УДК 517.946+511.37

В. С. Ільків, Н. І. Страп, І. І. Волянська[✉]

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ДВОТОЧКОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ З ПАРАМЕТРОМ У НЕЛОКАЛЬНИХ УМОВАХ В УТОЧНЕНІЙ СОБОЛЄВСЬКІЙ ШКАЛІ

Досліджено нелокальну крайову задачу для диференціального рівняння з параметром. Встановлено умови розв'язності цієї задачі в просторах Хермандера, які утворюють уточнену соболєвську шкалу функцій однієї дійсної змінної. Розглядувана задача є коректною за Адамаром. Знаменники, які виникають при побудові розв'язку, не є малими і оцінюються знизу деякими додатними сталими.

Ключові слова: *рівняння з частинними похідними, нелокальна задача, простори Хермандера.*

Вступ. У теорії рівнянь з частинними похідними важливим є питання про розв'язність некоректних задач, зокрема нелокальних крайових задач для різних типів рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними. У загальному випадку їхня розв'язність залежить від проблеми малих знаменників, які виникають при побудові загального розв'язку [1, 2, 7, 12, 13, 18, 21]. Коректність нелокальних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними досліджувалися у роботах багатьох авторів (див. [3, 8, 9, 17]), за додаткових обмежень на рівняння, крайові умови та області, для яких сформульовано задачі.

В останні роки зріс інтерес до задач для таких рівнянь та систем у просторах, показником гладкості елементів яких є функціональний параметр, а не число, як у просторах Соболєва [4−6, 11, 15, 19]. Такими просторами є простори Хермандера, які посідають центральне місце серед просторів узагальненої гладкості [10, 20]. Поширення теорії нелокальних крайових задач для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними на клас гільбертових просторів Хермандера, які утворюють уточнену шкалу соболєвських просторів, має значний науковий інтерес.

У цій роботі досліджено умови однозначної розв'язності нелокальної крайової задачі для безтипного диференціального рівняння з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами у шкалі просторів Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу. Гладкість функцій у соболєвських просторах визначається лише числовим параметром, а в уточненій соболєвській шкалі − двома параметрами: числовим та функціональним (повільно змінною на нескінченності функцією). Цей функціональний параметр може задавати додатну або від'ємну гладкість і дає змогу точніше охарактеризувати гладкість функцій простору. Встановлено необхідні та достатні умови єдиності розв'язку розглядуваної задачі в уточненій шкалі, а також достатні умови існування розв'язку у цій шкалі.

1. Основні позначення та функціональні простори. Нехай $\Omega = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$ − одновимірний тор, G − циліндрична область $[0,T]\times\Omega$. $\mathscr{T}$ − лінійний простір тригонометричних многочленів (основних функцій) вигляду $P(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k e^{ikx}$, де P_k − комплексні коефіцієнти, $x\in\Omega$, а k пробігає скінченну множину цілих чисел. $\mathscr{T}'$ є спряженим до $\mathscr{T}$ простором узагальнених 2π-періодичних функцій, які є формальними тригонометричними ря-

✉ i.volyanska@i.ua

DOI: 10.15407/mmpmf2024.67.3-4.5-19

дами $Q(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} Q_k e^{ikx}$, що діють на основну функцію $P \in \mathcal{F}$ за таким правилом: $\langle Q, P\rangle = \sum_k Q_k \bar{P}_k$, де число $\bar{P}_k$ є комплексно спряженим до числа P_k.

Позначимо через M_1 множину всіх повільно змінних на нескінченності за Караматою функцій, тобто множину таких функцій ψ, для яких $\lim_{t\to\infty} \frac{\psi(\lambda t)}{\psi(t)} = 1$ для кожного $\lambda > 0$, а через M – множину всіх вимірних за Борелем на півосі $[1,\infty)$ функцій $\psi : [1,\infty) \to (0,\infty)$ з M_1 таких, що функції ψ і $\frac{1}{\psi}$ обмежені на кожному відрізку $[1,b]$, де $1 < b < \infty$.

Введемо шкали $\{H^{\psi}_{q,\nu}(\Omega)\}_{q\in\mathbb{R},\,\psi\in M}$ і $\{H^{N,\psi}_{q,\theta}(G)\}_{q\in\mathbb{R},\,\psi\in M}$ відповідно гільбертових $H^{\psi}_{q,\nu}(\Omega)$ і банахових $H^{N,\psi}_{q,\theta}(G)$ просторів, де $\nu \in \mathbb{R}$, $N \in \mathbb{Z}_+$ і $\theta = \theta(t)$ – задана функція на відрізку $[0,T]$.

Гільбертів простір $H^{\psi}_{q,\nu}(\Omega)$ – простір функцій $V = V(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} V_k e^{ikx}$ з комплексними коефіцієнтами V_k і нормою

$$\|V\|_{H^{\psi}_{q,\nu}(\Omega)} = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(k)\tilde{k}^q e^{\nu|k|})^2 |V_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \tilde{k} = \sqrt{1+k^2}\,.$$

Банахів простір $H^{N,\psi}_{q,\theta}(G)$, $N \in \mathbb{Z}_+$, – простір таких функцій $u = u(t,x)$, що похідні $(\partial/\partial t)^r u(t,\cdot)$ для $r = 0,1,\ldots,N$ і $t \in [0,T]$ належать до просторів $H^{\psi}_{q-r,\theta(t)}(\Omega)$ відповідно і неперервні за t у цих просторах. Квадрат норми функції u у просторі $H^{N,\psi}_{q,\theta}(G)$ обчислюється за формулою

$$\|u\|^2_{H^{N,\psi}_{q,\theta}(G)} = \sum_{r=0}^{n} \max_{[0,T]} \left\| \frac{\partial^r u(t,\cdot)}{\partial t^r} \right\|^2_{H^{\psi}_{q-r,\theta(t)}(\Omega)}.$$

Якщо $\psi = 1$, то простори $H^{\psi}_{q,\nu}(\Omega)$ і $H^{N,\psi}_{q,\theta}(G)$ позначаємо через $H_{q,\nu}(\Omega)$ і $H^{N}_{q,\theta}(G)$ відповідно, де $q,\nu \in \mathbb{R}$. Якщо $\nu = 0$, то простір $H^{\psi}_{q,\nu}(\Omega)$ позначаємо через $H^{\psi}_{q}(\Omega)$. Множина просторів $H^{\psi}_{q,\nu}(\Omega)$, де $q \in \mathbb{R}$, $\psi \in M$, $\nu \in \mathbb{R}$, утворює шкалу з такою властивістю: подвійне вкладення $H_{q+\varepsilon,\nu}(\Omega) \mapsto H^{\psi}_{q,\nu}(\Omega) \mapsto H_{q-\varepsilon,\nu}(\Omega)$ є неперервним для довільного $\varepsilon > 0$.

2. Постановка задачі. У циліндрі G досліджується задача з нелокальними умовами для однорідного диференціального рівняння n-го порядку з частинними похідними

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t,x) \equiv \sum_{s_0+s_1\le n} a_{s_0,s_1} \frac{\partial^{s_0+s_1} u(t,x)}{\partial t^{s_0} \partial x^{s_1}} = 0, \quad a_{n,0} = 1, \tag{1}$$

$$L_m u = \mu \left.\frac{\partial^{m-1} u(t,x)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=0} - \left.\frac{\partial^{m-1} u(t,x)}{\partial t^{m-1}}\right|_{t=T} = \varphi_m(x), \quad m = 1,\ldots,n, \tag{2}$$

де $n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ – параметр у нелокальних умовах, a_{s_0,s_1} – комплексні коефіцієнти рівняння, $\varphi_1 = \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n = \varphi_n(x)$ – задані функції, а $u = u(t,x)$ – невідомий розв'язок.

Означення. *Розв'язком* задачі (1), (2) називаємо функцію $u \in \mathbb{C}^n([0,T];\mathcal{F}')$, яка на відрізку $[0,T]$ задовольняє рівняння (1) і умови (2) у просторі $\mathcal{F}'$ та належить до простору $H^{n,\psi}_{q,\theta}(G)$.

Якщо $u \in H^{n,\psi}_{q,\theta}(G)$, то $L_m u \in H^{\psi}_{q+1-m,\theta(0)}(\Omega) \cap H^{\psi}_{q+1-m,\theta(T)}(\Omega)$ для $m = 1,\ldots,n$, а тому для існування розв'язку задачі (1), (2) необхідно, щоб функції в нелокальних умовах (2) належали до цих просторів, тобто $\varphi_m \in H^{\psi}_{q+1-m,\nu_1}(\Omega)$, де $\nu_1 = \max(\theta(0),\theta(T))$.

Розв'язок $u \in \mathbb{C}^n([0,T];\mathcal{F}')$ задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t)e^{ikx} , \tag{3}$$

в якому коефіцієнти $u_k = u_k(t)$ є невідомими функціями з простору $\mathbb{C}^n[0,T]$.

Для кожного $k \in \mathbb{Z}$ функція $u_k = u_k(t)$ з формули (3) є класичним розв'язком нелокальної задачі для звичайного диференціального рівняння:

$$\frac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum_{j=1}^{n} b_j(k)\frac{d^{n-j}u_k(t)}{dt^{n-j}} = 0 , \tag{4}$$

$$\mu u_k^{(m-1)}\Big|_{t=0} - u_k^{(m-1)}\Big|_{t=T} = \tilde{\varphi}_{mk}, \quad m = 1,\ldots,n , \tag{5}$$

де $b_j(k) = \sum\limits_{s_1=0}^{j} a_{n-j,s_1}(ik)^{s_1}$, $\tilde{\varphi}_{mk}$ – коефіцієнти Фур'є функції φ_m для $m = 1,\ldots,n$.

Умови існування єдиного розв'язку $u_k(t)$ задачі (4), (5) у просторі $\mathbb{C}^n[0,T]$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$ забезпечують виконання необхідної і достатньої умови єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $H^{n,\psi}_{q,\theta}(G)$ для довільного $q \in \mathbb{R}$. Якщо ж хоча б для одного k існує нетривіальний розв'язок $\hat{u}_k = \hat{u}_k(t) \in \mathbb{C}^n[0,T]$ однорідної крайової задачі (4), (5), то однорідна задача (1), (2) також має нетривіальний розв'язок $\hat{u}(t,x)$, який визначається формулою $\hat{u}(t,x) = \hat{u}_k(t)e^{ikx}$, і тому розв'язок досліджуваної задачі (1), (2) не може бути єдиним.

У рівнянні (4) коефіцієнти $b_1(k),\ldots,b_n(k)$ лінійно залежать від коефіцієнтів a_{s_0,s_1} рівняння (1), є многочленами від k і для них справджуються формули

$$|b_j(0)| = |a_{n-j,0}| ,$$

$$|b_j(z)| \le \sum_{s_1=0}^{j} |a_{n-j,s_1}| \le \max_{s_1=0,1,\ldots,j} |a_{n-j,s_1}|(j+1), \quad |z| = 1, \quad z \in \mathbb{C} ,$$

$$|b_j(k)| \le \sum_{s_1=0}^{j} |a_{n-j,s_1}||k|^{s_1} \le \max_{s_1=0,1,\ldots,j} |a_{n-j,s_1}| \cdot \frac{|k|^{j+1}-1}{|k|-1} ,$$

$$|k| > 1, \quad k = 1,\ldots,n .$$

Якщо коефіцієнти a_{s_0,s_1} рівняння (1) належать кругу O_A деякого радіуса A з центром у початку координат комплексної площини $\mathrm{O}_A = \{a_{s_0,s_1} \in \mathbb{Z} : |a_{s_0,s_1}| \le A\}$, то для модулів функцій $b_1(z),\ldots,b_n(z)$ будуть справджуватися оцінки

$$|b_j(k)| \le \frac{3}{2} A\tilde{k},$$

$$|b_j(z)| < (j+1)A, \quad |z| = 1, \quad z \in \mathbb{C},$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Звідси випливає, що для розв'язків (враховуючи кратність) $\lambda_1(z),\ldots,\lambda_n(z)$ відповідного характеристичного рівняння

$$L(\lambda, iz) = P_z(\lambda) \equiv \prod_{j=1}^{n} (\lambda - \lambda_j(z)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} b_j(z)\lambda^{n-j} = 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

виконуються нерівності [14, с. 381–384] (оцінка Коші)

$$|\lambda_j(k)| = |\gamma_j(k)|\tilde{k} \le (1 + \max\{|\tilde{b}_1|,\ldots,|\tilde{b}_n|\})\tilde{k} < (1 + 3A/2)\tilde{k} = A_1\tilde{k}$$

і $|\lambda_j(z)| = 1 + (n+1)A$ для $|z| = 1$, $z \in \mathbb{C}$. Тут $\tilde{b}_j = b_j / \tilde{k}_j$, а числа $\gamma_j = \gamma_j(k) = \lambda_j(k)/\tilde{k}$ є γ-коренями многочлена $\gamma^n + \tilde{b}_1(k)\gamma^{n-1} + \ldots + \tilde{b}_n(k)$.

У випадку кратних коренів позначатимемо різні корені та їхні кратності через $\lambda_j(k)$ та $n_j = n_j(k)$, $j = 1,\ldots,n$, відповідно, де $n_1 + \ldots + n_N = n \ge N = N(k)$.

3. Умови єдиності розв'язку. Для побудови загального розв'язку рівняння (4) і розв'язку задачі (4), (5) введемо матриці J_j, W_j, $S_j(t)$, $E_j(t)$, де $j = 1,\ldots,N$. Позначимо через $J_j = (\lambda_j\delta_{\alpha,\beta} + \delta_{\alpha,\beta-1})_{\alpha,\beta=1}^{n_j}$ жорданову клітку порядку n_j для кореня λ_j, де $\delta_{\alpha,\beta}$ – символ Кронекера,

$$W_j = \operatorname{col}\left(\lambda_j^{\alpha-1} \quad (\lambda_j^{\alpha-1})' \quad \ldots \quad \frac{1}{(n_j-1)!}(\lambda_j^{\alpha-1})^{(n_j-1)}\right)_{\alpha=1}^{n} =$$

$$= \operatorname{col}\left(e_1(n_j)J_j^{\alpha-1}\right)_{\alpha=1}^{n},$$

причому елементи стовпців цієї матриці з точністю до сталих множників є похідними за змінною λ_j елементів першого стовпця, а $e_\alpha(n_j)$ – рядок з номером α одиничної матриці I_{n_j} порядку n_j. Матриця $E_j(t) = I_{n_j}e^{\lambda_j t}$ є діагональною, а трикутна тепліцева матриця $S_j(t)$ має вигляд

$$S_j(t) = \left(\delta_{\alpha,\beta} + t\delta_{\alpha,\beta-1} + \ldots + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\delta_{\alpha,\beta+1-n_j}\right)_{\alpha,\beta=1}^{n_j},$$

її рядки є послідовними похідними за змінною t першого рядка.

Очевидними є співвідношення

$$\left(S_j(t)E_j(t)\right)' = \left(E_j(t)S_j(t)\right)' = \lambda_j S_j(t)E_j(t) + S_j'(t)E_j(t) = J_j S_j(t)E_j(t).$$

Запровадимо також блочні квадратні матриці порядку n: (невироджену) узагальнену матрицю Вандермонда $W = (W_1 \ldots W_N)$ і діагональні матриці

$$J = \operatorname{diag}(J_1,\ldots,J_N), \quad S(t) = \operatorname{diag}\left(S_1(t),\ldots,S_N(t)\right),$$

$$E(t) = \operatorname{diag}\left(E_1(t), \ldots, E_N(t)\right).$$

Якщо $N = n$, то блоки W_j стають стовпцями, W є матрицею Вандермонда, $S(t) = I$, J і $E(t)$ – діагональні матриці, зокрема $E(t) = \operatorname{diag}\left(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right)$.

Теорема 1. *Нехай рівняння*

$$P_k\left(\frac{\ln\mu + i2\pi m}{T}\right) = \frac{1}{T^n}(\ln\mu + i2\pi m)^n +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} b_j(k) T^j (\ln\mu + i2\pi m)^{n-j} = 0 \qquad (6)$$

не має цілочислових розв'язків m, *тоді існує єдиний розв'язок* $u_k(t)$ *задачі* (4), (5) *у просторі* $\mathbb{C}^n[0,T]$, *причому*

$$u_k(t) = e_1 W S(t) E(t) \left(\mu I - S(t)E(t)\right)^{-1} W^{-1} \tilde{\varphi}_k, \qquad (7)$$

де $\tilde{\varphi}_k = \operatorname{col}\left(\tilde{\varphi}_{1k}, \ldots, \tilde{\varphi}_{nk}\right)$, e_α *– рядок з номером* α *одиничної матриці* n*-го порядку* I. *Якщо ж існує розв'язок рівняння* (6), *то однорідна задача* (4), (5) *має нетривіальний розв'язок.*

Д о в е д е н н я. Фундаментальна система розв'язків рівняння (4) складається з функцій $t^{\alpha-1}e^{\lambda_j t}$, де $\alpha = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, N$. Тому формула

$$u_k(t) = e_1 W S(t) E(t) C = \sum_{j=1}^{N} e_1(n_j) S_j(t) e^{\lambda_j t} C_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{N} e^{\lambda_j t}\begin{pmatrix} 1 & t & \ldots & \dfrac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\end{pmatrix} C_j \qquad (8)$$

визначає загальний розв'язок цього рівняння у просторі $\mathbb{C}^n[0,T]$ і його похідна порядку $r < n$ має вигляд

$$u_k^{(r)}(t) = e_1 W \left(S(t)E(t)\right)^{(r)} C =$$

$$= e_1 W J^r S(t) E(t) C = e_{r+1} W S(t) E(t) C, \qquad (9)$$

а похідна вищого порядку дорівнює $u_k^{(r)}(t) = e_n W J^{r+1-n} S(t) E(t) C$, де $C = \operatorname{col}\left(C_1, \ldots, C_N\right)$ – довільний блочний вектор із $\mathbb{C}^n$ і $C_j \in \mathbb{C}^{n_j}$.

Для визначення вектора C підставляємо функції $u_k(t)$, $u_k'(t)$, $u_k^{(n-1)}(t)$ в умови (5). Враховуючи рівність (9), отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь порядку n

$$W\left(\mu I - S(T)E(T)\right)C = \tilde{\varphi}_k \quad \text{або} \quad \left(\mu I - S(T)E(T)\right)C = W^{-1}\tilde{\varphi}_k \qquad (10)$$

з визначником $\prod_{j=1}^{N}\left(\mu - e^{\lambda_j T}\right)^{n_j}$. З умови теореми випливає, що $\prod_{j=1}^{N}\left(\ln\mu + i2\pi m - \lambda_j T\right) \neq 0$ для довільного числа $m \in \mathbb{Z}$, тому $C = \left(\mu I - S(T)E(T)\right)^{-1} W^{-1}\tilde{\varphi}_k$. Звідси отримуємо формулу (7).

Теорему доведено. ♦

Якщо рівняння (6) має цілочисловий розв'язок, то $\det(\mu I - S(T)E(T)) = 0$ і однорідна система $(\mu I - S(T)E(T))C = 0$ має ненульовий розв'язок $\tilde{C}$, а функція $u_k(t) = e_1 WS(t)E(t)\tilde{C}$ є нетривіальним розв'язком однорідної задачі (4), (5).

Із теореми 1 випливає очевидний наслідок.

Наслідок 1. *Для однозначної розв'язності задачі* (1), (2) *у просторі* $\mathbb{C}^n([0,T];\mathcal{F}')$ *необхідно і достатньо, щоб рівняння* (6) *не мало розв'язків у цілих числах* m *і* k. *При цьому розв'язок задачі задає формула*

$$u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e_1 WS(t)E(t)(\mu I - S(T)E(T))^{-1} W^{-1}\tilde{\varphi}_k e^{ikx}.$$

Теорема 2. *Нехай умова теореми 1 не виконується, тоді для деякого натурального числа* $N_1 = N_1(k) \le N$ *виконуються рівності*

$$\lambda_1 = (\ln\mu + i2\pi m_1)/T, \quad \ldots, \quad \lambda_{N_1} = (\ln\mu + i2\pi m_{N_1})/T,$$

де $\ln\mu$ *− головне значення логарифма,* m_j *− цілі числа і* $m_1 < \ldots < m_{N_1}$. *Для існування розв'язку* $u_k(t)$ *задачі* (4), (5) *у просторі* $\mathbb{C}^n[0,T]$ *необхідно і достатньо, щоб права частина* $\tilde{\varphi}_k$ *була лінійною комбінацією стовпців матриці* $\tilde{W}_k$, *яка отримана з матриці* W *вилученням* N_1 *стовпців з номерами* $n_1, n_1+n_2, \ldots, n_1+\ldots+n_{N_1}$, *причому*

$$u_k(t) = \mu^{t/T}\sum_{j=1}^{N_1} C_{j1}e^{i2\pi m_j t/T} + \left(\mu^{t/T}\begin{pmatrix} t & \ldots & \dfrac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{S}_j^{-1} & 0\end{pmatrix}\right)_{j=1}^{N_1} \times$$

$$\times\left(e_1(n_j)W_jS_j(t)e^{\lambda_j t}\left(\mu I_j - S_j(T)e^{\lambda_j T}\right)^{-1}\right)_{j=N_1+1}^{N} W^{-1}\tilde{\varphi}_k \qquad (11)$$

і залежить від N_1 *параметрів* $C_{j1}\in\mathbb{C}$, *де*

$$\begin{pmatrix} t & \ldots & \dfrac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{S}_j^{-1} & 0\end{pmatrix} = 0 \qquad \text{для} \qquad n_j = 1,$$

$$\tilde{S}_j = -\mu\left(T\delta_{\alpha,\beta} + \frac{T^2}{2}\delta_{\alpha,\beta-1} + \ldots + \frac{T^{n_j-1}}{(n_j-1)!}\delta_{\alpha,\beta+2-n_j}\right)_{\alpha,\beta=1}^{n_j-1} \qquad \text{для} \qquad n_j > 1.$$

Д о в е д е н н я. За припущенням теореми до множини розв'язків $\{(\ln\mu + i2\pi m)/T\}_{m\in\mathbb{Z}}$ рівняння $e^{\lambda T} = \mu$ належать N_1 коренів многочлена $P_k(\lambda)$, які позначимо $\lambda_1,\ldots,\lambda_{N_1}$: $\lambda_j = (\ln\mu + i2\pi m_j)/T$, $j = 1,\ldots,N_1$. Тому

$$\mu I_j - S_j(T)e^{\lambda_j T} = \mu(I_j - S_j(T)) = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{S}_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad j = 1,\ldots,N_1 \qquad n_j > 1.$$

Враховуючи, що $C_j = \mathrm{col}(C_{j1}, \tilde{C}_j)$, на основі (10) першу систему подамо так:

$$\tilde{W}_k\begin{pmatrix} \mathrm{col}(\tilde{S}_j\tilde{C}_j)_{j=1,\ldots,N_1}^{n_j>1} \\ \mathrm{col}((\mu I_j - S_j(T)e^{\lambda_j T})C_j)_{j=N_1+1}^{N}\end{pmatrix} = \tilde{\varphi}_k.$$

За теоремою Кронекера − Капеллі отримана теорема є сумісною тоді і тільки тоді, коли $\tilde{\varphi}_k$ є лінійною комбінацією стовпців матриці $\tilde{W}_k$. Компоненти C_j стовпця C визначимо з другої системи з (10), яка розпадається на N систем

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{S}_j \\ 0 & 0 \end{pmatrix} C_j = \eta_{jk}, \quad j = 1, \ldots, N_1,$$

$$(\mu I_j - S_j(T) e^{\lambda_j T}) C_j = \eta_{jk}, \quad j = N_1 + 1, \ldots, N,$$

(система $0 \cdot C_j = 0$ при $n_j = 1$, $1 \le j \le N_1$), де $W^{-1}\tilde{\varphi}_k = \operatorname{col}(\eta_{1k}, \ldots, \eta_{Nk})$ і $\eta_{jk} \in \mathbb{C}^{n_j}$. Розв'язки цих систем подамо у вигляді

$$C_j = \begin{pmatrix} C_{j1} \\ (\tilde{S}_j^{-1} \quad 0)\eta_{jk} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \ldots, N_1, \quad n_j > 1,$$

$$C_j = (\mu I_j - S_j(T) e^{\lambda_j T})^{-1} \eta_{jk}, \quad j = N_1 + 1, \ldots, N.$$

Якщо підставити знайдені вирази для C_j у формулу (7), отримаємо рівність (11). Теорему доведено. ♦

4. Умови існування розв'язку. Нехай характеристичне рівняння $P_k(\lambda) = 0$ має прості корені і $\mu \ne e^{\lambda_\ell(k)T}$, тоді для розв'язку (7) маємо

$$u_k^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j^r e^{\lambda_j t}}{\mu - e^{\lambda_\ell T}} \psi_{jk}, \tag{12}$$

де $\operatorname{col}(\psi_{1k}, \ldots, \psi_{nk}) = \psi_k = W^{-1}\tilde{\varphi}_k$. Звідси випливає нерівність

$$\left| \tilde{k}^{-r} u_k^{(r)}(t) \right|^2 \le n A_1^{2r} \max_{j=1,\ldots,n} \left| \frac{e^{\lambda_j t}}{\mu - e^{\lambda_\ell T}} \right|^2 \sum_{j=1}^{n} \left| \psi_{jk} \right|^2. \tag{13}$$

Знайдемо достатню умову, за якої характеристичне рівняння $P_z(\lambda) = 0$ може мати кратні корені лише для скінченної множини чисел $z \in \mathbb{C}$. Критерієм існування кратного кореня є умова

$$D(z) = \Delta^2(z) = \prod_{1 \le r < q \le n} \left(\lambda_q(z) - \lambda_r(z) \right)^2 = 0,$$

де $D(z)$ − дискримінант многочлена P_z. Дискримінант є многочленом змінної z і має вигляд

$$D(z) = (-1)^{h_1/2} \det \operatorname{col}\left(V_1(z), V_2(z) \right) = \sum_{j=0}^{h_1} D_j z^{h_1 - j}, \quad h_1 = (n-1)n, \tag{14}$$

де

$$V_1(z) = \left(\sum_{\sigma=0}^{n} b_\sigma(z) \delta_{\alpha, \beta-\sigma} \right)_{\substack{\alpha=1,\ldots,n-1 \\ \beta=1,\ldots,2n-1}},$$

$$V_2(z) = \left(\sum_{\sigma=0}^{n-1} (n-\sigma) b_\sigma(z) \delta_{\alpha, \beta-\sigma} \right)_{\substack{\alpha=1,\ldots,n \\ \beta=1,\ldots,2n-1}},$$

тут $b_0(k)=1$. Старший коефіцієнт D_0 є дискримінантом многочлена $P_\infty(z)=z^n+\sum_{j=1}^{n}a_{n-j,j}z^{n-j}$, модулі коренів якого обмежені зверху сталою $1+A$, а інші коефіцієнти $D_1,\dots,D_{h_1}$ визначаються з квадратної системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{h_1-1}\omega^{\alpha j}D_{h_1-j}=\Delta^2(\omega^\alpha)-\omega^{\alpha h_1}D_0,\quad \alpha=0,1,\dots,h_1-1,\quad \omega=e^{2\pi i/h_1},$$

з (невиродженою) матрицею Фур'є [16, с. 356] порядку h_1. Ця система є частиною тотожності (15).

Оскільки $\left|\Delta(\omega^\alpha)\right|^2\le\prod_{1\le r<q\le n}\left(\left|\lambda_q(\omega^\alpha)\right|+\left|\lambda_r(\omega^\alpha)\right|\right)^2\le 2^{h_1}(1+(1+n)A)^{h_1}$ і $|D_0|\le 2^{h_1}(1+A)^{h_1}$, а оберненою до матриці Фур'є є ця сама матриця з точністю до множника n, то компоненти розв'язку останньої системи визначає формула

$$D_{h_1-\alpha}=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{h_1-1}\omega^{\alpha_j}(\Delta^2(\omega^j)-\omega^{jh_1}D_0),\quad \alpha=0,1,\dots,h_1-1.$$

Тому отримуємо оцінку зверху $\max\limits_{j=1,\dots,n}|D_j|\le 2^{h_1}(2+(2+n)A)^{h_1}$.

Нехай $D_0\ne 0$, тоді з формули (14) отримуємо

$$D(k)=\frac{D_0}{2}\left(2k^{h_1}+\sum_{j=1}^{h_1}\frac{2D_j}{D_0}k^{h_1-j}\right),$$

тому

$$|D(k)|\ge\frac{|D_0|}{2}\left(2|k|^{h_1}-2\max_{j=1,\dots,n}|D_j|\sum_{j=1}^{h_1}\frac{|k|^{j-1}}{|D_0|}\right)\ge$$

$$\ge\frac{|D_0|}{2}\left(2|k|^{h_1}-\frac{2^{h_1+1}(2+(2+n)A)^{h_1}}{|D_0|}\sum_{j=1}^{h_1}|k|^{j-1}\right).\qquad(15)$$

Очевидно, що рівняння $y^{h_1}=\dfrac{2^{h_1+1}(2+(2+n)A)^{h_1}}{|D_0|}(1+y+\ldots+y^{h_1-1})$ має лише один дійсний корінь y_1; за нерівністю Коші він належить множині $\left(0,1+\dfrac{2^{h_1+1}(2+(2+n)A)^{h_1}}{|D_0|}\right]$.

Тому $|k|^{h_1}>\dfrac{2^{h_1+1}(2+(2+n)A)^{h_1}}{|D_0|}(1+|k|+\ldots+|k|^{h_1-1})$ при $|k|>y_1$ і за формулою (15) справджується оцінка

$$|D(k)|\ge\frac{|D_0|}{2}|k|^{h_1},\quad |k|>y_1.\qquad(16)$$

Отже, якщо коефіцієнти $a_{n-j,j}$, де $j=1,\dots,n$., головної частини рівняння (1) справджують умову $D_0\ne 0$, то незалежно від інших коефіцієнтів характеристичне рівняння $P_k(\lambda)=0$ може мати кратні корені щонайбільше для $2y_1 - 1$ чисел $k \in \mathbb{Z}$; ці числа належать інтервалу $(-y_1, y_1)$.

Стовпець ψ_k є розв'язком рівняння $W\psi_k = \tilde{\varphi}_k$ або рівняння

$$\left(\left(\frac{\lambda_\alpha}{A_1\tilde{k}}\right)^{\beta-1}\right)_{\alpha,\beta=1}^{n} \psi_k = \operatorname{col}\left(\left(\frac{\tilde{\varphi}_{mk}}{(A_1\tilde{k})^{m-1}}\right)^{\beta-1}\right)_{m=1}^{n}$$

з матрицею, елементи якої лежать в одиничному крузі, тому використовуючи нерівність Адамара [16, с. 491] і нерівність (16), із правила Крамера за умови $|k| > y_1$ отримуємо оцінку для виразу $|\psi_{jk}|^2$ з правої частини нерівності (13):

$$|\psi_{jk}|^2 \le \frac{(A_1\tilde{k})^{h_1}}{|\Delta(k)|^2}\sum_{m=1}^{n}\frac{|\tilde{\varphi}_{mk}|^2}{(A_1\tilde{k})^{2m-2}} \le \frac{2^{h_1/2+1}A_1^{h_1}}{|D_0|}\sum_{m=1}^{n}\tilde{k}^{-2(m-1)}|\tilde{\varphi}_{mk}|^2,$$

$$j = 1,\ldots,n. \tag{17}$$

Оцінювання дробу $\dfrac{e^{\lambda_j t}}{\mu - e^{\lambda_\ell T}}$ з (13) здійснимо, припускаючи для $\lambda_0 > 0$ виконання нерівності $|\operatorname{Re}\lambda_j(k)| \ge \lambda_0 |k|$. Тоді для $\operatorname{Re}\lambda_j(k) < 0$ маємо

$$\left|\frac{e^{\lambda_j t}}{\mu - e^{\lambda_\ell T}}\right| = \frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_j t}}{|\mu - e^{\lambda_\ell T}|} \le \frac{e^{-\lambda_0|k|t}}{|\mu| - e^{-\lambda_0|k|T}} \le \frac{2}{|\mu|}e^{-\lambda_0|k|t}, \quad |k| \ge \frac{1}{\lambda_0 T}\ln\frac{2}{|\mu|};$$

аналогічно для $\operatorname{Re}\lambda_j(k) > 0$ отримуємо

$$\left|\frac{e^{\lambda_j t}}{\mu - e^{\lambda_\ell T}}\right| = \frac{e^{\operatorname{Re}\lambda_j(T-t)}}{|1 - \mu e^{-\lambda_\ell T}|} \le \frac{e^{-\lambda_0|k|(T-t)}}{1 - |\mu|e^{-\lambda_0 T}} \le 2e^{-\lambda_0|k|(T-t)}, \quad |k| \ge \frac{1}{\lambda_0 T}\ln 2|\mu|.$$

Отже, за припущення $|\operatorname{Re}\lambda_j(k)| \ge \lambda_0 |k|$ маємо оцінку зверху

$$\left|\frac{e^{\lambda_j t}}{\mu - e^{\lambda_\ell T}}\right| \le 2\max\left(1, \frac{1}{|\mu|}\right)e^{-\theta(t)|k|}, \quad |k| \ge \frac{\ln\min(2|\mu|, 2/|\mu|)}{\lambda_0 T}, \tag{18}$$

де $\theta(t) = \lambda_0 \min(t, T-t)$.

Знайдемо умови виконання нерівності $|\operatorname{Re}\lambda_j(k)| \ge \lambda_0 |k|$. Для довільного $j = 1,\ldots,n$ число $\operatorname{Re}\lambda_j(k)$ є множником результанта

$$R(k) = \prod_{j=1}^{n}\prod_{\ell=1}^{n}(\lambda_j + \bar{\lambda}_\ell) = 2\operatorname{Re}\lambda_j \prod_{\substack{\ell,r=1,\ldots,n \\ (\ell,r)\ne(j,j)}}(\lambda_\ell + \bar{\lambda}_r) = \sum_{j=0}^{h_2} R_j k^{h_2-j},$$

$$h_2 = n^2, \tag{19}$$

многочленів $P_k(\lambda)$ і $P_{1k}(\lambda) = \prod_{\ell=1}^{n}(\lambda + \bar{\lambda}_\ell(k)) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j \bar{b}_j(k)\lambda^{n-j}$.

Результант має вигляд $R(k) = \det\operatorname{col}(V_3(k), V_4(k))$, де

$$V_3(k) = \left(\sum_{\sigma=0}^{n} b_\sigma(k)\delta_{\alpha,\beta-\sigma}\right)_{\substack{\alpha=1,\ldots,n \\ \beta=1,\ldots,2n}}, \quad V_4(k) = \left(\sum_{\sigma=0}^{n}(-1)^\sigma \bar{b}_\sigma(k)\delta_{\alpha,\beta-\sigma}\right)_{\substack{\alpha=1,\ldots,n \\ \beta=1,\ldots,2n}}.$$

Коефіцієнт R_0 у формулі (19) є результантом многочленів $P_\infty(\lambda)$ і $P_{1\infty}(\lambda) = \lambda^n + \sum_{j=1}^{n} (-1)^j \bar{a}_{n-j,j} \lambda^{n-j}$.

Коефіцієнти $R_1, \dots, R_{h_2}$ задовольняють квадратну систему лінійних алгебричних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{h_2-1} \omega^{\alpha j} R_{h_2-j} = R(\omega^\alpha) - \omega^{\alpha h_2} R_0, \quad \alpha = 0,1,\dots,h_2-1, \quad \omega = e^{2\pi i/h_2},$$

з матрицею Фур'є порядку h_2. При цьому виконуються нерівності

$$|R(\omega^\alpha)| = \prod_{q=1}^{n} \prod_{r=1}^{n} \left(|\lambda_q(\omega^\alpha)| + |\lambda_r(\omega^\alpha)| \right)^2 \le 2^{h_2} (1 + (1+n)A)^{h_2},$$

$$|R_0| \le 2^{h_2} (1 + A)^{h_2}$$

і формула для компонент розв'язку цієї системи

$$R_{h_2-\alpha} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{h_2-1} \omega^{\alpha j} (R(\omega^j) - \omega^{jh_2} R_0), \quad \alpha = 0,1,\dots,h_2-1.$$

Тому, як і для дискримінанта, отримуємо оцінку зверху

$$\max_{j=1,\dots,n} |R_j| \le 2^{h_2} (2 + (2+n)A)^{h_2}.$$

Нехай $R_0 \ne 0$, тоді з формули (19) отримуємо

$$R(k) = \frac{R_0}{2} \left(2k^{h_2} + \sum_{j=1}^{h_2} \frac{2R_j}{R_0} k^{h_2-j} \right),$$

тому

$$|R(k)| \ge \frac{|R_0|}{2} \left(2|k|^{h_2} - 2 \max_{j=1,\dots,n} |R_j| \sum_{j=1}^{h_2} \frac{|k|^{j-1}}{|R_0|} \right) \ge$$

$$\ge \frac{|R_0|}{2} \left(2|k|^{h_2} - \frac{2^{h_2+1}(2+(2+n)A)^{h_2}}{|R_0|} \sum_{j=1}^{h_2} |k|^{j-1} \right).$$

Очевидно, що рівняння $y^{h_2} = \frac{2^{h_2+1}(2+(2+n)A)^{h_2}}{|R_0|} (1 + y + \ldots + y^{h_2-1})$ має лише один дійсний корінь y_2; він за нерівністю Коші належить множині $\left(0, 1 + \frac{2^{h_2+1}(2+(2+n)A)^{h_2}}{|R_0|}\right]$.

Тому $|k|^{h_2} > \frac{2^{h_2+1}(2+(2+n)A)^{h_2}}{|R_0|} (1 + |k| + \ldots + |k|^{h_2-1})$ при $|k| > y_2$ і попередню нерівність для $R(k)$ підсилюємо до такої:

$$|R(k)| \ge \frac{|R_0|}{2} |k|^{h_2}, \quad |k| > y_2. \tag{20}$$

Отже, якщо коефіцієнти $a_{n-j,j}$, де $j = 1,\dots,n$, головної частини рівняння (1) справджують умову $R_0 \ne 0$, то незалежно від інших коефіцієнтів, протилежну нерівність $|R(k)| < \left(|R_0|/2\right)|k|^{h_2}$ задовольняють щонайбільше $2y_2 - 1$ чисел $k \in \mathbb{Z}$; ці числа належать інтервалу $(-y_2, y_2)$.

Підставляючи нерівність (20) у формулу (19), запишемо

$$|\operatorname{Re}\lambda_j| \geq \frac{|R_0|}{2^{h_2}(A_1\tilde{k})^{h_2-1}} \geq \frac{|R_0||k|^{h_2}}{2^{h_2+1}(A_1\tilde{k})^{h_2-1}} \geq \lambda_0\,|k|, \quad j = 1, \ldots, n,$$

і знайдемо $\lambda_0 = \dfrac{|R_0|}{2^{(3h_2+1)/2} A_1^{h_2-1}}$.

Для випадку $|k| \geq \max\left(y_1, y_2, (\lambda_0 T)^{-1} \ln \max(2|\mu|, 2/|\mu|)\right)$ з огляду на нерівності (13), (17) і (18) знаходимо

$$\left|\tilde{k}^{-r} u_k^{(r)}(t)\right|^2 \leq n^2 2^{h_1/2+3} \max\left(1, \frac{1}{|\mu|^2}\right) \frac{A_1^{2r+h_1}}{|D_0|} e^{-2\theta(t)|k|} \sum_{m=1}^{n} \tilde{k}^{-2(m-1)} |\tilde{\varphi}_{mk}|^2,$$

$$r = 0, 1, \ldots, n. \tag{21}$$

Далі використовуємо проєктори Π_K, де K − довільна підмножина множини цілих чисел $\mathbb{Z}$, які діють у просторах $H_{q,\nu}^{\psi}(\Omega)$ за правилом: якщо $V = V(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} V_k e^{ikx}$ належить простору $H_{q,\nu}^{\psi}(\Omega)$, то $\Pi_K V = \Pi_K V(x) = \sum_{k\in K} V_k e^{ikx}$. При цьому очевидно, що $\Pi_K V \in H_{q,\nu}^{\psi}(\Omega)$ та $\Pi_K V \in \mathrm{T} \subset H_{q,\nu}^{\psi}(\Omega)$ для скінченної множини K.

Позначимо через K_0 множину цілих чисел, для яких рівняння (6) не має розв'язків $m \in \mathbb{Z}$, $K_1 = \{k \in \mathbb{Z} : |k| \geq y_1\}$, $K = \{k \in \mathbb{Z} : |k| \geq \max\left(y_1, y_2, (\lambda_0 T)^{-1} \ln \max(2|\mu|, 2/|\mu|)\right)\}$.

Теорема 3. *Для фіксованих коефіцієнтів і параметрів задачі* (1), (2) *її розв'язок* (3) *у просторі* $\mathbb{C}^n([0,T]; \mathcal{F}')$ *існує тоді і тільки тоді, коли виконується умова ортогональності* $G_k\varphi_k = 0$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}\backslash K_0$, *де* $G_k = \left(\sum_{\sigma=0}^{n-N_1} g_{n-N_1-\sigma\delta_\alpha, \beta-\sigma}\right)$, *числа* g_j *є коефіцієнтами многочлена* $g(z) = P_k(z) / \prod_{j=1}^{N_1}(z - \lambda_j) = z^{n-N_1} + \sum_{j=1}^{n-N_1} g_j z^{n-N_1-j}$. *У випадку скінченної множини* K_0 *задача є фредгольмовою, множники* u_k *в її розв'язку мають вигляд* (12) *для* $k \in \mathbb{Z}\setminus K_0$ *і* (7) *для* $k \in K_0$; *ядро задачі має розмірність* $\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus K_0} N_1(k)$, *причому воно тривіальне, якщо* $K_0 = \mathbb{Z}$; *інакше задача не є фредгольмовою. Якщо додатково виконується умова* $D_0 \neq 0$, *то*

$$P_{K_2} u = \sum_{k\in K_2} \sum_{j=1}^{n} \frac{e^{\lambda_j t}}{\mu - e^{\lambda_j T}} \psi_{jk} e^{ikx}, \quad K \subset K_0 \bigcap K_1. \tag{22}$$

Припустимо, що виконується умова $D_0 R_0 \neq 0$ *і рівняння* (6) *не має розв'язків* $m \in \mathbb{Z}$ *для цілих чисел* $k \in \mathbb{Z}\setminus K$, *тоді розв'язок* $u \in H_{q,\theta}^{n,\psi}(\mathrm{G})$

задачі (1), (2) *єдиний та існує для довільних правих частин* $\varphi_j \in H^{\psi}_{q+1-j}(\Omega)$, *причому*

$$u = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus K} e_1 WS(t)E(t)(\mu I - S(T)E(T))^{-1} W^{-1}\tilde{\varphi}_k e^{ikx} +$$

$$+ \sum_{k\in K} \operatorname{diag}\left(\frac{e^{\lambda_j t}}{\mu - e^{\lambda_j T}}\right)_{j=1}^{n} W^{-1}\tilde{\varphi}_k e^{ikx}, \tag{23}$$

$$\|u\|^2_{H^{n,\psi}_{q,\theta}(G)} \le M\sum_{j=1}^{n}\left\|\varphi_j\right\|^2_{H^{\psi}_{q+1-j}(\Omega)}, \quad \theta(t) = \lambda_0 \min(t, T-t), \tag{24}$$

де додатна величина M *залежить від коефіцієнтів* a_{s_0,s_1} *рівняння* (1) *і параметра* μ, *а також від чисел* A *та* n. *Цей розв'язок неперервно залежить від правих частин умов* (2).

Д о в е д е н н я. Якщо множина $\mathbb{Z}\setminus K_0$ – порожня, то за теоремою 1 розв'язок задачі (4), (5) існує для довільного $k \in \mathbb{Z}$ і виконується наслідок 1 про єдиність розв'язку задачі (1), (2). Якщо $k \in \mathbb{Z}\setminus K_0$, то за теоремою 2 розв'язок u_k існує з точністю до $N_1(k)$-вимірного простору, але не для всіх правих частин $\tilde{\varphi}_k$.

Вектор $\tilde{\varphi}_k$ при цьому є лінійною комбінацією стовпців матриці $\tilde{W}_k$, яка є матрицею Вандермонда з n рядками многочлена $g(z)$. Із рівності $G_k\tilde{W}_k = 0$ випливає умова ортогональності $G_k\tilde{\varphi}_k = 0$. Отже, всі члени ряду $\sum_{k\in\mathbb{Z}} u_k(t)e^{ikx}$ є визначеними, тому $u \in \mathbb{C}^n([0,T];\mathcal{F}')$.

Якщо $D_0 \ne 0$, то $N(k) = n$ для $k \in K_1$, а якщо додатково $k \in K_0$, то справджується формула (13). Звідси випливає рівність (22).

Якщо $D_0R_0 \ne 0$, то $K \subset K_0 \bigcap K_1$, множина $\mathbb{Z}\setminus K$ – скінченна, $K_0 = \mathbb{Z}$ і справджується наслідок 1. Зображення (23) розв'язку випливає з теореми 1 і формули (22). Зі скінченності $\mathbb{Z}\setminus K$ маємо нерівність $\left\|P_{\mathbb{Z}\setminus K}u\right\|^2_{H^{n,\psi}_{q,\theta}(G)} \le M_1\sum_{j=1}^{n}\left\|P_{\mathbb{Z}\setminus K}\varphi_j\right\|^2_{H^{\psi}_{q+1-j(\Omega)}}$, яка разом з оцінкою (21) дає формулу (24).

Теорему доведено. ♦

Нехай для $q \in \mathbb{R}$, $\psi \in M$ оператор

$$N_{q,\psi}: \quad D(N_{q,\psi}) \to H^{\psi}_{q}(\Omega) \times H^{\psi}_{q-1}(\Omega) \times \ldots \times H^{\psi}_{q+1-n}(\Omega),$$

що визначений на підпросторі $D(N_{q,\psi}) = \{u \in H^{n,\psi}_{q,\theta}(G) : Lu = 0\}$ простору $H^{n,\psi}_{q,\theta}(G)$, діє за правилом $N_{q,\psi}(u) = (L_1u, \ldots, L_nu)$, де L та $L_1, \ldots, L_n$ – такі самі, як у формулах (1), (2).

Наслідок 2. *За умов теореми 3 оператор* $N_{q,\psi}$ *задає гомеоморфізм просторів* $D(N_{q,\psi})$ *та* $H^{\psi}_{q}(\Omega) \times H^{\psi}_{q-1}(\Omega) \times \ldots \times H^{\psi}_{q+1-n}(\Omega)$. *При цьому додаткова гладкість* ψ *передаєтъся від розв'язку рівняння* (1) *до правих частин умов* (2) *і навпаки.*

Д о в е д е н н я випливає з означення вказаних просторів та нерівності (24). ♦

Умови теореми 3 виконуються майже завжди, адже протилежне означає настання однієї з подій: вектор $\mathbf{a}_1 = \{a_{n-1,1}, \ldots, a_{1,n-1}, a_{0,n}\} \in \mathrm{O}_A^{n(n+1)/2}$ належить одній із двох алгебраїчних гіперповерхонь або вектор $\mathbf{a}_2 = \{a_{s_0,s_1} \in \mathbb{Z} : s_0 + s_1 \le n-1\} \in \mathrm{O}_A^{n(n+1)/2}$ належить одній зі скінченної кількості гіперплощин (6), де $k \in \mathbb{Z}\setminus K$. Геометричні ймовірності цих подій є нульовими у сенсі міри Лебеґа і, більш точно, у сенсі розмірності Гаусдорфа.

Зауважимо, що у багатовимірному випадку, коли x − векторна величина, оцінки (16) і (20) не виконуються для майже всіх векторів, складених з коефіцієнтів рівняння (1). Дискримінант $D(k)$ і результант $R(k)$ можуть мати як завгодно швидке прямування до нуля на множині $\mathbb{Z}$; це малі знаменники задачі, які треба кваліфіковано оцінювати у рамках заданих шкал просторів.

Висновки. У роботі досліджено нелокальну крайову задачу для диференціального рівняння з параметром. Встановлено умови розв'язності цієї задачі у просторах Хермандера, що утворюють уточнену соболєвську шкалу функцій однієї дійсної змінної. Показано коректність за Адамаром задачі, що відрізняє її від некоректної за Адамаром задачі з багатьма змінними, розв'язність якої пов'язана з проблемою малих знаменників. Доведено, що проблема малих знаменників не виникає, оскільки відповідні вирази оцінюються знизу додатними сталими.

1. *Власій О. Д., Пташник Б. Й.* Нелокальна крайова задача для лінійних рівнянь із частинними похідними, не розв'язних відносно старшої похідної за часом. // Укр. мат. журн. − 2007. − **59**, № 3. − С. 370−381.
   − https://umj.imath.kiev.ua/index.php/umj/article/view/3313.
   Те саме: Vlasii O. D., Ptashnyk B. I. Nonlocal boundary-value problem for linear partial differential equations unsolved with respect to the higher time derivative // Ukr. Math. J. − 2007. − **59**, No. 3. − P. 409−422.
   − https://doi.org/10.1007/s11253-007-0026-z.
2. *Ільків В. С., Страп Н. І.* Нелокальна крайова задача для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю у просторах рядів Діріхле − Тейлора з фіксованим спектром // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2016. − **59**, № 2. − С. 77−85.
   Те саме: *Ilkiv V. S., Strap N. I.* Nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity in the spaces of Dirichlet − Taylor series with fixed spectrum // J. Math. Sci. − 2018. − **231**, No. 4. − P. 572−585. − https://doi.org/10.1007/s10958-018-3835-8.
3. *Ільків В. С., Страп Н. І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з частинними похідними у багатовимірній комплексній області // Наук. вісн. Ужгородського ун-ту. Сер. Математика і інформатика. − 2013. − **24**, № 1. − С. 60−72.
4. *Ільків В. С., Страп Н. І.* Розв'язність нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю в уточненій шкалі просторів Соболєва // Укр. мат. вісн. − 2015. − **12**, № 4. − С. 437−456.
   Те саме: *Ilkiv V. S., Strap N. I.* Solvability of a nonlocal boundary-value problem for the operator-differential equation with weak nonlinearity in a refined scale of Sobolev spaces // J. Math. Sci. − 2016. − **218**, No. 1. − P. 1−15.
   − https://doi.org/10.1007/s10958-016-3006-8.
5. *Ільків В. С., Страп Н. І., Волянська І. І.* Нелокальна крайова задача для рівняння з оператором диференціювання $z\partial/\partial z$ в уточненій шкалі просторів Соболєва // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2020. − **63**, № 4. − С. 5−16.
   − https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.4.5-16
   Те саме: *Ilkiv V. S., Strap N. I., Volyanska I. I.* Nonlocal boundary value problem for an equation with differentiation operator $z\partial/\partial z$ in a refined Sobolev scale // J. Math. Sci. − 2023. − **273**, No. 6. − P. 885−900.
   https://doi.org/10.1007/s10958-023-06552-5.
6. *Ільків В. С., Страп Н. І., Волянська І. І.* Умови розв'язності нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю в

уточненій соболєвській шкалі просторів функцій багатьох дійсних змінних // Укр. мат. журн. – 2020. – **72**, № 4. – С. 452–466.
– https://doi.org/10.37863/umzh.v72i4.2270.
Те саме: *Ilkiv V. S., Strap N. I., Volyanska I. I.* Solvability conditions for the nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity in the refined Sobolev scale of spaces of functions of many real variables // Ukr. Math. J. – 2020. – **72**, No. 4. – P. 515–535.
– https://doi.org/10.1007/s11253-020-01798-7.
7. *Ільків В. С., Страп Н. І., Волянська І. І.* Умови розв'язності нелокальної крайової задачі для диференціально-операторного рівняння зі слабкою нелінійністю // Укр. мат. вісн. – 2021. – **18**, № 1. – С. 37–59.
Те саме: *Il'kiv V. S., Strap N. I., Volyanska I. I.* Conditions of solvability of the nonlocal boundary-value problem for a differential-operator equation with weak nonlinearity // J. Math. Sci. – 2021. – **256**, No. 6. – P. 753–769.
– https://doi.org/10.1007/s10958-021-05458-4.
8. *Каленюк П. І., Когут І. В., Нитребич З. М.* Задача з нелокальною двоточковою умовою за часом для однорідного рівняння із частинними похідними нескінченного порядку за просторовими змінними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 4. – С. 17–26.
Те саме: *Kalenyuk P. I., Kohut I. V., Nytrebych Z. M.* Problem with nonlocal two-point condition in time for a homogeneous partial differential equation of infinite order with respect to space variables // J. Math. Sci. – 2010. – **167**, No. 1. – P. 1–15.
9. *Кондратів Л. Й., Симотюк М. М., Тимків І. Р.* Задача з нелокальними умовами для безтипних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами з відхиленням аргументу // Прикарпат. вісн. НТШ. Число. – 2018. – № 1(45). – С. 37–44. – https://pvntsh.nung.edu.ua/index.php/number/article/view/11.
10. *Михайлец В. А., Мурач А. А.* Расширенная соболевская шкала и эллиптические операторы // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 392–404.
Те саме: *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Extended Sobolev scale and elliptic operators // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No. 3. – P. 435–447.
– https://doi.org/10.1007/s11253-013-0787-5.
11. *Михайлець В., Мурач О., Чепурухіна І.* Еліптичні оператори і крайові задачі у просторах узагальненої гладкості // Укр. мат. журн. – 2024. – **76**, № 9. – С. 1331–1363. – https://doi.org/10.3842/umzh.v76i9.8595.
Те саме: *Mikhailets V., Murach A., Chepurukhina I.* Elliptic operators and boundary-value problems in spaces of generalized smoothness // Ukr. Math. J. – 2025. – **76**, No. 9. – P. 1503–1536. – https://doi.org/10.1007/s11253-025-02403-5.
12. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
13. *Савка І. Я.* Нелокальна задача із залежними коефіцієнтами в умовах для рівняння другого порядку за часовою змінною // Карпат. мат. публікації. – 2010. – **2**, № 2. – С. 101–110.
14. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – Москва: Мир, 1989. – 655 с.
Те саме: *Horn R. A., Johnson C. R.* Matrix analysis. – Cambridge: Cambridge University Press, 1985. – xiii+561 p.
15. *Anop A., Denk R., Murach A.* Elliptic problems with rough boundary data in generalized Sobolev spaces // Commun. Pure Appl. Anal. – 2021. – **20**, No. 2 – P. 697–735. – https://doi.org/10.3934/cpaa.2020286.
16. *Bernstein D. S.* Matrix mathematics: theory, facts, and formulas. – Princeton University Press, 2009. – xxxix+1059 p.
17. *Goy T., Negrych M., Savka I.* On nonlocal boundary value problem for the equation of motion of a homogeneous elastic beam with pinned-pinned ends // Carpathian Math. Publ. – 2018. – **10**, No. 1. – P. 105–113.
– https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.105-113.
18. *Higham N. J.* Accuracy and stability of numerical algorithms. – Philadelphia: SIAM, 2002. – xxx+680 p.
19. *Los V., Mikhailets V., Murach A.* Parabolic problems in generalized Sobolev spaces // Commun. Pure Appl. Anal. – 2021. – **20**, No. 10. – P. 3605–3636.
– https://doi.org/10.3934/cpaa.2021123.
20. *Mikhailets V. A., Murach A. A.* Hörmander spaces, interpolation, and elliptic problems. – Berlin/Boston: De Gruyter Co., 2014. – xii+297 p.

21. *Modanlı M.* Two numerical methods for fractional partial differential equation with nonlocal boundary value problem // Adv. Differ. Equat. – 2018. – **2018**. – Article No. 333. – https://doi.org/10.1186/s13662-018-1789-2.

SOLVABILITY OF TWO-POINT BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION WITH PARAMETER UNDER NONLOCAL CONDITIONS IN A REFINED SOBOLEV SCALE

A nonlocal boundary value problem for a differential equation with the parameter is investigated. The conditions for the solvability of this problem are derived in the scale of Hörmander spaces forming a refined Sobolev scale of functions of one real variable. The considered problem is well-posed in the sense of Hadamard. The denominators, that arise when constructing the solution, are not small and are estimated from below by some positive constants.

Key words*: *partial differential equation, nonlocal problem, Hörmander spaces.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
23.09.24