

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНЬ ТА ЕФЕКТИВНИХ ПРУЖНИХ СТАЛИХ ДЛЯ КОМПОЗИТНИХ ПЛАСТИНОК ІЗ ДВОПЕРІОДИЧНИМИ СИСТЕМАМИ ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Розроблено методикку розрахунку напружено-деформованого стану композитних пластинок з двоперіодичною системою жорстких включень. Визначення напружень та ефективних пружних сталей виконано на основі сингулярних інтегральних рівнянь з використанням дзета-функцій Веєрштрасса. Досліджено напруження у пластинках з еліптичними і прямокутними включеннями із закругленими вершинами. Розраховано ефективні пружні сталі для пластинок з основними періодами і включеннями різних форм. Обчислено напруження у пластинках, підкріплених іншими пластинами або стрижнями за допомогою заклепок.

Ключові слова: композитні пластинки, двоперіодичні системи включень, ефективні пружні сталі, напруження, метод інтегральних рівнянь.

Двоперіодичні задачі теорії пружності виникають при дослідженні напружено-деформованого стану композитних елементів конструкцій, послаблених системами отворів і тріщин або підсилених армованими елементами. Пластинчасті елементи конструкцій, підкріплені жорсткішими включеннями, використовують у різних галузях промисловості. Включення збільшують жорсткість елементів конструкцій, що необхідно враховувати на етапах їхнього проектування та експлуатації.

У зв'язку з широким застосуванням композитних матеріалів, які містять системи армованих елементів, актуальним є проблема побудови розв'язків двоперіодичних задач для анізотропних тіл з включеннями. При розв'язуванні таких задач необхідно враховувати, що напруження в пластинках описуються періодичними функціями, а переміщення – квазіперіодичними. Крім того, в двоперіодичних задачах задають усереднені напруження в основному паралелограмі періодів.

Задачі про дослідження напружено-деформованого стану (НДС) пластинок з включеннями вичерпно вивчено для *ізотропних* матеріалів. Ретельно досліджено ізотропні пластинки з коловими межами з використанням методу тригонометричних рядів [1]. Двоперіодичні задачі для включень складної форми досліджували за допомогою методу граничних елементів в [4, 12, 13]. Окремі класи двоперіодичних задач розв'язували з використанням класичного методу інтегральних рівнянь. У роботі [3] інтегральні рівняння записано відносно невідомих величин на зовнішній межі ґратки та на межі включення. Детально розроблено методи знаходження ефективних пружних сталей ізотропних матеріалів пластинок. Такі дослідження дають змогу спростити в цілому розрахунок НДС пластинок, які містять велику кількість періодично розташованих включень. Методи знаходження ефективних пружних сталей у пластинках із включеннями різної форми розглянуто в праці [3].

Двоперіодичні задачі для *анізотропних* матеріалів розглядали значно менше (див., зокрема [5, 9, 14]). Тонкі включення в анізотропних тілах досліджували у праці [2]. Малодослідженими залишаються питання розрахунку ефективних пружних сталей для композитних пластинчастих елементів конструкцій з двоперіодичними системами включень [9].

[✉] marta.o.maksymovych@lpnu.ua

У роботі [7] запропоновано загальний підхід до розв'язування двоперіодичних задач для ізотропних пластинок за допомогою методу інтегральних рівнянь. Інтегральні зображення розв'язку записано через квазіперіодичні функції Веєрштрасса, що дало змогу одночасно забезпечити періодичність розподілу напружень біля отворів і включень та квазіперіодичність переміщень. У пропонованій роботі на основі підходу [7] побудовано інтегральні рівняння для анізотропних пластинок з жорсткими включеннями, виконано дослідження напружень біля включень різної форми та розроблено методику розрахунку ефективних пружних сталих матеріалу.

1. Постановка задачі. Розглядаємо двоперіодичну задачу для нескінченної анізотропної пластинки, яка в основному періоді містить систему J включень, межі яких розміщені вздовж кривих L_j , $j = 1, \dots, J$. Приймаємо, що включення є абсолютно жорсткими, на межі поділу включень і пластинки виконуються умови ідеального механічного контакту, а також є відомими усереднені напруження в основному періоді $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\tau}_{xy}$. Розробимо методику розрахунку напружень біля включень і знаходження ефективних пружних сталих для таких пластинок. Використаємо метод комплексних потенціалів С. Г. Лехницького [8], сингулярних інтегральних рівнянь [11], а також підхід до дослідження двоперіодичних задач для анізотропних середовищ з тріщинами [10].

2. Побудова загального розв'язку задачі. Для побудови розв'язку використаємо комплексні потенціали Лехницького $\Phi(z_1)$ та $\Psi(z_2)$, де $z_i = x + s_i y$, s_i , $\text{Im } s_i > 0$, $i = 1, 2$, – корені характеристичного рівняння

$$\alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22} = 0,$$

де α_{ij} – пружні сталі, які входять в закон Гука [8].

Вважаємо, що головні вектор і момент сил, які прикладені до включень, дорівнюють нулю. Інтегральні зображення потенціалів Лехницького для нескінченної пластинки з жорсткими включеннями мають вигляд [11]

$$\Phi(z_1) = \int_L \frac{f_1}{t_1 - z_1} ds + \Phi_S(z_1), \quad \Psi(z_2) = \int_L \frac{f_2}{t_2 - z_2} ds + \Psi_S(z_2),$$

де $f_j = (p_j X + q_j Y) / (2\pi i \Delta_j)$; Φ_S , Ψ_S – потенціали для нескінченної суцільної пластинки, які відповідають прикладеному навантаженню; $L = L_1 + L_2 + \dots + L_J$; (X, Y) – вектор напружень на межі включення, який є невідомим;

$$p_i = \alpha_{11}s_i^2 + \alpha_{12} - \alpha_{16}s_i, \quad q_i = \alpha_{12}s_i + \alpha_{22}/s_i - \alpha_{26}, \quad i = 1, 2;$$

$$\Delta_1 = \alpha_{11}(s_1 - s_2)(s_1 - \bar{s}_1)(s_1 - \bar{s}_2), \quad \Delta_2 = \alpha_{11}(s_2 - s_1)(s_2 - \bar{s}_1)(s_2 - \bar{s}_2).$$

Зазначимо, що виконуються умови

$$\int_{L_j} f_{1,2}(s) ds = 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (1)$$

Періоди в основній системі координат позначимо через ω_1 , ω_2 . Перший із них будемо вважати дійсною величиною, а другий – комплексною, причому $\text{Im}(\omega_2) > 0$.

У допоміжних системах координат Oz_1 , Oz_2 [8] періоди будуть $\omega_{1,2}^{(k)}$, де

$$\omega_1^{(k)} = \omega_1, \quad \omega_2^{(k)} = x_\omega + s_k y_\omega, \quad x_\omega + i y_\omega = \omega_2, \quad k = 1, 2, \quad y_\omega > 0.$$

Для двоперіодичної задачі аналогічно, як в [1, 7, 10], використаємо зображення

$$\Phi(z_1) = \int_L f_1(s) \zeta(t_1 - z_1) ds + C_1, \quad \Psi(z_2) = \int_L f_2(s) \zeta(t_2 - z_2) ds + C_2, \quad (2)$$

де $\zeta(z_k)$ – дзета-функція Веєрштрасса [1], побудована на періодах $\omega_1^{(k)}$, $\omega_2^{(k)}$; C_1, C_2 – невідомі сталі.

Зважаючи на умови (1), а також враховуючи [1], що $\zeta(z_k + \omega_n^{(k)}) = \zeta(z_k) + \delta_n^{(k)}$, легко показати, що потенціали (2) є періодичними, а значить, періодичними є відповідні їм напруження. Тут $\delta_n^{(k)} = 2\zeta(\omega_n^{(k)}/2)$.

2.1. Визначення сталих C_1, C_2 . Для визначення сталих C_1, C_2 знайдемо вектор напружень, який діє на відрізках, паралельних до основних періодів [10]. Використаємо співвідношення для визначення сумарних значень проєкцій вектора напружень $(X_{A'B'}, Y_{A'B'})$, які діють на довільній дузі $A'B'$ [8]:

$$X_{A'B'} = 2 \operatorname{Re} [s_1 \varphi(z_1) + s_2 \psi(z_2)]_{A'B'}, \quad Y_{A'B'} = -2 \operatorname{Re} [\varphi(z_1) + \psi(z_2)]_{A'B'}. \quad (3)$$

Нехай $A'B'$ – відрізок AB довжини ω_1 , паралельний до осі Ox . Використаємо рівність

$$\varphi_{AB} = \varphi(z_1 + \omega_1^{(1)}) - \varphi(z_1) = \int_{z_1}^{z_1 + \omega_1^{(1)}} \Phi(z_1) dz_1 = \delta_1^{(1)} J_1 + C_1 \omega_1^{(1)},$$

де $J_1 = \int_L f_1(s) t_1 ds$. Тут враховано [1, 10], що

$$\int_{z_1}^{z_1 + \omega_1^{(1)}} \zeta(t_1 - z_1) dz_1 = \delta_1^{(1)} (t_1 - z_1) + \operatorname{const}.$$

Аналогічно запишемо

$$\psi_{AB} = \delta_1^{(2)} J_2 + C_2 \omega_1^{(2)}, \quad J_2 = \int_L f_2(s) t_2 ds.$$

Для правої межі BC основного паралелограма знаходимо

$$\varphi_{BC} = \delta_1^{(2)} \int_L f_1(s) (t_1 - z_1) ds + C_1 \omega_1^{(2)} = \delta_1^{(2)} J_1 + C_1 \omega_1^{(2)},$$

$$\psi_{BC} = \delta_2^{(2)} J_1 + C_2 \omega_2^{(2)}.$$

Покладемо

$$C_k = -\frac{\delta_1^{(k)}}{\omega_1^{(k)}} J_k + D_k,$$

де D_1, D_2 – невідомі сталі. Тоді, враховуючи формулу [1, 10]

$$\delta_1^{(k)} \omega_2^{(k)} - \delta_2^{(k)} \omega_1^{(k)} = 2\pi i,$$

запишемо

$$\varphi_{AB} = D_1 \omega_1^{(1)}, \quad \psi(z_2)_{AB} = D_2 \omega_1^{(2)}. \quad (4)$$

Підставляючи формули (4) у співвідношення (3), отримуємо

$$X_{AB} = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k D_k \omega_1^{(k)}, \quad Y_{AB} = -2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 D_k \omega_1^{(k)},$$

$$X_{BC} = -\frac{4\pi}{\omega_1} \operatorname{Re} i \sum_{k=1}^2 s_k J_k + 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k D_k \omega_2^{(k)},$$

$$Y_{BC} = \frac{4\pi}{\omega_1} \operatorname{Re} i \sum_{k=1}^2 J_k - 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 D_k \omega_2^{(k)}. \quad (5)$$

Враховуючи, що $\omega_2^{(k)} = x_\omega + s_k y_\omega$, маємо

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 D_k \omega_2^{(k)} &= x_\omega 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 D_k + y_\omega 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k D_k = \\ &= |\omega_2| (\sin \alpha d_0 + \cos \alpha d_1), \end{aligned}$$

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k D_k \omega_2^{(k)} = |\omega_2| (\sin \alpha d_1 + \cos \alpha d_2),$$

$$\text{де } d_m = 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k^m D_k.$$

Сумарні значення проекцій вектора напружень, які входять у формули (5) зліва, визначаються через задані усереднені напруження у паралелограмі періодів:

$$X_{AB} = -\omega_1 \hat{\tau}_{xy}, \quad Y_{AB} = -\omega_1 \hat{\sigma}_y,$$

$$X_{AB} = |\omega_2| (\hat{\sigma}_x \cos \alpha - \hat{\tau}_{xy} \sin \alpha), \quad Y_{AB} = |\omega_2| (\hat{\tau}_{xy} \cos \alpha - \hat{\sigma}_y \sin \alpha),$$

де α – кут між другим періодом ω_2 і віссю Oy .

Тоді система (5) набуде вигляду

$$d_0 = \hat{\sigma}_y, \quad d_1 = -\hat{\tau}_{xy},$$

$$\frac{4\pi}{\omega_1} \operatorname{Re} i \sum_{k=1}^2 J_k - |\omega_2| (\sin \alpha d_0 + \cos \alpha d_1) = |\omega_2| (\hat{\tau}_{xy} \cos \alpha - \hat{\sigma}_y \sin \alpha),$$

$$-\frac{4\pi}{\omega_1} \operatorname{Re} i \sum_{k=1}^2 s_k J_k + |\omega_2| (\sin \alpha d_1 + \cos \alpha d_2) = |\omega_2| (\hat{\sigma}_x \cos \alpha - \hat{\tau}_{xy} \sin \alpha).$$

Звідси отримаємо рівняння

$$d_0 = \hat{\sigma}_y, \quad d_1 = -\hat{\tau}_{xy}, \quad d_2 - \hat{\sigma}_x = \frac{1}{\omega_1 y_\omega} C, \quad \operatorname{Re} i \sum_{k=1}^2 J_k = 0,$$

$$\text{де } C = 4\pi \operatorname{Re} i \sum_{k=1}^2 s_k J_k.$$

Аналогічно, як і в [10], можна показати, що останнє з отриманих вище рівнянь задовольняється тотожно. Тоді для визначення сталих $D_{1,2}$ маємо

$$2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 D_k = \hat{\sigma}_y, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k D_k = -\hat{\tau}_{xy}, \quad 2 \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 s_k^2 D_k = \hat{\sigma}_x + \frac{1}{\omega_1 y_\omega} C.$$

Розв'язок цієї системи запишемо у вигляді

$$D_1 = \Phi_\infty + \frac{a_{11} s_1}{\omega_1 y_\omega} C + \frac{m}{\Delta_1}, \quad D_2 = \Psi_\infty + \frac{a_{11} s_2}{\omega_1 y_\omega} C + \frac{m}{\Delta_2},$$

де Φ_∞ , Ψ_∞ – потенціали для суцільної пластини, навантаженої на нескінченності зусиллями $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$, $\hat{\tau}_{xy}$; m – довільна дійсна стала.

Складові цього розв'язку з множником m відповідають повороту пластини як жорсткого цілого і тому не впливають на значення напружень. Після спрощень [10] отримаємо інтегральне співвідношення

$$C = \frac{1}{a_{11}} \int_L [X(a_{11}\xi + a_{16}\eta) + Ya_{12}\eta] ds.$$

2.2. Інтегральні рівняння. Для дзета-функції Веєрштрасса використаємо зображення [10]

$$\zeta(z) = \frac{\delta_1}{\omega_1} z + S(z; \omega_1, \omega_2),$$

де

$$S(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{\pi}{\omega_1} \sum_{n=-N}^N \operatorname{ctg} \frac{\pi(z + n\omega_2)}{\omega_1} \quad \text{при} \quad N \rightarrow \infty.$$

Підставивши знайдені величини у співвідношення (2), для потенціалів Лехницького отримуємо інтегральні подання у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \frac{1}{2\pi i \Delta_1} \int_L (p_1 X + q_1 Y) S(t_1 - z_1; \omega_1, \omega_2) ds + \frac{a_{11} s_1}{\Delta_1} P + \Phi_\infty, \\ \Psi(z_2) &= \frac{1}{2\pi i \Delta_2} \int_L (p_2 X + q_2 Y) S(t_2 - z_2; \omega_1, \omega_2) ds + \frac{a_{11} s_2}{\Delta_2} P + \Psi_\infty, \end{aligned} \quad (6)$$

де

$$P = \frac{1}{y_\omega \omega_1 a_{11}} \int_L [X(a_{11}\xi + a_{16}\eta) + Ya_{12}\eta] ds.$$

Підставляючи подання (6) у граничні умови на межах включень, отримуємо сингулярні інтегральні рівняння відносно невідомих функцій X , Y . Отримані інтегральні рівняння для двоперіодичної задачі мають такий самий вигляд, як і для інших задач теорії пружності для анізотропних пластинок із включеннями [11], тому вони можуть бути розв'язані відомими числовими методами з використанням квадратурних формул типу Гаусса для регулярних і сингулярних інтегралів [11].

Для обчислення ядра інтегральних рівнянь зручно користуватись формулою [10]

$$S(z; \omega_1, \omega_2) = \frac{\pi}{\omega_1} \left\{ \operatorname{ctg} z' + 4 \sin(2z') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(1 - \lambda^n e^{2iz'}) (1 - \lambda^n e^{-2iz'})} \right\},$$

де $z' = \frac{\pi}{\omega_1} z$, $\lambda = \exp\left(2i\pi \frac{\omega_2}{\omega_1}\right)$, причому $|\lambda| < 1$.

3. Визначення ефективних пружних сталей. При розгляді перфорованих пластин, крім оцінки напружень в основному періоді, важливо визначити деформування пластин загалом. Усереднені деформації можуть бути визначені на основі ефективних пружних сталей. Ці сталі знаходимо на основі деформацій сторін паралелограма періодів. Для їхнього визначення використаємо співвідношення для приростів переміщень на дузі $A'B'$ [8]

$$u_{A'B'} = 2 \operatorname{Re} [p_1 \varphi(z_1) + p_2 \psi(z_2)]_{A'B'},$$

$$v_{A'B'} = 2 \operatorname{Re} [q_1 \varphi(z_1) + q_2 \psi(z_2)]_{A'B'},$$

у які підставляємо межі AB і BC та формули (4).

На основі отриманих формул детальніше запишемо видовження нахилених меж ґратки, які відповідають потенціалам (2). Подамо їх у вигляді

$$u_{BC}^J = -\frac{1}{\omega_1} W_1, \quad v_{BC}^J = -\frac{1}{\omega_1} W_2,$$

де

$$W_1 = 4\pi \operatorname{Re} i(p_1 J_1 + p_2 J_2), \quad W_2 = 4\pi \operatorname{Re} i(q_1 J_1 + q_2 J_2).$$

Звідси після спрощень отримаємо

$$W_1 = \int_L (\gamma_2 X + \gamma_4 Y) \eta ds, \quad W_2 = \int_L (\gamma_4 X + \gamma_5 Y) \eta ds,$$

$$\gamma_2 = -a_{66} + \frac{a_{16}^2}{a_{11}}, \quad \gamma_4 = -a_{26} + \frac{a_{12} a_{16}}{a_{11}}, \quad \gamma_5 = -a_{22} + \frac{a_{12}^2}{a_{11}}.$$

Видовження u_{BC}^J, v_{BC}^J опишемо через переміщення

$$u^J = -\frac{1}{\omega_1 y_\omega} W_1 y, \quad v^J = -\frac{1}{\omega_1 y_\omega} W_2 y.$$

Цим переміщенням у суцільній площині відповідають деформації

$$\varepsilon_x^J = 0, \quad \varepsilon_y^J = w_1, \quad \gamma_{xy}^J = w_2,$$

де $w_{1,2} = -W_{1,2}/(\omega_1 y_\omega)$.

У потенціалах (4) сталим $D_{1,2}$ відповідають деформації, які в суцільній пластині зумовлені зусиллями на безмежності $\widehat{\sigma}_x + P, \widehat{\sigma}_y, \widehat{\tau}_{xy}$. Тоді усереднені деформації в паралелограмі періодів можемо записати у вигляді

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}(\widehat{\sigma}_x + P) + a_{12}\widehat{\sigma}_y + a_{16}\widehat{\tau}_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{21}(\widehat{\sigma}_x + P) + a_{22}\widehat{\sigma}_y + a_{26}\widehat{\tau}_{xy} + w_2, \\ \gamma_{xy} &= a_{61}(\widehat{\sigma}_x + P) + a_{62}\widehat{\sigma}_y + a_{66}\widehat{\tau}_{xy} + w_1. \end{aligned} \quad (7)$$

Розглянемо задачу про знаходження ефективних пружних сталих. Введемо в розгляд гіпотетичний суцільний анізотропний матеріал з пружними сталими $a_{11}^*, \dots, a_{66}^*$, який при напруженнях на нескінченності $\widehat{\sigma}_x, \widehat{\sigma}_y, \widehat{\tau}_{xy}$ має деформації (7), тобто

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}^* \widehat{\sigma}_x + a_{12}^* \widehat{\sigma}_y + a_{16}^* \widehat{\tau}_{xy}, \\ \varepsilon_y &= a_{21}^* \widehat{\sigma}_x + a_{22}^* \widehat{\sigma}_y + a_{26}^* \widehat{\tau}_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= a_{61}^* \widehat{\sigma}_x + a_{62}^* \widehat{\sigma}_y + a_{66}^* \widehat{\tau}_{xy}. \end{aligned} \quad (8)$$

Для визначення пружних сталих $\{a_{ij}^*\}$ покладемо в формулах (7) і (8) $\widehat{\sigma}_x = 1, \widehat{\sigma}_y = 0, \widehat{\tau}_{xy} = 0$, і при цих напруженнях визначимо з інтегрального рівняння функції u', v' , а далі – величини $P, w_{1,2}$. Позначимо ці величини верхнім індексом «(1)». Прирівнюючи відповідні деформації у формулах (7), (8), отримуємо

$$\begin{aligned} a_{11}^* &= a_{11}(1 + P^{(1)}), & a_{21}^* &= a_{21}(1 + P^{(1)}) + w_2^{(1)}, \\ a_{61}^* &= a_{61}(1 + P^{(1)}) + w_1^{(1)}. \end{aligned}$$

Далі, покладаючи $\widehat{\sigma}_x = 0, \widehat{\sigma}_y = 1, \widehat{\tau}_{xy} = 0$ та $\widehat{\sigma}_x = 0, \widehat{\sigma}_y = 0, \widehat{\tau}_{xy} = 1$, знаходимо

$$\begin{aligned} a_{21}^* &= a_{21} + a_{11}P^{(2)}, & a_{22}^* &= a_{22} + a_{21}P^{(2)} + w_2^{(2)}, \\ a_{62}^* &= a_{62}(1 + P^{(2)}) + w_1^{(2)}, \end{aligned}$$

та

$$\begin{aligned} a_{16}^* &= a_{16} + a_{11}P^{(3)}, & a_{26}^* &= a_{26} + a_{21}P^{(3)} + w_2^{(3)}, \end{aligned}$$

$$a_{66}^* = a_{66} + a_{61}P^{(3)} + w_1^{(3)}.$$

4. Дослідження напружень біля включень. Для знаходження напружень застосуємо розроблений в [11] числовий алгоритм, який базується на використанні квадратурних формул типу Гауса для регулярних і сингулярних інтегралів. Обчислення виконано для ізотропних пластинок з модулем пружності $E = 200$ ГПа і коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$ та композитних пластин з бор-епоксиду з такими пружними сталими [6]:

$$E_x = 21 \text{ ГПа}, \quad E_y = 207 \text{ ГПа}, \quad G_{xy} = 7 \text{ ГПа}, \quad \nu_{yx} = 0.3, \quad \nu_{xy} = 0.03.$$

4.1. Тестування алгоритму визначення напружень. Як допоміжну розглянемо *ізотропну* пластину з круговими включеннями радіуса a для основного періоду у вигляді квадрата зі стороною L та ромба з періодами $w_1 = L$, $w_2 = L \exp(i2\pi/3)$. Результати обчислень за запропонованою в [11] методикою відносних нормальних напружень $\sigma_n(a,0)/p$ при розтягу пластини у вертикальному напрямку зусиллями p для різних відношень a/L наведено в табл. 1. У дужках для порівняння наведено дані з роботи [1, с. 67, 70], які отримані методом рядів. Бачимо, що обчислені різними методами результати практично збігаються.

Таблиця 1. Напруження $\sigma_n(a,0)/p$ на межі кругового включення при всесторонньому розтягу.

Форма \ a/L	0.2	0.4	0.6	0.8
Квадрат	1.513 (1.51)	1.452 (1.45)	1.395 (1.39)	1.483 (1.48)
Ромб	1.510 (1.51)	1.427 (1.43)	1.323 (1.32)	1.267 (1.27)

Розглянуто також *бор-епоксидну* пластину з квадратним включенням зі стороною a та закругленими вершинами радіуса $R = 0.25a$, яка розтягується зусиллями p у вертикальному напрямку, основний період – квадрат зі стороною L . Обчислені за алгоритмом [11] залежності від дугової координати s відносних нормальних напружень σ_n/p у пластині на межі включень для значень $a/L = 0.2, 0.3, 0.4, 0.45$ наведено на рис. 1 суцільними лініями. Тут координата s відраховується від точки $(a,0)$, а l – повна довжина межі. Штриховими лініями показано напруження для кругового включення радіуса a .

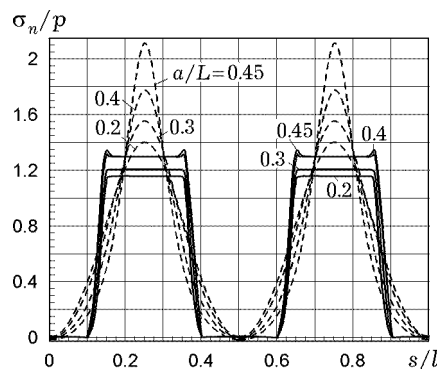


Рис. 1. Напруження на межі квадратного і кругового включення в бор-епоксидній пластинці.

На рис. 1 бачимо, що біля кругових включень виникає значно більша концентрація напружень, ніж біля квадратного включення із закругленими вершинами.

4.2. Ефективні пружні сталі. Розраховано ефективні пружні сталі для ізотропної і бор-епоксидної пластин. Розглянуто квадратний основний період, у якому розміщено *кругове* включення.

Обчислені залежності відносних пружних сталей від відношення a/L для *ізотропної пластинки* зображено на рис. 2а суцільними кривими. Штриховими лініями на рис. 2а наведено дані для ромбовидного основного періоду. Бачимо, що отримані різними методами результати практично збігаються. На рис. 2в наведено відносні максимальні нормальні напруження на межі включення.

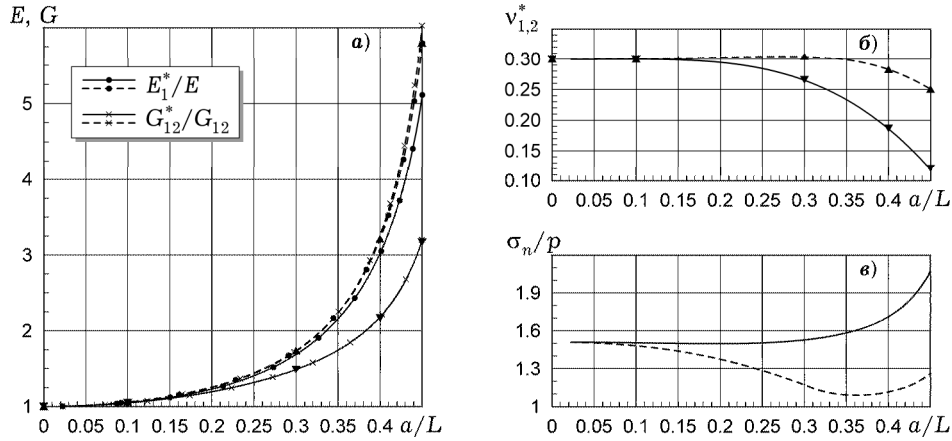


Рис. 2. Ефективні пружні характеристики ізотропної пластинки з круговими включеннями радіуса a та відносні максимальні нормальні напруження (суцільні лінії – квадратна ґратка, пунктирні лінії – ромбічна ґратка, трикутні мітки – результати роботи [1]).

На рис. 3 наведено аналогічні результати для пластинки з *бор-епоксидного матеріалу*. Трикутниками на рис. 3 відмічено обчислені в роботі [1] пружні сталі для значень $a/L = 0.3, 0.4, 0.45$.

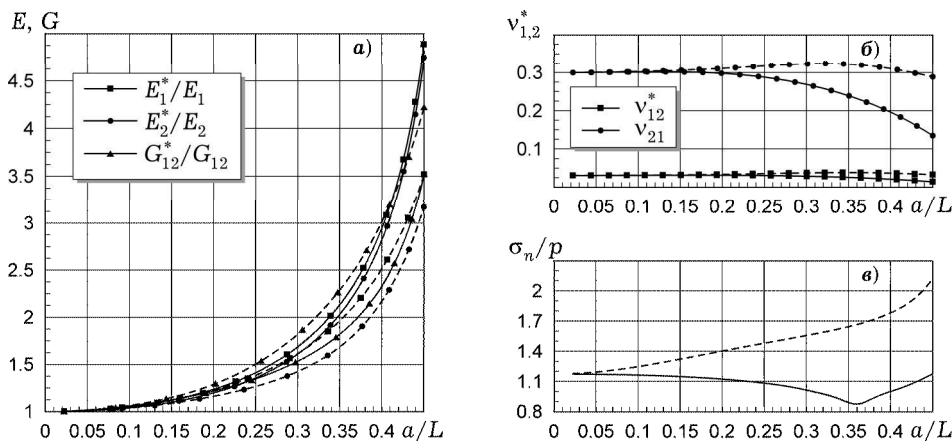


Рис. 3. Ефективні пружні сталі для бор-епоксидної пластинки з круговими включеннями.

Досліджено також випадок розміщення в квадраті основного періоду *еліптичного* включення з півосями a, b при $a = 0.4 L$. На рис. 4 зображено результати обчислень залежності від відношення b/a . Суцільні лінії відповідають випадку, коли максимальним є модуль пружності E_y , а штрихові – при максимальному модулі E_x .

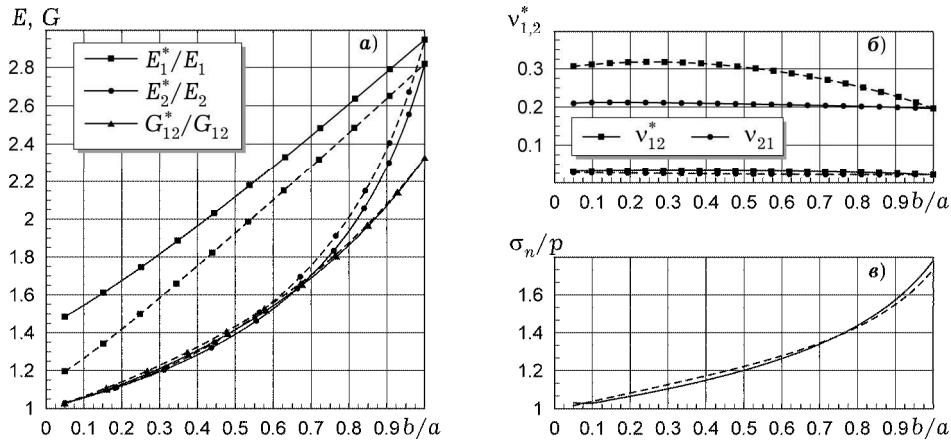


Рис. 4. Ефективні пружні сталі в бор-епоксидній пластині з еліптичним включенням.

При значеннях $b \rightarrow 0$ отримуємо тонкостінне жорстке включення. Безпосередні обчислення при малих значеннях b ускладнюються. Однак, оскільки ефективні пружні сталі змінюються плавно зі зміною відношення b/a , то для опису кривих на рис. 4 використали поліноми восьмого порядку. Коефіцієнти поліномів визначали методом найменших квадратів. На основі цього полінома обчислено значення ефективних пружних сталей при $b \rightarrow 0$. Таким чином отримано значення для прямолінійного жорсткого включення

– при $\max E_y$:

$$E_1^*/E_1 = 1.428, \quad E_2^*/E_2 = 1.013, \quad G_{12}^*/G_{12} = 1, \quad v_{12}^* = 0.206, \quad v_{21}^* = 0.297,$$

– при $\max E_x$:

$$E_1^*/E_1 = 1.136, \quad E_2^*/E_2 = 1, \quad G_{12}^*/G_{12} = 1, \quad v_{12}^* = 0.027, \quad v_{21}^* = 0.3.$$

5. Розрахунок напружень у пластинах із заклепками. Розглянемо пластинки, які з'єднані двоперіодичною системою заклепок. Нехай пластинка перебуває під дією навантажень σ_1 , σ_2 , τ_{12} на нескінченності. Підкріпимо її додатково пластинками з номерами $2, 3, \dots, M$, які приєднаємо круговими заклепками радіуса R . Приймемо, що центри заклепок розміщені в точках $(n\omega_1, m\omega_2)$, $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Позначимо товщини пластинок через h_k , пружні сталі – через $a_{ij}^{(k)}$, $k = 1, \dots, M$. Заклепки будемо моделювати жорсткими включеннями. У кожній із пластинок буде виникати двоперіодичний напружений стан, який надалі приймаємо як плоский. Позначимо усереднені напруження після з'єднання заклепками в паралелограмах періодів через $\sigma_1^{(k)}$, $\sigma_2^{(k)}$, $\tau_{12}^{(k)}$. Знайдемо напруження, які виникають у склепаних пластинках.

Для цього визначимо в кожній із пластинок ефективні пружні сталі і позначимо їх $b_{ij}^{(k)}$, $k = 1, \dots, M$. Усереднені деформації в основних періодах у всіх пластинках однакові. Позначимо їх через ε_1 , ε_2 , γ_{12} . Звідси для визначення величин $\sigma_1^{(k)}$, $\sigma_2^{(k)}$, $\tau_{12}^{(k)}$ маємо рівняння

$$B_k \sigma^{(k)} = \varepsilon, \quad k = 1, \dots, M, \quad (9)$$

де

$$B_k = \begin{pmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & b_{16}^{(k)} \\ b_{21}^{(k)} & b_{22}^{(k)} & b_{26}^{(k)} \\ b_{61}^{(k)} & b_{62}^{(k)} & b_{66}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \sigma^{(k)} = \begin{pmatrix} \sigma_1^{(k)} \\ \sigma_2^{(k)} \\ \tau_{12}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{pmatrix}.$$

Додаткові рівняння отримуємо з умов рівноваги

$$\sum_{k=1}^M h_k \sigma^{(k)} = h_1 \sigma, \quad (10)$$

де $\sigma^\top = (\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \tau_{12})$.

Із рівнянь (9) запишемо

$$\sigma^{(k)} = B_k^{-1} \varepsilon. \quad (11)$$

Підставляючи $\sigma^{(k)}$ у формулу (10), отримуємо рівняння

$$B \varepsilon = \sigma,$$

де $B = \sum_{k=1}^M H_k B_k^{-1}$, $H_k = h_k/h_1$.

Таким чином, знаходимо $\varepsilon = B^{-1} \sigma$, і далі за формулою (11) – усереднені напруження в усіх пластинах:

$$\sigma^{(k)} = B_k^{-1} B^{-1} \sigma, \quad k = 1, \dots, M.$$

На основі знайдених для кожної з пластин усереднених напружень визначаємо напруження за наведеним вище алгоритмом.

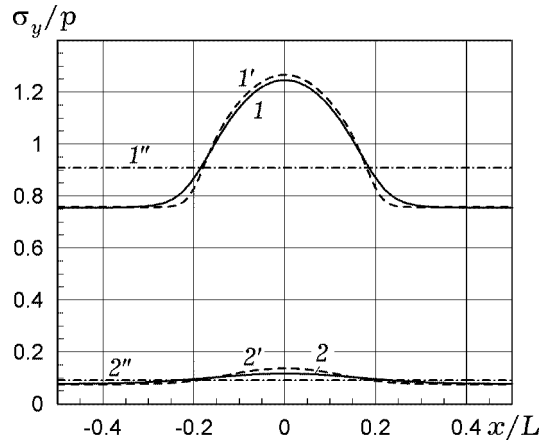


Рис. 5. Напруження у двох приклепаних бор-епоксидних пластинках.

Розрахунки виконано для двох бор-епоксидних пластинок, склепаних двоперіодичною системою заклепок на відстані L у вертикальному та горизонтальному напрямках. Систему координат вибрано так, що в першій пластині максимальним є модуль пружності E_y , а в другій – E_x , заклепка розміщена в центрі квадрата періодів, її радіус $R = 0.2L$. Приймаємо, що пластинки мають однакові товщини h , і пластина розтягується у вертикальному напрямку при $\sigma_2 = p$. Розраховані в основному паралелограмі періодів усереднені напруження будуть такими:

$$\begin{aligned} \sigma_1^{(1)} &= 0.0229p, & \sigma_2^{(1)} &= 0.9066p, & \tau_{12}^{(1)} &= 0, \\ \sigma_1^{(2)} &= -0.0229p, & \sigma_2^{(2)} &= 0.0934p, & \tau_{12}^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

За цими усередненими напруженнями обчислено напруження в основному періоді при $y = L/2$. Ці напруження у першій пластині зображено на рис. 5 суцільною кривою **1**, а в другій – кривою **2**.

Штриховим лініям **1'**, **2'** на рис. 5 відповідають напруження, обчислені у перерізі $y = 0.25L$.

Подібні обчислення виконано також у випадку *склеєних* бор-епоксидних пластин. На основі [8] визначено усереднені напруження в основному паралелограмі періодів у таких пластинах при дії зусиль на нескінченності

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(1)} &= 0.0226p, & \sigma_2^{(1)} &= 0.9091p, & \tau_{12}^{(1)} &= 0, \\ \sigma_1^{(2)} &= -0.0226p, & \sigma_2^{(2)} &= 0.0909p, & \tau_{12}^{(2)} &= 0.\end{aligned}$$

Бачимо, що усереднений напружений стан у склепаних і склеєних пластинах виявився практично однаковим. На рис. 5 напруження, які виникають у склеєних пластинах, показано штрихпунктирними кривими *1''*, *2''*.

Аналогічні обчислення виконано для випадку, коли перша пластинка є з бор-епоксидного матеріалу, а друга є ізотропною з модулем пружності $E = 200$ ГПа і коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$ (рис. 6). Розраховано усереднені напруження в основному паралелограмі періодів у пластинках:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(1)} &= 0.0002p, & \sigma_2^{(1)} &= 0.5029p, & \tau_{12}^{(1)} &= 0, \\ \sigma_1^{(2)} &= 0.0002p, & \sigma_2^{(2)} &= 0.4971p, & \tau_{12}^{(2)} &= 0.\end{aligned}$$

Для порівняння наведемо усереднені напруження у випадку, коли такі пластини з'єднані шляхом приклеювання:

$$\begin{aligned}\sigma_1^{(1)} &= 0.0001p, & \sigma_2^{(1)} &= 0.5095p, & \tau_{12}^{(1)} &= 0, \\ \sigma_1^{(2)} &= -0.0001p, & \sigma_2^{(2)} &= 0.4905p, & \tau_{12}^{(2)} &= 0.\end{aligned}$$

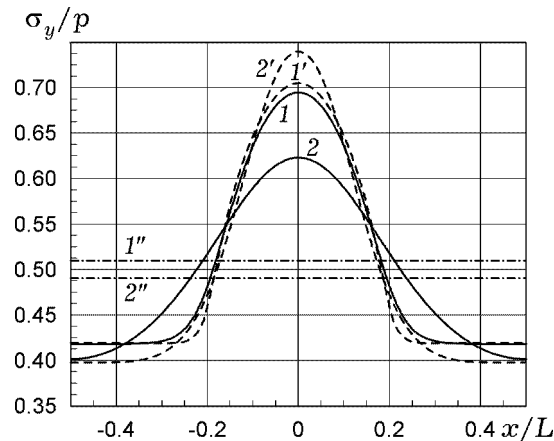


Рис. 6. Відносні напруження в перерізах приклепаних бор-епоксидної і ізотропної пластин.

Максимальні відносні напруження на межі включення у пластинах $\sigma_y/p = 0.7049$, $\sigma_y/p = 0.7444$. Вони близькі до напружень, які виникають на прямій $y = L/4$ в її центрі. Штрихпунктирними кривими *1''*, *2''* на рис. 6 зображено напруження, які виникають у склеєних пластинах.

6. Пластина, підкріплена стрижнями. Розглянемо задачу про визначення напружень у пластині, яка підкріплена стрижнями, що розміщені паралельно до координатних осей Ox і Oy за допомогою двоперіодичної системи кругових заклепок радіуса R . Нехай пластина перебуває під дією навантажень на нескінченності σ_1 , σ_2 , τ_{12} . Приймемо, що центри заклепок розміщені в точках (nw_1, mw_2) , $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Позначимо пружні сталі пластини через $a_{ij}^{(1)}$, її товщину – через h_1 . Заклепки будемо моделювати жорсткими включеннями. У пластині буде виникати двоперіодичний напружений стан, який надалі приймаємо як плоский. Позначимо усереднені на-

пруження після з'єднання заклепками в паралелограмах періодів через $\sigma_1^{(1)}$, $\sigma_2^{(1)}$, $\tau_{12}^{(1)}$. Стрижні, паралельні до осі Ox , мають площу поперечного перерізу S_1^B , модуль пружності E_1^B . Аналогічні величини для стрижнів, паралельних до координатної осі Oy , позначимо через S_2^B , E_2^B . Знайдемо напруження, які виникають у пластині і в стрижнях.

Для цього визначимо в пластині ефективні пружні сталі і позначимо їх через $b_{ij}^{(1)}$. Усереднені деформації в основних періодах пластини і в стрижнях однакові. Тоді на основі закону Гука отримуємо рівняння для визначення напружень $\sigma_1^{(1)}$, $\sigma_2^{(1)}$, $\tau_{12}^{(1)}$ у пластині і σ_1^B , σ_2^B – в стрижнях:

$$b_{11}^{(1)}\sigma_1^{(1)} + b_{12}^{(1)}\sigma_2^{(1)} = \sigma_1^B/E_1^B,$$

$$b_{21}^{(1)}\sigma_1^{(1)} + b_{22}^{(1)}\sigma_2^{(1)} = \sigma_2^B/E_2^B.$$

Додаткові рівняння отримуємо з умов рівноваги

$$S_1\sigma_1^{(1)} + S_1^B\sigma_1^B = S_1\sigma_1,$$

$$S_2\sigma_2^{(1)} + S_2^B\sigma_2^B = S_2\sigma_2,$$

де $S_1 = h_1\omega_1$, $S_2 = h_1|\omega_2|$.

Розрахунок виконано для бор-епоксидної пластини, коли відстань між вертикальними і горизонтальними стрижнями дорівнює L , $E_1^B = E_2^B = 200$ ГПа, $\sigma_1 = \tau_{12} = 0$, $\sigma_2 = p$. Обчислені усереднені напруження у бор-епоксидній пластині із заклепками наведено в табл. 2.

Таблиця 2. Усереднені напруження в бор-епоксидній пластині із заклепками.

S_1^B/S_1	$R = 0.1L$			
	$\sigma_1^{(1)}/p$	$\sigma_2^{(1)}/p$	σ_1^B/p	σ_2^B/p
0.05	0.0094	0.9540	0.1871	0.9191
0.1	0.0135	0.9123	0.1353	0.8775
0.2	0.0167	0.8389	0.0836	0.8057
0.3	0.0175	0.7765	0.0583	0.7451
0.4	0.0174	0.7227	0.0435	0.6932
0.5	0.0170	0.6759	0.0340	0.6482
0.6	0.0164	0.6348	0.0274	0.6086
0.7	0.0158	0.5985	0.0226	0.5736
0.8	0.0152	0.5660	0.0190	0.5425
0.9	0.0146	0.5369	0.0162	0.5145
1.0	0.0140	0.5107	0.0141	0.4894

Видно, що збільшення площі приклепаних стрижнів дає змогу знизити рівень напружень у пластині.

Висновки. Розроблено методику визначення напруженого стану анізотропної пластини з двоперіодичною системою жорстких включень. Записано співвідношення для знаходження ефективних пружних сталей. Методика базується на методі інтегральних рівнянь, ядра в яких визначаються через дзета-функції Вєрштрасса.

Проведено тестування розробленого алгоритму, яке свідчить про достовірність розрахунку напружень і ефективних пружних сталей. Досліджено напруження на межі квадратного і кругового включень в бор-епоксидній пластині. Встановлено, що біля кругових включень виникає значно більша

концентрація напружень, ніж біля квадратного включення із закругленими вершинами.

Розраховано ефективні пружні сталі для анізотропної пластини з квадратними ґратками, в яких розміщені кругові або квадратні включення. Для бор-епоксидної пластини ефективні пружні модулі пружності при кругових включеннях дещо більші, ніж при квадратних, які мають заокруглені вершини. На основі розробленого підходу досліджено напруження у бор-епоксидній пластині, яка з'єднана двоперіодичною системою заклепок з іншою бор-епоксидною пластиною з різностороннім армуванням або з ізотропною пластиною. Заклепки моделювались круговими жорсткими включеннями. Аналогічні дослідження виконано для пластини, підкріпленої стрижнями, які розміщені паралельно до координатних осей Ox і Oy за допомогою двоперіодичної системи заклепок.

1. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Перфорированные пластины и оболочки. – Москва: Наука, 1970. – 556 с.
2. Пастернак Я. М., Сулим Г. Т. Плоская задача теории упругости анизотропного тела с двоякопериодическими системами тонких неоднородностей // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2014. – № 2. – С. 58–72.
Te same: *Pasternak Ya. M., Sulim G. T. Plane problem of elasticity for an anisotropic body with doubly periodic systems of thin inhomogeneities // Mech. Solids. – 2014. – 49, No. 2. – P. 162–174.*
– <https://doi.org/10.3103/S002565441402006X>.
3. Bai Y., Dong C. Y., Liu Z. Y. Effective elastic properties and stress states of doubly periodic array of inclusions with complex shapes by isogeometric boundary element method // *Compos. Struct.* – 2015. – **128**. – P. 54–69.
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.061>.
4. Dong C. Y., Lee K. Y. Boundary element implementation of doubly periodic inclusion problems // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2006. – **30**, No. 8. – P. 662–670.
– <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2006.03.007>.
5. Jafari M., Moussavian H., Chaleshtari M. H. B. Optimum design of perforated orthotropic and laminated composite plates under in-plane loading by genetic algorithm // *Struct. Multidiscip. Optim.* – 2018. – **57**, No. 1. – P. 341–357.
– <https://doi.org/10.1007/s00158-017-1758-5>.
6. Jones R. M. *Mechanics of composite materials.* – New York: Taylor & Francis, 1999. – 554 p.
7. Koiter W. T. Stress distribution in an infinite elastic sheet with a doubly-periodic set of equal holes // In: *Boundary Problems in Differential Equations* / R. E. Langer (ed.). – Madison: University of Wisconsin Press, 1960. – P. 191–213.
8. Lekhnitskii S. G. *Anisotropic plates.* – New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1987. – xvi+534 p.
9. Liu Z. Y., Dong C. Y., Bai Y. An iterative FE-BE method and rectangular cell model for effective elastic properties of doubly periodic anisotropic inclusion composites // *Compos. Struct.* – 2015. – **124**. – P. 253–262.
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.01.021>.
10. Maksymovych O., Pasternak Ia., Sulym H., Kutsyk S. Doubly periodic cracks in the anisotropic medium with the account of contact of their faces // *Acta Mech. Autom.* – 2014. – **8**, No. 3. – P. 160–164.
– <https://doi.org/10.2478/ama-2014-0029>.
11. Maksymovych O., Podhorecki A. Determination of stresses in anisotropic plates with elastic inclusions based on singular integral equations // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2019. – **104**. – P. 364–372.
– <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.03.039>.
12. Malits P. Doubly periodic array of thin rigid inclusions in an elastic solid // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 2010. – **63**, No. 2. – P. 115–144.
– <https://doi.org/10.1093/qjmam/hbq001>.
13. Xia Y., Niu H., Zhang Z., Liu H., Wu C. Extended multiscale isogeometric analysis for mechanical simulation of two-dimensional periodic heterogeneous materials // *Compos. Struct.* – 2023. – **315**. – Article 116988.
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2023.116988>.

14. Xu Y., Tian Q., Xiao J. Doubly periodic array of coated cylindrical inclusions model and applications for nanocomposites // Acta Mech. – 2020. – **231**, No. 2. – P. 661–681. – <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02567-9>.

CALCULATION OF STRESSES AND EFFECTIVE ELASTIC CONSTANTS FOR COMPOSITE PLATES WITH DOUBLY PERIODIC SYSTEMS OF RIGID INCLUSIONS

A technique for calculating the stress-strain state of composite plates with a doubly periodic system of rigid inclusions is developed. The determination of stresses and effective elastic constants is carried out on the basis of the singular integral equations with using the Weierstrass zeta functions. Stresses in plates with elliptical and rectangular inclusions with rounded vertices are investigated. Effective elastic constants are calculated for plates with main periods and inclusions of various shapes. The calculation of stresses in plates reinforced with other plates or rods using rivets are performed.

Key words: composite plates, doubly periodic systems of inclusions, effective elastic constants, stresses, method of integral equations.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
17.11.24