 1997. – P. 90–92.
26. Voitovich N. N., Topolyuk Yu. P., Reshnyak O. O. Approximation of compactly supported functions with free phase by functions with bounded spectrum // In: A. G. Ramm, P. N. Shivakumar, A. V. Strauss (eds). Operator Theory and Its Applications. – Fields Institute Communications, AMS, 2000. – Vol. 25. – P. 531–541. – <https://doi.org/10.1090/fic/025>.
27. Voitovich N. N., Topolyuk Yu. P., Reshnyak O. O., Jarkowski J. New closed solution of the linear antenna synthesis problem according to amplitude radiation pattern // Proc. of 12th Int. Conference on Microwave & Radar, May 20–22, 1998, Krakow, Poland. – Kraków, 1998. – Vol. 2. – P. 304–308.

POLYNOMIAL SOLUTIONS OF HAMMERSTEIN EQUATIONS IN PROBLEMS WITH FREE PHASE

Hammerstein integral equations are considered with concern to the problems with a free phase. A method of analytical-numerical solving for such equations is proposed. The method is based on the property of the logarithmic derivative of a finite degree polynomial, which allows to analytically calculate the argument of the function and to reduce the original nonlinear integral equation to the solution of systems of small dimension transcendental equations. The presented numerical results confirm the possibility of applying the proposed approach to the integral equations under study.

Key words: *logarithmic derivative of a polynomial, Hammerstein integral equation, system of integral-transcendental equations.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів

Одержано
04.11.24