УДК 517.95

О. В. Махней[✉]

ЗМІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПОЗДОВЖНІХ КОЛИВАНЬ СТРИЖНЯ

Запропоновано схему розв'язування змішаної задачі для диференціального рівняння поздовжніх коливань стрижня з коефіцієнтом, який є узагальненою похідною функції обмеженої варіації. Розв'язок цієї задачі побудовано за допомогою методу редукції, який дає змогу звести її до двох задач: крайової квазістаціонарної задачі з вихідними крайовими умовами і змішаної задачі з однорідними крайовими умовами. Першу з цих задач розв'язано з використанням квазіпохідної. Для розв'язання другої задачі застосовано метод Фур'є і розвинення за власними функціями допоміжної крайової задачі для квазідиференціального рівняння другого порядку.

Ключові слова: *змішана задача, поздовжні коливання стрижня, квазіпохідна, сингулярне диференціальне рівняння.*

Вступ. Теорію коливних процесів у випадку гладких функцій детально описано в [1, 6, 13]. Однак при моделюванні коливань часто виникають крайові задачі для диференціальних рівнянь з кусково-неперервними коефіцієнтами або коефіцієнтами, які є узагальненими похідними від розривних функцій. У роботах [3, 5, 11, 12] вивчали задачі про поздовжні коливання стрижнів з кусково-неперервними або кусково-сталими коефіцієнтами. Задачі для диференціальних рівнянь із сингулярностями вивчали, зокрема, у роботах [7, 9, 10].

У цій роботі розглянуто змішану задачу для диференціального рівняння про поздовжні коливання стрижня з коефіцієнтом, який є узагальненою похідною функції обмеженої варіації. З використанням методу редукції [6, гл. 3, §2] розв'язання поставленої задачі зведено до двох задач: крайової квазістаціонарної задачі з вихідними крайовими умовами і змішаної задачі з однорідними крайовими умовами для деякого неоднорідного рівняння. Для розв'язання першої задачі використано підхід, що передбачає застосування квазіпохідних [4], з допомогою яких квазідиференціальні рівняння зведено до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Розв'язання другої задачі ґрунтується на використанні методу Фур'є і модифікованого методу власних функцій крайової задачі для квазідиференціального рівняння другого порядку.

1. Постановка задачі. Розглянемо змішану задачу для диференціального рівняння коливань. Задача полягає у знаходженні розв'язку $u(x,t)$ рівняння

$$a(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + f(x) \tag{1}$$

з крайовими

$$p_1 u(0,t) + p_2\lambda(0)u'_x(0,t) = \psi_1(t)\,,$$

$$q_1 u(\ell,t) + q_2\lambda(\ell)u'_x(\ell,t) = \psi_2(t) \tag{2}$$

та початковими умовами

$$u(x,0) = \varphi_1(x)\,,$$

✉ oleksandr.makhnei@pnu.edu.ua

DOI: 10.15407/mmpmf2024.67.3-4.45-52

$$u_t'(x,0) = \varphi_2(x). \tag{3}$$

Тут $a(x) = b'(x)$, $f(x) = r'(x)$, де $b(x)$, $r(x)$ – неперервні справа дійсні функції обмеженої варіації на проміжку $[0,\ell]$, $b(x)$ – неспадна функція, $\lambda(x) > 0$, $\lambda^{-1}(x)$ – обмежена і вимірна функція на проміжку $[0,\ell]$; функції $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – неперервні на відрізку $[0,\ell]$; функції $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ – двічі неперервно диференційовні для $t \ge 0$; p_1, p_2, q_1, q_2 – дійсні числа, $p_1^2 + p_2^2 > 0$, $q_1^2 + q_2^2 > 0$, $p_1 p_2 \le 0$, $q_1 q_2 \ge 0$. Штрихами у формулах $a(x) = b'(x)$, $f(x) = r'(x)$ позначено узагальнене диференціювання, а тому $a(x)$ і $f(x)$ є мірами, тобто узагальненими функціями нульового порядку над простором неперервних фінітних функцій [8, гл. 4, §1]. В (1) $\lambda(x)$ – модуль Юнга, $a(x)$ – густина, $f(x)$ – зовнішня сила, а зміщення u залежить від координати x і часу t. Крайові умови (2) відповідають пружному закріпленню на кінцях проміжку.

Розв'язок задачі (1)–(3) шукатимемо у вигляді суми двох функцій:

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t). \tag{4}$$

Якщо одну з функцій v чи w вибрати спеціальним чином, тоді інша функція визначатиметься однозначно.

2. Крайова квазістаціонарна задача для $v(x,t)$. Визначимо $v(x,t)$ як розв'язок крайової задачі

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial v}{\partial x}\right) + f(x) = 0, \tag{5}$$

$$p_1 v(0,t) + p_2 \lambda(0) v_x'(0,t) = \psi_1(t),$$

$$q_1 v(\ell,t) + q_2 \lambda(\ell) v_x'(\ell,t) = \psi_2(t), \tag{6}$$

яку отримуємо на основі задачі (1)–(3), вважаючи t параметром.

Означимо квазіпохідну: $v_x^{[1]}(x,t) \overset{\mathrm{def}}{=} \lambda(x)\frac{\partial v}{\partial x}$. Тоді $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v^{[1]}}{\lambda(x)}$ і крайові умови (6) можемо записати у вигляді

$$p_1 v(0,t) + p_2 v_x^{[1]}(0,t) = \psi_1(t),$$

$$q_1 v(\ell,t) + q_2 v_x^{[1]}(\ell,t) = \psi_2(t). \tag{7}$$

Введемо вектор $\mathbf{v} = (v, v^{[1]})^\top$ і зведемо рівняння (5) до системи

$$\begin{pmatrix} v \\ v^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ v^{[1]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -f(x) \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Крайові умови (7) також подамо у векторній формі:

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}(0,t) + \mathbf{Q} \cdot \mathbf{v}(\ell,t) = \mathbf{\Gamma}(t), \tag{9}$$

де

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_1 & q_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}(t) = \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що матриця Коші $\mathbf{B}(x,s)$ однорідної системи

$$\begin{pmatrix} v \\ v^{[1]} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda(x)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ v^{[1]} \end{pmatrix}$$

має вигляд

$$\mathbf{B}(x,s)=\begin{pmatrix}1 & \sigma(x,s)\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \sigma(x,s)=\int_s^x \frac{dt}{\lambda(t)}.$$

Відомо [4, §15], що розв'язок довільної початкової задачі $v(x_0,t)=v_0$, $v^{[1]}(x_0,t)=v_1$, $x_0\in[0,\ell]$, для рівняння (5) існує і є єдиним у класі абсолютно неперервних функцій, а його квазіпохідна $v^{[1]}$ має обмежену варіацію за змінною x на проміжку $[0,\ell]$.

Запишемо розв'язок однорідної системи:

$$\mathbf{v}(x,t)=\mathbf{B}(x,0)\mathbf{v}_0+\int_0^x \mathbf{B}(x,s)\,d\mathbf{R}(s),$$

де

$$\mathbf{v}_0=\mathbf{v}(0,t),\qquad \mathbf{R}(s)=\begin{pmatrix}0\\ -r(s)\end{pmatrix}.$$

Знайдемо вектор $\mathbf{v}_0$. З крайових умов (9) маємо:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{v}_0+\mathbf{Q}\cdot\left(\mathbf{B}(\ell,0)\mathbf{v}_0+\int_0^\ell \mathbf{B}(\ell,s)\,d\mathbf{R}(s)\right)=\mathbf{\Gamma}(t),$$

звідки

$$\mathbf{v}_0=\left(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}(\ell,0)\right)^{-1}\cdot\left(\mathbf{\Gamma}(t)-\mathbf{Q}\cdot\int_0^\ell \mathbf{B}(\ell,s)\,d\mathbf{R}(s)\right).$$

Отже,

$$\mathbf{v}(x,t)=\mathbf{B}(x,0)\cdot\left(\mathbf{P}+\mathbf{Q}\cdot\mathbf{B}(\ell,0)\right)^{-1}\cdot\left(\mathbf{\Gamma}(t)-\mathbf{Q}\cdot\int_0^\ell \mathbf{B}(\ell,s)\,d\mathbf{R}(s)\right)+$$

$$+\int_0^x \mathbf{B}(x,s)\,d\mathbf{R}(s). \tag{10}$$

3. Змішана задача для $w(x,t)$. Підставимо формулу (4) в рівняння (1):

$$a(x)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)+f(x).$$

З огляду на (5) маємо рівняння

$$a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right)-a(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{11}$$

Згідно з формулою (10) похідна $\partial^2 v/\partial t^2$ є неперервною функцією змінної x на відрізку $[0,\ell]$, а тому останній доданок у рівнянні (11) є коректним.

Крайові умови для функції w визначаємо з умов (2), враховуючи (4):

$$p_1 v(0,t)+p_2 v^{[1]}(0,t)+p_1 w(0,t)+p_2 w^{[1]}(0,t)=\psi_1(t),$$

$$q_1 v(\ell,t)+q_2 v^{[1]}(\ell,t)+q_1 w(\ell,t)+q_2 w^{[1]}(\ell,t)=\psi_2(t),$$

де $w^{[1]}(x,t)=\lambda(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}$ – квазіпохідна. З огляду на умови (6) отримуємо:

$$p_1 w(0,t)+p_2 w^{[1]}(0,t)=0,$$

$$q_1 w(\ell, t) + q_2 w^{[1]}(\ell, t) = 0\,. \tag{12}$$

Аналогічно визначаємо початкові умови

$$w(x,0) = \varphi_1(x) - v(x,0) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\varphi}_1(x)\,,$$

$$w'_t(x,0) = \varphi_2(x) - v'_t(x,0) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\varphi}_2(x)\,. \tag{13}$$

4. Метод Фур'є та задача на власні значення. Шукаємо нетривіальні розв'язки однорідного диференціального рівняння

$$a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

з крайовими умовами (12) у вигляді

$$w(x,t) = \sin(\omega t + \varepsilon) X(x)\,, \tag{14}$$

де ω – параметр, ε – константа, а $X(x)$ – деяка функція. Тоді однорідне рівняння набуває вигляду

$$-\omega^2 a(x)\sin(\omega t + \varepsilon) X(x) = \big(\lambda(x) X'(x)\big)' \sin(\omega t + \varepsilon)\,,$$

звідки отримуємо квазідиференціальне рівняння

$$\big(\lambda(x) X'(x)\big)' + \alpha a(x) X(x) = 0, \qquad \alpha = \omega^2\,. \tag{15}$$

Підставляючи формулу (14) у крайові умови (12), отримуємо

$$p_1 X(0) + p_2 X^{[1]}(0) = 0\,,$$

$$q_1 X(\ell) + q_2 X^{[1]}(\ell) = 0\,. \tag{16}$$

Позначимо через α_k власні значення крайової задачі (15), (16), а через $X_k(\alpha_k, x)$ – відповідні їм власні функції, $k = 1, 2, \ldots, \infty$.

Відомо [2], що всі власні значення α_k крайової задачі (15), (16) є дійсними, їх є зліченна кількість, а їхня множина не має скінченної граничної точки. Власні функції $X_k(\alpha_k, x)$, які відповідають різним власним значенням, є ортогональними у тому розумінні, що

$$\int_0^\ell X_m(\alpha_m, x) X_n(\alpha_n, x)\, db(x) = 0, \qquad \alpha_m \neq \alpha_n\,.$$

Доведемо тепер, що всі власні значення α_k крайової задачі (15), (16) є невід'ємними при накладених у параграфі 1 обмеженнях на коефіцієнти.

Для цього помножимо обидві частини рівняння

$$\big(\lambda(x) X'_k(x)\big)' + \alpha_k a(x) X_k(x) = 0$$

на $X_k(x)$:

$$\big(\lambda(x) X'_k(x)\big)' X_k(x) + \alpha_k a(x) X_k^2(x) = 0\,.$$

Далі, враховуючи, що $X_k^{[1]}(x) = \lambda(x) X'_k(x)$, після перетворень отримуємо:

$$\alpha_k a(x) X_k^2(x) = -\big(X_k^{[1]}(x) X_k(x)\big)' + X_k^{[1]}(x) X'_k(x)\,.$$

Зінтегруємо обидві частини отриманого співвідношення в межах від 0 до ℓ:

$$\alpha_k \int_0^\ell X_k^2(x)\, db(x) = -X_k^{[1]}(\ell) X_k(\ell) + X_k^{[1]}(0) X_k(0) + \int_0^\ell \lambda(x)\big(X'_k(x)\big)^2 dx\,. \tag{17}$$

Оскільки [4, §10] функції $X_k(x)$ є абсолютно неперервними, а їхні квазіпохідні $X_k^{[1]}(x)$ мають обмежену варіацію на проміжку $[0,\ell]$, всі наведені перетворення мають сенс.

Обидва інтеграли у формулі (17) є невід'ємними. Якщо $p_1 = 0$ або $p_2 = 0$, то $X_k^{[1]}(0)X_k(0) = 0$. Якщо $p_1 p_2 < 0$, то з першої умови (16) маємо $X_k^{[1]}(0) = -\frac{p_1}{p_2} X_k(0)$, тому $X_k^{[1]}(0)X_k(0) = -\frac{p_1}{p_2} X_k^2(0) \geq 0$. Аналогічно, якщо $q_1 = 0$ або $q_2 = 0$, то $X_k^{[1]}(\ell)X_k(\ell) = 0$, у протилежному випадку $X_k^{[1]}(\ell)X_k(\ell) = -\frac{q_1}{q_2} X_k^2(\ell) \leq 0$. Отже, зі співвідношення (17) випливає, що всі $\alpha_k \geq 0$. Тоді всі $\omega_k = \pm\sqrt{\alpha_k}$ є дійсними.

5. Метод власних функцій. Будемо шукати $w(x,t)$ у вигляді ряду

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(\alpha_k, x), \tag{18}$$

де $X_k(\alpha_k, x)$ − власні функції задачі (15), (16). Підставимо формулу (18) у рівняння (11):

$$a(x)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k\right)\right) - a(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Тоді у припущенні рівномірної збіжності ряду (18) і рядів, отриманих з нього почленним диференціюванням за x і за t, маємо

$$a(x)\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t)X_k = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)\left(\lambda(x)X_k'\right)' - a(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Оскільки з огляду на рівняння (15) виконується рівність

$$\left(\lambda(x)X_k'\right)' = -\alpha_k a(x) X_k,$$

то

$$a(x)\sum_{k=1}^{\infty} T_k''(t)X_k = -\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k T_k(t) a(x) X_k - a(x)\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(T_k''(t) + \alpha_k T_k(t)\right)X_k = -\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \tag{19}$$

Розвинемо відому функцію $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ в ряд за власними функціями задачі (15), (16):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k(t) X_k(\alpha_k, x), \tag{20}$$

де

$$d_k(t) = \frac{1}{\|X_k\|}\int_0^{\ell} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} X_k(\alpha_k, x)\, db(x), \qquad \|X_k\| = \int_0^{\ell} X_k^2(\alpha_k, x)\, db(x).$$

Підставляючи (20) в (19), отримуємо:

$$T_k''(t) + \omega_k^2 T_k(t) = -d_k(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{21}$$

З формул (13) і (18) маємо:

$$w(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) X_k(\alpha_k, x) \equiv \tilde{\varphi}_1(x),$$

$$w'_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} T'_k(0) X_k(\alpha_k, x) \equiv \tilde{\varphi}_2(x).$$

Розвинемо функції $\tilde{\varphi}_1(x)$ і $\tilde{\varphi}_2(x)$ в ряди за власними функціями:

$$\tilde{\varphi}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{1,k} X_k(\alpha_k, x), \quad \varphi_{1,k} = \frac{1}{\|X_k\|} \int_0^{\ell} \tilde{\varphi}_1(x) X_k(\alpha_k, x)\, db(x),$$

$$\tilde{\varphi}_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{2,k} X_k(\alpha_k, x), \quad \varphi_{2,k} = \frac{1}{\|X_k\|} \int_0^{\ell} \tilde{\varphi}_2(x) X_k(\alpha_k, x)\, db(x).$$

Отже,

$$T_k(0) = \varphi_{1,k}, \quad T'_k(0) = \varphi_{2,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, \infty. \tag{22}$$

Тоді для всіх натуральних k маємо задачі Коші (21), (22) для звичайних диференціальних рівнянь.

Загальні розв'язки лінійних однорідних диференціальних рівнянь

$$T''_k(t) + \omega_k^2 T_k(t) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \infty,$$

подаються формулами

$$T_{0,k}(t) = C_{1,k} \sin \omega_k t + C_{2,k} \cos \omega_k t,$$

де $C_{1,k}$, $C_{2,k}$ – довільні сталі. Користуючись методом варіації довільних сталих, шукаємо загальні розв'язки лінійних неоднорідних рівнянь (21) у вигляді

$$T_k(t) = C_{1,k}(t) \sin \omega_k t + C_{2,k}(t) \cos \omega_k t,$$

де функції $C_{1,k}(t)$, $C_{2,k}(t)$ є розв'язками систем

$$C'_{1,k}(t) \sin \omega_k t + C'_{2,k}(t) \cos \omega_k t = 0,$$

$$\omega_k C'_{1,k}(t) \cos \omega_k t - \omega_k C'_{2,k}(t) \sin \omega_k t = -d_k(t).$$

Тоді за формулами Крамера

$$C'_{1,k}(t) = -\frac{d_k(t) \cos \omega_k t}{\omega_k}, \quad C'_{2,k}(t) = \frac{d_k(t) \sin \omega_k t}{\omega_k}.$$

Отже, загальні розв'язки рівнянь (21) подаються формулами

$$T_k(t) = C_{1,k} \sin \omega_k t + C_{2,k} \cos \omega_k t -$$

$$-\frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \int_0^t d_k(s) \cos \omega_k s\, ds +$$

$$+\frac{\cos \omega_k t}{\omega_k} \int_0^t d_k(s) \sin \omega_k s\, ds,$$

де $C_{1,k}$, $C_{2,k}$ – довільні сталі.

Тепер, враховуючи початкові умови (22), знаходимо для кожного натурального числа k розв'язок відповідної задачі Коші:

$$T_k(t) = \varphi_{1,k} \cos \omega_k t + \frac{\varphi_{2,k}}{\omega_k} \sin \omega_k t -$$

$$- \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \int\limits_0^t d_k(s) \cos \omega_k s \, ds +$$

$$+ \frac{\cos \omega_k t}{\omega_k} \int\limits_0^t d_k(s) \sin \omega_k s \, ds \,.$$

Тоді за формулою (18) маємо:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_{1,k} \cos \omega_k t + \frac{\varphi_{2,k}}{\omega_k} \sin \omega_k t - \right.$$

$$- \frac{\sin \omega_k t}{\omega_k} \int\limits_0^t d_k(s) \cos \omega_k s \, ds +$$

$$\left. + \frac{\cos \omega_k t}{\omega_k} \int\limits_0^t d_k(s) \sin \omega_k s \, ds \right) X_k(\omega_k^2, x) \,.$$

Висновки. У роботі розв'язано змішану задачу для диференціального рівняння поздовжніх коливань стрижня з коефіцієнтом, заданим узагальненою похідною функції обмеженої варіації. Запропонована схема розв'язування ґрунтується на методі редукції, який дає змогу звести початкову задачу до крайової квазістаціонарної задачі з вихідними крайовими умовами та змішаної задачі з однорідними крайовими умовами. Показано, що крайова квазістаціонарна задача ефективно розв'язується із застосуванням апарату квазіпохідних, що дає змогу коректно врахувати сингулярний характер коефіцієнта та звести квазідиференціальне рівняння до системи диференціальних рівнянь першого порядку. Для розв'язання змішаної задачі з однорідними крайовими умовами використано метод Фур'є та розвинення за власними функціями допоміжної крайової задачі для квазідиференціального рівняння другого порядку. Отримано аналітичне подання розв'язку у вигляді ряду за власними функціями, що забезпечує можливість дослідження його властивостей та залежності від початкових і крайових умов. Запропонований підхід узагальнює класичні результати для рівнянь з гладкими коефіцієнтами та може бути застосований до ширшого класу задач математичної фізики, у яких матеріальні параметри описуються функціями обмеженої варіації або мають сингулярну структуру.

1. *Арсенин В. Я.* Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции. – Москва: Наука, 1966. – 368 с.
   Те саме: *Arsenin V. Ya.* Basic equations and special functions of mathematical physics. – London: Iliffe Books Ltd., 1968. – 368 p.
2. *Власій О. О., Мазуренко В. В.* Крайові задачі для системи квазідиференціальних рівнянь з розподілами у коефіцієнтах // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2009. – № 643. – С. 73–86.
3. *Карабин О. О., Тацій Р. М., Чмир О. Ю.* Схема дослідження поздовжніх коливань стрижня кусково-сталого перерізу // Зб. наук. праць «Дороги і мости». – 2019. – Вип. 19-20. – С. 147–162.
4. *Тацій Р. М., Стасюк М. Ф., Мазуренко В. В., Власій О. О.* Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Дрогобич: Коло, 2011. – 301 с.
5. *Тацій Р. М., Чмир О. Ю., Карабин О. О.* Загальні крайові задачі для моделювання поздовжніх коливань стрижня // Прикладні питання математичного моделювання. – 2020. – **3**, № 1. – С. 194–206.
   – https://doi.org/10.32782/2618-0340/2020.1-3.20.

6. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1977. – 735 с.
   Те саме: *Tikhonov A. N., Samarskii A. A.* Equations of mathematical physics. – Oxford: Pergamon Press Ltd., 1963. – 766 p.
7. *Choudhury S. A., Kishore Kumar N., Biswas P., Khan A.* Nonconforming spectral element approximation for parabolic PDE with corner singularity // Comput. Math. Appl. – 2024. – **167**. – P. 54–73.
   – https://doi.org/10.1016/j.camwa.2024.04.029.
8. *Halanay A., Wexler D.* Teoria Calitativă a Sistemelor cu Impulsuri (in Romanian). – București: Editura Academiei Republicii Socialiste România, 1968. – 312 p.
9. *Makhnei O. V.* Mixed problem for the singular partial differential equation of parabolic type // Карпат. мат. публікації. – 2018. – **10**, No. 1. – P. 165–171.
   – https://doi.org/10.15330/cmp.10.1.165-171.
10. *Shavlakadze N., Odishelidze N., Pachulia B., Criado-Aldeanueva F.* Dynamical boundary value problem for a viscoelastic half-space with cut // Z. Angew. Math. Phys. – 2025. – **76**. – Article No. 49.
   – https://doi.org/10.1007/s00033-025-02428-7.
11. *Tatsij R. M., Chmyr O. Yu., Karabyn O. O.* The total first boundary value problem for equation of hyperbolic type with piecewise constant coefficients and δ-singularities // Дослідження в математиці і механіці. – 2019. – **24**, No. 1(33). – P. 86–102.
12. *Tatsij R., Karabyn O., Chmyr O., Malets I., Smotr O.* General scheme of modeling of longitudinal oscillations in horizontal rods // In: Lecture Notes in Computational Intelligence and Decision Making: Proc. of. Int. Sci. Conf. “ISDMPCI 2021” / S. Babichev, V. Lytvynenko (eds). – Lecture Notes on Data Engineering and Communications Technologies. – Vol. 77. – Cham: Springer, 2022.
   – https://doi.org/10.1007/978-3-030-82014-5_54.
13. *Wyld H. W.* Mathematical methods for physics. – Boca Raton: CRC Press, 2021. – xxiv+452 p.

MIXED PROBLEM FOR A SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATION FOR LONGITUDINAL VIBRATIONS OF A ROD

A scheme is suggested for solving a mixed problem for a differential equation for longitudinal vibrations of a rod with a coefficient that is the generalized derivative of a function of bounded variation. A solution to this problem is sought by the reduction method, which allows for reducing it to two problems, i.e. the quasi-stationary boundary value problem with original boundary conditions and the mixed problem with homogeneous boundary conditions. The first of these problems is solved by introducing a quasi-derivative. To solve the second problem, the Fourier method and the expansion in terms of eigenfunctions of some boundary value problem for a second-order quasi-differential equation are used.

Key words: *mixed boundary value problem, longitudinal vibrations of a rod, quasi-derivative, singular differential equation.*

Прикарпат. нац. ун-т ім. Василя Стефаника,
Івано-Франківськ

Одержано
07.04.24