

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, ЩО МІСТЯТЬ ОПЕРАТОРИ КОШІ – ЕЙЛЕРА

Встановлено умови коректної розв'язності задачі з інтегральними умовами у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції та умовами майже періодичності за рештою змінних для рівняння з частинними похідними, що містить оператори Коші – Ейлера.

Ключові слова: інтегральні умови, оператор Коші – Ейлера, майже періодичні функції, умовно коректні задачі, малі знаменники.

Важливим класом задач з нелокальними умовами для рівнянь із частинними похідними є задачі з інтегральними умовами, які можна розглядати як неперервне узагальнення дискретних нелокальних багатоточкових умов:

$$\sum_{j=1}^n \mu_j y(x_j), \quad a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n \leq b, \quad \Rightarrow \quad \int_a^b y(x) d\mu(x),$$

де $\mu(x)$ – деяка задана, можливо дискретна, міра.

Дослідження таких задач інспіровано як необхідністю опису всіх коректних постановок для заданого диференціального оператора, так і їхнім практичним значенням у математичному моделюванні. Інтегральні умови використовують для опису усереднених значень фізичних величин. Це є особливо зручним для моделювання фізичних процесів статистичної природи, зокрема теплопровідності, дифузії тощо. Саме ця властивість обумовлює їхнє поширене використання, зокрема як додаткових умов в обернених задачах для рівнянь параболічного типу.

Дослідження задач з інтегральними умовами розпочалося, ймовірно, з роботи J. R. Cannon'a [11] у 1963 р. Ці питання досліджували Л. І. Каминін, З. О. Мельник, Л. С. Пулькіна, Л. В. Фардигола, П. І. Каленюк, В. С. Ільків, М. М. Симолюк, О. М. Медвідь, A. Bouziani, S. Mesloub та ін. [4]. Деякі сучасні дослідження висвітлено в [8, 12, 18, 21].

Задачі з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами, особливо високого порядку, досліджено значно менше, ніж аналогічні задачі для рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Зокрема, значний інтерес становлять рівняння, що містять оператори Коші – Ейлера [19], дія яких на функцію $y = y(x)$ задається виразом $x dy/dx$.

До рівнянь з операторами Коші – Ейлера належать, зокрема рівняння з радіальною частиною дво- та тривимірного оператора Лапласа в полярній, циліндричній та сферичній системах координат, а також стаціонарний випадок рівняння Блека – Шоулза [10], яке широко використовують в математичній теорії фінансів. Такі рівняння виникають у різних прикладних задачах механіки, гідро- та термомеханіки. Наприклад, їх застосовують у задачі Ляме для циліндричних оболонок [20], при описі руху рідини в трубопроводах, у моделюванні пружної деформації пластин під дією зовнішнього навантаження (приклад такої задачі з інтегральними умовами наведено у [20, с. 61]). До рівнянь такого типу належать також деякі з рівнянь Колмогорова – Фокера – Планка, що описують стохастичні процеси (зокрема, згадане рівняння Блека – Шоулза).

✉ kuz.anton87@gmail.com

Різні аспекти задач з нелокальними умовами для рівнянь, що містять оператори Коші – Ейлера, досліджено в [1–3]. Проте задачі з інтегральними умовами для таких рівнянь майже не вивчалися. У цій статті зроблено спробу заповнити цю прогалину.

1. Основні позначення. Використовуватимемо такі позначення: \mathbb{R}^p – p -вимірний дійсний простір; $\mathbb{Z}^p(\mathbb{Z}_+^p)$ – підмножина точок з \mathbb{R}^p , які мають цілі (невід’ємні цілі) координати; $D^p = (0, T) \times \mathbb{R}^p$, $T > 0$; $\Pi_H^p = [0, H]^p$, $H > 0$; $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $dx = dx_1 \dots dx_p$; $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$; $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$, $\eta^s = \eta_1^{s_1} \dots \eta_p^{s_p} \quad \forall \eta \in \mathbb{R}^p$; $\mu_k = (\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p$, $|\mu_k| = |\mu_{k_1}| + \dots + |\mu_{k_p}|$, $(\mu_k, x) = \mu_{k_1} x_1 + \dots + \mu_{k_p} x_p$; C_j , $j = 1, 2, \dots$, – додатні величини, які не залежать від k та μ_k .

2. Попередні відомості. Диференціальний вираз (оператор), заданий формулою

$$E_\xi[y] := E\left(\xi, \frac{d}{d\xi}\right)[y] = \xi \frac{dy}{d\xi}, \quad y := y(\xi), \quad (1)$$

називається *оператором Коші – Ейлера*. Він пов’язаний з відомим в теорії звичайних диференціальних рівнянь рівнянням Ейлера, яке має такий вигляд:

$$a_0 \xi^n \frac{d^n y}{d\xi^n} + a_1 \xi^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{d\xi^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \xi \frac{dy}{d\xi} + a_n y = 0, \quad \xi > 0, \quad (2)$$

де $a_j \in \mathbb{R}$ ($a_j \in \mathbb{C}$), $j = 0, 1, \dots, n$.

Рівняння (2) може бути записане через суперпозиції (степені) оператора (1) у вигляді

$$b_0 E_\xi^n[y] + b_1 E_\xi^{n-1}[y] + \dots + b_{n-1} E_\xi[y] + b_n y = 0, \quad (3)$$

де $E_\xi^n[y] := E[E_\xi^{n-1}[y]]$, а коефіцієнти b_j обчислюються за формулами

$$b_j = s(n, j) + \sum_{q=0}^{n-1} a_q s(q, j), \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (4)$$

у яких через $s(q, j)$ позначено числа Стірлінга першого роду [15].

Оскільки власними функціями оператора (1) є функції вигляду $y(\lambda, \xi) = \xi^\lambda$, $\lambda \in \mathbb{C}$, фундаментальна система розв’язків рівняння (3) має вигляд

$$y_1 = \xi^{\lambda_1}, \quad y_2 = \xi^{\lambda_2}, \quad \dots, \quad y_n = \xi^{\lambda_n},$$

де λ_j , $j = 1, \dots, n$, – корені рівняння

$$b_0 \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0, \quad (5)$$

за умови, що всі корені є простими. Рівняння (5) будемо називати *характеристичним рівнянням* для рівняння (3) та для відповідного рівняння (2), якщо їхні коефіцієнти пов’язані співвідношеннями (4).

Зауважимо також, що заміною змінних $\xi \rightarrow e^\eta$ рівняння (2) зводиться до лінійного рівняння зі сталими коефіцієнтами відносно змінної η , чие характеристичне рівняння збігається з рівнянням (5), у якому коефіцієнти b_j обчислюються за формулами (4).

3. Функціональні простори. Через \mathcal{V} позначимо послідовність дійсних чисел v_k , $k \in \mathbb{Z}$, таку, що

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad v_{-k} = v_k, \quad d_1 |k|^{\sigma_1} \leq |v_k| \leq d_2 |k|^{\sigma_2}, \quad (6)$$

де $d_2 \geq d_1 > 0$, $\sigma_2 \geq \sigma_1 > 0$ – деякі задані сталі.

Через \mathcal{M} позначимо послідовність дійсних векторів μ_k , $k \in \mathbb{Z}^p$, визначену у такий спосіб:

$$\mathcal{M} := \{\mu_k \in \mathbb{R}^p : \mu_{k_j} = v_{k_j}, \quad v_{k_j} \in \mathcal{V}, \quad k \in \mathbb{Z}^p\}. \quad (7)$$

Послідовність (7) називатимемо спектром.

Із (6), (7) та нерівності Єнсена випливає, що для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються нерівності

$$D_1 |k|^{\sigma_1} \leq |\mu_k| \leq D_2 |k|^{\sigma_2}, \quad (8)$$

де $D_i = d_i \min\{1, p^{1-\sigma_i}\}$, $i = 1, 2$.

Уведемо простори майже періодичних [9] за змінною x зі спектром \mathcal{M} функцій [5, 14].

Через $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ позначаємо простір скінченних сум (поліномів) вигляду $v(x) = \sum_k v_k \exp(i\mu_k x)$, $v_k \in \mathbb{C}$, $\mu_k \in \mathcal{M}$. Збіжність послідовності $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ в $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ до елемента $v \in \mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ визначається так:

$$1) \quad \exists n_0, N \in \mathbb{N}, \quad \forall n > n_0 \quad v_n(x) = \sum_{|k| \leq N} v_{kn} \exp(i\mu_k x);$$

$$2) \quad \forall k \in \mathbb{Z}^p, \quad |k| \leq N, \quad v_{kn} \rightarrow v_k, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathcal{K}), \quad \mathcal{K} \in \mathbb{N}, \quad - \text{ підпростір функцій } v(x) = \sum_{|k| \leq \mathcal{K}} v_k \exp(i\mu_k x) \in \mathcal{F}_{\mathcal{M}}.$$

$$\mathcal{F}'_{\mathcal{M}} - \text{ простір формальних рядів } f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} f_k \exp(i\mu_k x), \quad f_k \in \mathbb{C}, \text{ який}$$

збігається з простором усіх антилінійних функціоналів над $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$. Дія функціонала $f \in \mathcal{F}'_{\mathcal{M}}$ на елемент v простору $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ задається формулою

$$(f, v) = \lim_{H \rightarrow +\infty} \frac{1}{H^p} \int_{\Pi_H^p} f(x) \overline{v(x)} dx = \sum_k f_k \bar{v}_k.$$

$H_M^\alpha(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, – простір, отриманий шляхом поповнення простору $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}$ за нормою

$$\|v; H_M^\alpha(\mathbb{R})\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |v_k|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha}.$$

Простір $H_M^0(\mathbb{R})$ збігається з простором Безиковича майже періодичних функцій зі спектром \mathcal{M} .

$C_\omega^n([0, T], \mathcal{F}_{\mathcal{M}})$ ($C_\omega^n([0, T], \mathcal{F}'_{\mathcal{M}})$), де $\omega > 0$, $n \in \mathbb{N}$, позначає простір функцій $u(t, x)$ таких, що

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k x), \quad t \in (0, T], \quad u_k(t) \in C^n(0, T],$$

де $\lim_{t \rightarrow 0+} |t^{\omega+j} u_k^{(j)}(t)| < +\infty$, $j = 0, 1, \dots, n$. Добутки $t^{\omega+j} u_k^{(j)}(t)$ за неперервністю продовжуються на $[0, T]$. Нехай для довільного фіксованого $t \in [0, T]$ всі похідні $t^{\omega+j} \partial_t^j u = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} t^{\omega+j} u_k^{(j)}(t) \exp(i\mu_k x)$ належать простору $\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\mathcal{F}'_{\mathcal{M}})$.

$C_\omega^n([0, T], H_M^\alpha(\mathbb{R}))$ – підпростір функцій $u(t, x) \in C_\omega^n([0, T], \mathcal{F}'_M)$, $\omega > 0$, $n \in \mathbb{N}$, таких, що для довільного фіксованого $t \in [0, T]$ похідні $t^{\omega+j} \partial_t^j u$ належать простору $H_M^\alpha(\mathbb{R})$ та є неперервними за t у нормі $H_M^\alpha(\mathbb{R})$,

$$\|u; C_\omega^n([0, T], H_M^\alpha(\mathbb{R}))\| = \sum_{j=0}^n \sup_{t \in [0, T]} \|t^{\omega+j} \partial_t^j u; H_M^\alpha(\mathbb{R})\|.$$

Показник ω в означеннях просторів визначає поведінку функцій-коефіцієнтів $u_k(t)$ (величини $t^{\omega+j} u_k^{(j)}(t)$ повинні бути обмеженими при $t = 0$) і, відповідно, $u(t, x)$ в околі точки $t = 0$ та характеризує порядок особливості в цій точці:

$$u_k(t) = O\left(\frac{1}{t^\omega}\right), \quad t \rightarrow 0+.$$

4. Постановка задачі. В області D^p розглядається задача знаходження майже періодичного із заданим спектром \mathcal{M} (див. (7)) за змінною x розв'язку рівняння

$$L\left(t \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u := \left(\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^n + \sum_{j=0}^{n-1} \left[\left(t \frac{\partial}{\partial t}\right)^j A_{n-j} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right] \right) u(t, x) = 0, \quad (9)$$

який за змінною t задовольняє умови

$$\int_0^T t^{r_j-1} u(t, x) dx = \varphi_j(x), \quad j = 1, \dots, n, \quad (10)$$

де $r_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$; символи $A_j(\eta)$, $\eta \in \mathbb{R}^p$, диференціальних виразів, які входять у рівняння (9), є многочленами степенів N_j відповідно:

$$A_j(\eta) = \sum_{|s|=0}^{N_j} a_{j,s} \eta^s, \quad a_{j,s} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Вважаємо, що виконується умова

$$\forall q, s \in \{1, \dots, n\} \quad q \neq s \Leftrightarrow r_q \neq r_s. \quad (12)$$

Вважаємо також, що функції $\varphi_j(x)$, $j = 1, \dots, n$, у правих частинах умов (10) є майже періодичними зі спектром \mathcal{M} , тобто

$$\varphi_j(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k, x), \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \quad (13)$$

$$\varphi_{jk} = \lim_{H \rightarrow +\infty} \frac{1}{H^p} \int_{\Pi_H^p} \varphi_j(x) \exp(-i\mu_k, x) dx. \quad (14)$$

Функцію $u \in C_\omega^n([0, T], \mathcal{F}'_M)$ при відповідно підбраному ω називатимемо *узагальненим розв'язком* задачі (9), (10), якщо на інтервалі $(0, T)$ вона задовольняє рівняння (9) та умови (10) у просторі \mathcal{F}'_M . Узагальнений розв'язок зі шкали просторів $C_\omega^n([0, T], H_M^\alpha(\mathbb{R}))$ будемо називати *розв'язком* задачі (9), (10).

5. Побудова та єдиність розв'язку. Майже періодичний за x зі спектром \mathcal{M} розв'язок задачі (9), (10) будемо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} u_k(t) \exp(i\mu_k, x). \quad (15)$$

Після підстановки рядів (13), (14) у рівняння (9) та умови (10) отримуємо, що кожен з коефіцієнтів $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком відповідної задачі

$$E_t^n [u_k] + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(i\mu_k) E_t^j [u_k] = 0, \quad (16)$$

$$\int_0^T t^{r_j-1} u_k(t) dt = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (17)$$

Характеристичне рівняння для (16) записується у вигляді

$$P_\Lambda(\lambda, i\mu_k) := \lambda^n + \sum_{j=0}^{n-1} A_{n-j}(i\mu_k) \lambda^j = 0. \quad (18)$$

Надалі будемо вважати, що для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ корені рівняння (18) є простими та відмінними від нуля. Ця умова є еквівалентною умові

$$D_P(i\mu_k) A_n(i\mu_k) \neq 0, \quad (19)$$

де через $D_P(\mu_k)$ позначено дискримінант полінома $P_\Lambda(\lambda, \mu_k)$, який може бути обчислений за відомою формулою [6, с. 104] через його коефіцієнти.

За виконання умови (19) загальний розв'язок рівняння (16) зображається у вигляді

$$u_k(t) = \sum_{q=1}^n C_{qk} t^{\lambda_{qk}}, \quad k \in \mathbb{Z}^p, \quad (20)$$

де C_{qk} – довільні сталі, $\lambda_{qk} \in \mathbb{C}$ – корені характеристичного рівняння (18).

Зауважимо, що для формально багатозначної функції $t^{\lambda_{qk}} = \exp(\lambda_{qk} \ln t)$

тут прийнято вибирати її головну вітку $t^{\lambda_{qk}} := \exp(\lambda_{qk} \ln t)$.

Позначимо

$$R := \max_{1 \leq j \leq n} \{-r_j\}. \quad (21)$$

Лема 1. *Нехай виконується умова*

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \forall q \in \{1, \dots, n\} \quad \operatorname{Re} \lambda_{qk} > R. \quad (22)$$

Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ справджується формула

$$I_{jq,k} := \int_0^T t^{r_j + \lambda_{qk} - 1} dt = \frac{T^{r_j + \lambda_{qk}}}{r_j + \lambda_{qk}}, \quad j, q = 1, \dots, n. \quad (23)$$

Д о в е д е н н я. На підставі відомої формули $t^{a+bi} = \exp((a+bi) \ln t) = t^a (\cos(b \ln t) + i \sin(b \ln t))$ отримуємо:

$$\begin{aligned} \int_0^T t^{r_j + \lambda_{qk} - 1} dt &= \int_0^T t^{r_j + \operatorname{Re} \lambda_{qk} - 1} \exp(i \operatorname{Im} \lambda_{qk} \ln t) dt = \\ &= \frac{t^{r_j + \operatorname{Re} \lambda_{qk}} (\cos(\operatorname{Im} \lambda_{qk} \ln t) + i \sin(\operatorname{Im} \lambda_{qk} \ln t))}{r_j + \operatorname{Re} \lambda_{qk} + i \operatorname{Im} \lambda_{qk}} \Bigg|_0^T = \end{aligned}$$

$$= \frac{T^{r_j + \lambda_{qk}}}{r_j + \lambda_{qk}} - \frac{1}{r_j + \lambda_{qk}} \lim_{t \rightarrow 0} t^{r_j + \operatorname{Re} \lambda_{qk}} (\cos(\operatorname{Im} \lambda_{qk} \ln t) + i \sin(\operatorname{Im} \lambda_{qk} \ln t)). \quad (24)$$

З умови (22) випливає, що для всіх $j, q \in \{1, \dots, n\}$ та для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується нерівність $r_j + \operatorname{Re} \lambda_{qk} > 0$, а отже $\lim_{t \rightarrow 0} t^{r_j + \operatorname{Re} \lambda_{qk}} = 0$. Враховуючи, що $|\cos(\operatorname{Im} \lambda_{qk} \ln t) + i \sin(\operatorname{Im} \lambda_{qk} \ln t)| \leq 1$ для всіх $t > 0$, одержуємо

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{r_j + \operatorname{Re} \lambda_{qk}} (\cos(\operatorname{Im} \lambda_{qk} \ln t) + i \sin(\operatorname{Im} \lambda_{qk} \ln t)) = 0. \quad (25)$$

З рівностей (24), (25) випливає формула (23), що і доводить лему. \blacklozenge

З леми 1, зокрема, випливає, що за умови (22) всі інтеграли вигляду (23) є коректно визначеними, тобто збіжними.

Наведемо один з можливих конструктивних критеріїв перевірки виконання умов (22). Розглянемо многочлен $Q(\rho, \mu_k)$, побудований на основі характеристичного многочлена (18) за таким правилом:

$$Q(\rho, \mu_k) = P_\Lambda(R - \rho, i\mu_k) P_\Lambda^*(R - \rho, i\mu_k), \quad (26)$$

де через P_Λ^* позначено многочлен, коефіцієнти якого є комплексно спряженими до коефіцієнтів P_Λ . Многочлен $Q(\rho, \mu_k)$ може бути обчислений явно за формулою

$$Q(\rho, \mu_k) = \rho^{2n} + \sum_{m=0}^{2n-1} C_m(\mu_k) \rho^m, \quad (27)$$

у якій

$$C_m(\mu_k) = (-1)^m \sum_{q=0}^m B_q(R, \mu_k) \bar{B}_{m-q}(R, \mu_k), \quad (28)$$

$$B_q(R, \mu_k) = \begin{cases} C_n^q R^{n-q} + \sum_{j=q}^{n-1} C_j^q R^{j-q} A_{n-j}(i\mu_k), & q \leq n, \\ 0, & q > n, \end{cases}$$

де C_j^q – біноміальні коефіцієнти, а верхня риска позначає комплексне спряження.

З (26) випливає, що корені многочлена $Q(\rho, \mu_k)$ мають вигляд

$$\rho_{j,k} = R - \lambda_{jk}, \quad \rho_{n+j,k} = R - \bar{\lambda}_{jk}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (29)$$

а всі його коефіцієнти (28) у (27) є дійсними числами.

На підставі (29) переконаємося, що умова (22) є еквівалентною умові

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \forall q \in \{1, \dots, 2n\} \quad \operatorname{Re} \rho_{qk} < 0,$$

яка може бути перевіреною за критерієм Рауса – Гурвіца [16]. Нехай $H(Q(\rho, \mu_k))$ позначає матрицю Гурвіца [13, с. 190], складену з коефіцієнтів полінома $Q(\rho, \mu_k)$, а $\Delta_j[H(Q(\rho, \mu_k))]$, $j = 1, \dots, 2n$, – її головні мінори. Тоді, на підставі критерію Рауса – Гурвіца, умова (22) виконуватиметься одночасно з умовою

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \forall j \in \{1, \dots, 2n\} \quad \Delta_j[H(Q(\rho, \mu_k))] > 0.$$

Зауваження 1. Якщо для коефіцієнтів $a_{j,s}$ кожного з поліномів (11) виконуються умови

$$\forall m \in \mathbb{Z}_+ : 2m \leq N_j \quad \forall s \in \mathbb{Z}_+^p : |s| \neq 2m \quad a_{j,s} = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

тобто поліноми $A_j(\eta)$ містять тільки парні степені за сукупністю змінних $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p)$, то для перевірки умови (22) потрібно замість полінома (27) застосувати критерій Гурвіца до полінома

$$\tilde{Q}(\rho, \mu_k) = P_\Lambda(R - \rho, i\mu_k) = \rho^n + \sum_{q=0}^{n-1} B_q(R, \mu_k) \rho^q.$$

Це зумовлено тим, що оригінальний критерій Рауса – Гурвіца вимагає, щоб коефіцієнти многочлена були дійсними числами. В цьому випадку, як випливає з (11), коефіцієнти $\tilde{Q}(\rho, \mu_k)$ будуть дійсними. Щодо інших можливих узагальнень критерію Гурвіца у випадку комплексних коефіцієнтів полінома, звертаємо увагу читача на публікацію [16].

Зауваження 2. Нехай в задачі (9), (10) оператор є гіперболічним за Петровським у вузькому сенсі за змінною t : рівняння (9) є однорідним за порядком диференціювання (всі відповідні поліноми $A_j(\eta)$ є однорідними поліномами за сукупністю змінних $\eta \in \mathbb{R}^p$ степенів $N_j = j$), виконується умова (19) та всі корені полінома $P_\Lambda(\lambda, \eta) = 0$, $\eta \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, є дійсними числами. Якщо в умовах (10) $r_j > 0$, то виконуються нерівності (22).

Твердження зауваження 2 безпосередньо випливає з того, що $\operatorname{Re} \lambda_{qk} = 0$, $q = 1, \dots, n$, для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$, а величина R , визначена у (21), є від'ємною.

Надалі вважаємо, що умова (22) виконується. Тоді підставивши (20) в умови (17) та врахувавши (23), отримуємо систему лінійних алгебричних рівнянь для знаходження сталих C_{qk} вигляду

$$\sum_{q=1}^n C_{qk} \frac{T^{r_j + \lambda_{qk}}}{r_j + \lambda_{qk}} = \varphi_{jk}, \quad j = 1, \dots, n. \quad (30)$$

Визначник системи (30) збігається з характеристичним визначником нелокальної крайової задачі (16), (17) і подається у вигляді

$$\Delta(\mu_k, T) := \det \left\| \frac{T^{r_j + \lambda_{qk}}}{r_j + \lambda_{qk}} \right\|_{j,q=1}^n, \quad k \in \mathbb{Z}^p. \quad (31)$$

Лема 2. Якщо виконуються умови (12), (19) та (22), то визначник $\Delta(\mu_k, T)$, визначений формулою (31), є відмінним від нуля для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Д о в е д е н н я. Визначник (31), який має структуру визначника матриці Коші [13], обчислюється за формулою

$$\begin{aligned} \Delta(\mu_k, T) &= T^{(r_1 + \dots + r_n) + (\lambda_{1k} + \dots + \lambda_{nk})} \frac{\prod_{1 \leq j < q \leq n} (r_q - r_j)(\lambda_{qk} - \lambda_{jk})}{\prod_{j,q=1}^n (r_j + \lambda_{qk})} = \\ &= A(\mathbf{r}, T) W(\boldsymbol{\lambda}_k) H(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}_k) T^{\mathbf{B}(\boldsymbol{\lambda}_k)}, \end{aligned} \quad (32)$$

у якій позначено $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n)$, $\boldsymbol{\lambda}_k = (\lambda_{1k}, \dots, \lambda_{nk})$,

$$A(\mathbf{r}, T) = T^{r_1 + \dots + r_n} \prod_{1 \leq j < q \leq n} (r_q - r_j), \quad (33)$$

$$W(\boldsymbol{\lambda}_k) = \prod_{1 \leq j < q \leq n} (\lambda_{jq} - \lambda_{jk}), \quad (34)$$

$$H(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}_k) = \prod_{j,q=1}^n (r_j + \lambda_{jq})^{-1}, \quad (35)$$

$$B(\boldsymbol{\lambda}_k) = \lambda_{1k} + \dots + \lambda_{nk}. \quad (36)$$

З умов (12), (19) та формул (33), (34) випливає, що $A(\mathbf{r}, T) \neq 0$ та $W(\boldsymbol{\lambda}_k) \neq 0$, оскільки $W^2(\boldsymbol{\lambda}_k) = D_P(\mu_k)$ [6, с. 104] для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$. Умова (22) тут гарантує коректне визначення $\Delta(\mu_k, T)$, $T \geq 0$, оскільки тоді $r_j + \lambda_{jq} \neq 0$, $r_j + \operatorname{Re} \lambda_{jq} > 0$ для всіх $j, q \in \{1, \dots, n\}$ та всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$ і, відповідно, з формули (35) випливає, що $H(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}_k) \neq 0$. Зі сказаного вище отримуємо твердження леми. \blacklozenge

Надалі вважаємо, що виконуються умови леми 2. Тоді

$$\forall \mu_k \in \mathcal{M} \quad \Delta(\mu_k, T) \neq 0$$

і, відповідно, система (30) має єдиний розв'язок

$$C_{qk} = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{jq}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk}, \quad q = 1, \dots, n, \quad (37)$$

який знаходимо за правилом Крамера. У формулі (37) величини $\Delta_{jq}(\mu_k, T)$ позначають алгебричні доповнення елементів j -го рядка та q -го стовпця у визначнику $\Delta(\mu_k, T)$.

Позначимо також

$$P_R(\eta) := \prod_{m=1}^n (\eta - r_m), \quad D_{jq}(\mu_k, T) := T^{\lambda_{jq}} \frac{\Delta_{jq}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)}, \quad j, q = 1, \dots, n. \quad (38)$$

Лема 3. Для $D_{jq}(\mu_k, T)$, $j, q = 1, \dots, n$, справедливі формули

$$D_{jq}(\mu_k, T) = (-1)^{n-j-q} \frac{P_\Lambda(-r_j, i\mu_k) P_R(-\lambda_{jq}) T^{-r_j}}{P'_R(r_j) P'_\Lambda(\lambda_{jq}, i\mu_k) r_j + \lambda_{jq}}, \quad (39)$$

де

$$P'_R(r_j) = \left. \frac{dP_R(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=r_j}, \quad P'_\Lambda(\lambda_{jq}, i\mu_k) = \left. \frac{dP_\Lambda(\lambda, i\mu_k)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{jq}}.$$

Д о в е д е н н я. Алгебричні доповнення $\Delta_{jq}(\mu_k, T)$

$$\Delta_{jq}(\mu_k, T) := \det \left\| \frac{T^{r_\ell + \lambda_{m\ell}}}{r_\ell + \lambda_{m\ell}} \right\|_{\substack{\ell, m=1, \\ \ell \neq j, m \neq q}}^n, \quad j, q = 1, \dots, n, \quad k \in \mathbb{Z}^P, \quad (40)$$

як випливає з (31) та (40), мають таку саму структуру, як і $\Delta(\mu_k, T)$, і тому можуть бути обчислені за формулою, аналогічною до (32), а саме:

$$\Delta_{jq}(\mu_k, T) = A_j(\mathbf{r}, T) W_q(\boldsymbol{\lambda}_k) H_{jq}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}_k) T^{B_q(\boldsymbol{\lambda}_k)}, \quad j, q = 1, \dots, n, \quad (41)$$

де

$$A_j(\mathbf{r}, T) = T^{r_1 + \dots + r_{j-1} + r_{j+1} + \dots + r_n} \prod_{\substack{1 \leq \ell < m \leq n \\ \ell, m \neq j}} (r_m - r_\ell), \quad (42)$$

$$W_q(\boldsymbol{\lambda}_k) = \prod_{\substack{1 \leq \ell < m \leq n \\ \ell, m \neq q}} (\lambda_{mk} - \lambda_{\ell k}), \quad (43)$$

$$H_{jq}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}_k) = \prod_{\substack{\ell, m=1 \\ \ell \neq j, m \neq q}}^n (r_\ell + \lambda_{mk})^{-1}, \quad (44)$$

$$B_q(\boldsymbol{\lambda}_k) = \lambda_{1k} + \dots + \lambda_{q-1,k} + \lambda_{q+1,k} + \dots + \lambda_{nk}. \quad (45)$$

З формул (33)–(36), (42)–(45) отримуємо такі співвідношення:

$$\begin{aligned} H_{jq}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}_k) &= \prod_{\ell, m=1}^n (r_\ell + \lambda_{mk})^{-1} \prod_{m=1}^n ((r_j + \lambda_{mk})(r_m + \lambda_{qk})) = \\ &= H(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}_k)(r_j + \lambda_{qk})^{-1} \prod_{m=1}^n ((r_j + \lambda_{mk})(r_m + \lambda_{qk})); \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} W_q(\boldsymbol{\lambda}_k) &= \prod_{\substack{1 \leq \ell < m \leq n \\ \ell, m \neq q}} (\lambda_{mk} - \lambda_{\ell k}) = \\ &= \prod_{1 \leq \ell < m \leq n} (\lambda_{mk} - \lambda_{\ell k}) \prod_{\ell=1}^{q-1} (\lambda_{qk} - \lambda_{\ell k})^{-1} \prod_{\ell=q+1}^n (\lambda_{\ell k} - \lambda_{qk})^{-1} = \\ &= (-1)^{n-q} W(\boldsymbol{\lambda}_k) \prod_{\ell=1, \ell \neq q}^n (\lambda_{qk} - \lambda_{\ell k})^{-1}; \end{aligned} \quad (47)$$

$$B_q(\boldsymbol{\lambda}_k) = B(\boldsymbol{\lambda}_k) - \lambda_{qk}; \quad (48)$$

$$\begin{aligned} A_j(\mathbf{r}, T) &= T^{r_1 + \dots + r_{j-1} + r_{j+1} + \dots + r_n} \prod_{\substack{1 \leq \ell < m \leq n \\ \ell, m \neq j}} (r_m - r_\ell) = \\ &= \frac{T^{r_1 + \dots + r_n}}{T^{r_j}} \prod_{1 \leq \ell < m \leq n} (r_m - r_\ell) \prod_{\ell=1}^{j-1} (r_q - r_\ell)^{-1} \prod_{\ell=j+1}^n (r_\ell - r_q)^{-1} = \\ &= (-1)^{n-j} T^{-r_j} A_j(\mathbf{r}, T) \prod_{\ell=1, \ell \neq j}^n (r_j - r_\ell)^{-1}. \end{aligned} \quad (49)$$

На підставі формул (32), (38), (41), (46)–(49) знаходимо, що для кожного $j, q = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} D_{jq}(\mu_k, T) &= T^{\lambda_{qk}} \frac{A_j(\mathbf{r}, T) W_q(\boldsymbol{\lambda}_k) H_{jq}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}_k) T^{B_q(\boldsymbol{\lambda}_k)}}{A(\mathbf{r}, T) W(\boldsymbol{\lambda}_k) H(\mathbf{r}, \boldsymbol{\lambda}_k) T^{B(\boldsymbol{\lambda}_k)}} = \\ &= \frac{C_{jq}(\mathbf{r}, T)}{r_j + \lambda_{qk}} \frac{\prod_{m=1}^n ((r_j + \lambda_{mk})(r_m + \lambda_{qk}))}{\prod_{\ell=1, \ell \neq q}^n (\lambda_{qk} - \lambda_{\ell k})}, \end{aligned} \quad (50)$$

де позначено $C_{jq}(\mathbf{r}, T) = (-1)^{n-j-q} T^{-r_j} \prod_{\ell=1, \ell \neq j}^n (r_j - r_\ell)^{-1}$.

Позначимо через $E_j(\mathbf{y})$, $j = 0, 1, \dots, n$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, елементарні симетричні многочлени степеня j від n змінних. Вважаємо, що $E_j(\mathbf{y}) = 0$ при $j > n$. Із (38) отримуємо, що

$$P_R(\eta) = \prod_{m=1}^n (\eta - r_m) = \eta^n + \sum_{j=0}^{n-1} p_{n-j} \eta^j, \quad p_{n-j} = (-1)^{n-j} E_{n-j}(\mathbf{r}). \quad (51)$$

Тоді, застосовуючи теорему Вієта та формулу розкладу многочлена на одночленні множники, з (51) отримуємо, що

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^n (\lambda_{qk} + r_m) &= \sum_{m=0}^n E_m(\mathbf{r}) \lambda_{qk}^{n-m} = \lambda_{qk}^n + \sum_{m=1}^n (-1)^m E_m(\mathbf{r}) \lambda_{qk}^{n-m} = \\ &= \lambda_{qk}^n + \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^{n-m} E_{n-m}(\mathbf{r}) \lambda_{qk}^m = (-1)^n P_R(-\lambda_{qk}), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\prod_{\ell=1, \ell \neq j}^n (r_j - r_\ell) = \left. \frac{dP_R(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=r_j} = P'_R(r_j). \quad (53)$$

Аналогічно до (52) та (53) знаходимо

$$\prod_{m=1}^n (r_j + \lambda_{mk}) = \sum_{m=0}^n E_m(\boldsymbol{\lambda}_k) r_j^{n-m} = (-1)^n P_\Lambda(-r_j, i\boldsymbol{\mu}_k), \quad (54)$$

$$\prod_{\ell=1, \ell \neq q}^n (\lambda_{qk} - \lambda_{\ell k}) = \left. \frac{dP(\lambda, i\boldsymbol{\mu}_k)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_{qk}} = P'_\Lambda(\lambda_{qk}, i\boldsymbol{\mu}_k). \quad (55)$$

Тоді з формул (50), (52)–(55) випливає таке зображення для $D_{jq}(\boldsymbol{\mu}_k, T)$ через многочлени $P_\Lambda(\lambda, i\boldsymbol{\mu}_k)$ та $P_R(\eta)$:

$$D_{jq}(\boldsymbol{\mu}_k, T) = (-1)^{n-j-q} \frac{P_\Lambda(-r_j, i\boldsymbol{\mu}_k) P_R(-\lambda_{qk})}{P'_R(r_j) P'_\Lambda(\lambda_{qk}, i\boldsymbol{\mu}_k)} \frac{T^{-r_j}}{r_j + \lambda_{qk}}. \quad (56)$$

Отримана формула (56) збігається з (39). Лему доведено. \blacklozenge

Зображення (39) цікаве тим, що многочлен $P_R(\eta)$ збігається з характеристичним рівнянням для диференціального рівняння вигляду (3) з фундаментальною системою розв'язків $y_j(\xi) = \xi^{r_j}$, $j = 1, \dots, n$, яка пов'язана з моментами в умовах (10) співвідношеннями

$$\begin{aligned} \xi^{r_j} &= r_j \int_0^\xi t^{r_j-1} dt, \quad r_j > 0; \quad \xi^{r_j} = -r_j \int_\xi^{+\infty} t^{r_j-1} dt, \quad r_j < 0; \\ \xi^{r_j} &= \int_1^e t^{r_j-1} dt, \quad r_j = 0, \quad \xi > 0. \end{aligned}$$

На підставі сказаного вище отримуємо, що кожна з задач (16), (17) має єдиний розв'язок, заданий формулою (20), у якій сталі C_{qk} визначені формулами (37). Підсумовуючи (15), (20), (37)–(39), записуємо формальний розв'язок задачі (9), (10) у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \sum_{j, q=1}^n D_{jq}(\mu_k, T) \varphi_{jk} \left(\frac{t}{T} \right)^{\lambda_{qk}} \exp(i\mu_k, x), \quad (57)$$

де величини $D_{jq}(\mu_k, T)$, $j, q = 1, \dots, n$, задаються формулами (39).

6. Існування розв'язку задачі. Для встановлення умов існування розв'язку задачі (9), (10), який зображується рядом (57) у відповідних функціональних просторах, нам знадобляться деякі допоміжні твердження.

Лема 4. Для коренів λ_{qk} , $q = 1, \dots, n$, рівняння (18) справджуються оцінки

$$|\lambda_{qk}| \leq \Lambda(1 + |\mu_k|)^\chi, \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \quad (58)$$

де

$$\Lambda = \max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{ \left((N_j + 1) C_{N_j+p-1}^{p-1} \max_{0 \leq |s| \leq N_j} \{ |a_{js}| \} \right)^{\frac{1}{n-j}} \right\}, \quad \chi = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{N_j}{j} \right\}. \quad (59)$$

Д о в е д е н н я. На підставі (11) для коефіцієнтів характеристичного многочлена (18) знаходимо, що

$$\begin{aligned} |A_j(i\mu_k)| &= \left| \sum_{|s|=0}^{N_j} a_{js} i^{|s|} \mu_k^s \right| \leq (N_j + 1) C_{N_j+p-1}^{p-1} \max_{0 \leq |s| \leq N_j} \{ |a_{js}| \} |\mu_k|^{N_j} \leq \\ &\leq C_{2j} (1 + |\mu_k|)^{N_j}, \end{aligned} \quad (60)$$

де $C_{2j} := (N_j + 1) \max_{0 \leq q \leq N_j} \{ |a_{jq}| \}$, $j = 0, 1, \dots, n-1$.

Враховуючи (59), (60) та відому формулу про оцінку зверху коренів многочлена через його коефіцієнти, для кожного $q = 1, \dots, n$ отримуємо

$$\begin{aligned} |\lambda_{qk}| &\leq \max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{ |A_{n-j}(i\mu_k)|^{\frac{1}{n-j}} \right\} \leq \max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{ C_{2j}^{\frac{1}{n-j}} \right\} \times \\ &\times \max_{0 \leq j \leq n-1} \left\{ (1 + |\mu_k|)^{\frac{N_{n-j}}{n-j}} \right\} = \Lambda(1 + |\mu_k|)^\chi. \end{aligned} \quad (61)$$

З нерівності (61) випливає твердження лема. \blacklozenge

Позначимо $u_{qk}(t) := (t/T)^{\lambda_{qk}}$, $q = 1, \dots, n$.

Лема 5. Для довільних $\omega > -R$, $j = 0, 1, \dots$ та $u_{qk}(t)$ виконуються нерівності

$$\sup_{t \in [0, T]} |t^{\omega+j} u_{qk}^{(j)}(t)| \leq C_{3j} (1 + |\mu_k|)^{j\chi}, \quad \mu_k \in \mathcal{M}, \quad C_{3j} = j! \Lambda^j T^\omega. \quad (62)$$

Д о в е д е н н я. Для функції $u_{qk}(t)$ знаходимо

$$u_{qk}^{(j)}(t) = \frac{(\lambda_{qk})_j}{T^{\lambda_{qk}}} t^{\lambda_{qk}-j}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (63)$$

де $(\alpha)_j := \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)$ – символ Похгаммера порядку j від числа α ,

$$\left| t^{\omega+j} u_{qk}^{(j)}(t) \right| = \frac{|\lambda_{qk})_j|}{T^{\operatorname{Re} \lambda_{qk}}} t^{\operatorname{Re} \lambda_{qk} + \omega} = T^\omega |\lambda_{qk})_j| \left(\frac{t}{T} \right)^{\operatorname{Re} \lambda_{qk} + \omega}. \quad (64)$$

За умов леми та виконання умови (22) справджуються нерівності $\operatorname{Re} \lambda_{qk} + \omega > 0$, $q = 1, \dots, n$, і, відповідно, $\sup_{t \in [0, T]} |t^{\operatorname{Re} \lambda_{qk} + \omega}| < +\infty$. Оскільки $0 \leq t \leq T$, то на підставі попередніх міркувань отримуємо таку оцінку:

$$\sup_{t \in [0, T]} \left| \left(\frac{t}{T} \right)^{\operatorname{Re} \lambda_{qk} + \omega} \right| \leq 1, \quad q = 1, \dots, n. \quad (65)$$

Для символу Похгаммера справедливе зображення $(\eta)_j = \sum_{m=0}^j s(j, m) \eta^m$, де $s(j, m)$ – числа Стірлінга першого роду (див. (4)). Враховуючи $\sum_{m=0}^j s(j, m) = j!$ [15] та оцінки (58), отримуємо

$$\begin{aligned} |(\lambda_{qk})_j| &= \left| \sum_{m=0}^j s(j, m) \lambda_{qk}^m \right| \leq \sum_{\ell=0}^j s(j, m) |\lambda_{qk}|^m \leq |\lambda_{qk}|^j \sum_{\ell=0}^j s(j, m) \leq \\ &\leq j! \Lambda^j (1 + |\mu_k|)^{j\lambda}. \end{aligned} \quad (66)$$

На підставі формул (63)–(66) отримуємо нерівності

$$\sup_{t \in [0, T]} |t^{\omega+j} u_{qk}^{(j)}(t)| \leq j! \Lambda^j T^\omega (1 + |\mu_k|)^{j\lambda}, \quad j = 0, 1, \dots, \quad \mu_k \in \mathcal{M}. \quad (67)$$

З оцінок (67) випливає твердження леми. \blacklozenge

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (12), (19), (22), то задача (9), (10) не може мати більше одного майже періодичного за x зі спектром \mathcal{M} розв'язку в просторі $C_\omega^n([0, T], \mathcal{F}'_M)$, де $\omega > -R$.*

До в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 1 у [17] з урахуванням тверджень леми 5, які гарантують обмеженість коефіцієнтів при $t = 0$. \blacklozenge

Із (57), леми 2, леми 5 і теореми 1 та з урахуванням теореми 1 у [5] випливає наступне твердження.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови (12), (19), (22) і $\varphi_j \in \mathcal{F}'_M(\mathcal{F}'_M)$, $j = 1, \dots, n$, то задача (9), (10) має єдиний майже періодичний за x зі спектром \mathcal{M} розв'язок у просторі $C_\omega^n([0, T], \mathcal{F}'_M)$ ($C_\omega^n([0, T], \mathcal{F}'_M)$) при $\omega > -R$.*

Твердження теореми 2 багато в чому залежить від виконання умови (22), яка вимагає спеціальної поведінки $\operatorname{Re} \lambda_{qk}$. Коротко обговоримо можливість послабити (відкинути) умову (22).

З леми 4 випливає, що справджується оцінка

$$\operatorname{Re} \lambda_{qk} \geq -\Lambda(1 + |\mu_k|)^\lambda, \quad q = 1, \dots, n, \quad \mu_k \in \mathcal{M}. \quad (68)$$

Якщо в умовах (10) $r_j > \Lambda$, то враховуючи (21), (59) та (68), отримуємо, що умова (22) виконуватиметься при

$$|\mu_k| < \left(-\frac{\Lambda}{R} \right)^{1/\lambda} - 1$$

або, з огляду на оцінки (8), при

$$|k| < \left(\frac{1}{D_1} \left(-\frac{\Lambda}{R} \right)^{1/\lambda} - \frac{1}{D_1} \right)^{1/\sigma_1} =: \tilde{K}. \quad (69)$$

Можемо сформулювати наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови (12), (19). Якщо $r_j > \Lambda$, $\varphi_j \in \mathcal{F}_{\mathcal{M}}([\tilde{K}])$, $j = 1, \dots, n$, де Λ та \tilde{K} визначені формулами (59) та (69) відповідно, а [...] позначає цілу частину числа, то задача (9), (10) має єдиний майже періодичний за x зі спектром \mathcal{M} розв'язок в просторі $C_{\omega}^n([0, T], \mathcal{F}_{\mathcal{M}}([\tilde{K}]))$ при $\omega > -R$.*

Теорема 3 стверджує, що в загальному випадку існування розв'язку задачі (9), (10) можна забезпечити тільки в просторах скінченних сум вигляду (15) за достатньо великих порядків моментів r_j у (10). Очевидно, що в такому випадку проблема малих знаменників відсутня.

Існування розв'язку задачі у шкалі просторів $C_{\omega}^n([0, T], H_{\mathcal{M}}^{\alpha}(\mathbb{R}))$, взагалі кажучи, пов'язане з проблемою малих знаменників, оскільки вирази вигляду $\left| \prod_{\ell=1, \ell \neq q}^n (\lambda_{qk} - \lambda_{\ell k}) \right|$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень (корені полінома $P_{\Lambda}(\lambda, i\mu_k)$ можуть бути як завгодно близькими один до одного) для нескінченної кількості чисел $\mu_k \in \mathcal{M}$, що спричинятиме розбіжність ряду (57) у нормі простору $C_{\omega}^n([0, T], H_{\mathcal{M}}^{\alpha}(\mathbb{R}))$.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови (12), (19), (22) та існує додатна стала δ така, що для всіх (крім скінченної кількості) $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються нерівності*

$$\prod_{\ell=1, \ell \neq q}^n |\lambda_{qk} - \lambda_{\ell k}| \geq (1 + |\mu_k|)^{-\delta}, \quad q = 1, \dots, n. \quad (70)$$

Якщо $\varphi_j \in H_{\mathcal{M}}^{(3n-1)\chi+\delta+\alpha}(\mathbb{R})$, $j = 1, \dots, n$, то існує єдиний розв'язок у задачі (9), (10) з простору $C_{\omega}^n([0, T], H_{\mathcal{M}}^{\alpha}(\mathbb{R}))$, $\omega > -R$, який зображається формулою (37), причому

$$\|u; C_{\omega}^n([0, T], H_{\mathcal{M}}^{\alpha}(\mathbb{R}))\| \leq C_6 \sum_{j=1}^n \|\varphi_j; H_{\mathcal{M}}^{(3n-1)\chi+\delta+\alpha}(\mathbb{R})\|.$$

Д о в е д е н н я. На підставі формули (57) запишемо

$$\begin{aligned} \|u; C_{\omega}^n([0, T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha, \beta, \gamma}(\mathbb{R}))\| &= \sum_{j=0}^n \sup_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |t^{\omega+j} u_k^{(j)}(t)|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2} = \\ &= \sum_{j=0}^n \sup_{t \in [0, T]} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \sum_{j, q=1}^n |D_{jq}(\mu_k, T)|^2 |\varphi_{jk}|^2 |t^{\omega+j} u_{qk}^{(j)}(t)|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \sum_{j, q=1}^n |D_{jq}(\mu_k, T)|^2 |\varphi_{jk}|^2 \sup_{t \in [0, T]} |t^{\omega+j} u_{qk}^{(j)}(t)|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2}. \quad (71) \end{aligned}$$

З формули (39) випливає, що

$$|D_{jq}(\mu_k, T)| = |C_{jq}(\mathbf{r}, T)| \frac{\prod_{m=1}^n |r_m + \lambda_{qk}| \prod_{m=1, m \neq q}^n |r_j + \lambda_{mk}|}{\prod_{\ell=1, \ell \neq q}^n |\lambda_{qk} - \lambda_{\ell k}|}. \quad (72)$$

З оцінок (58) випливає, що для всіх $|\mu_k| > K_1$, де $K_1 = \left(\max_{1 \leq j \leq n} \{r_j\} \Lambda^{-1} \right)^{1/\chi} - 1$, виконуються нерівності

$$\forall j, q \in \{1, \dots, n\} \quad |r_j + \lambda_{qk}| \leq 2\Lambda(1 + |\mu_k|)^\chi. \quad (73)$$

З (73) отримуємо такі оцінки:

$$\prod_{m=1}^n |r_m + \lambda_{qk}| \prod_{m=1, m \neq q}^n |r_j + \lambda_{mk}| \leq (2\Lambda)^{(2n-1)} (1 + |\mu_k|)^{(2n-1)\chi}. \quad (74)$$

З (70), (72) та (74) випливає, що

$$\begin{aligned} |D_{jq}(\mu_k, T)|^2 &\leq \max_{1 \leq j, q \leq n} \{|C_{jq}(\mathbf{r}, T)|^2\} (2\Lambda)^{2(2n-1)} (1 + |\mu_k|)^{2(2n-1)\chi + 2\delta} = \\ &= C_5 (1 + |\mu_k|)^{2(2n-1)\chi + 2\delta}, \end{aligned} \quad (75)$$

де $C_5 = \max_{1 \leq j, q \leq n} \{|C_{jq}(\mathbf{r}, T)|^2\} (2\Lambda)^{2(2n-1)}$.

На підставі (62), (71) та (75) отримуємо, що

$$\begin{aligned} \|u; C_\omega^n([0, T], H_M^\alpha(\mathbb{R}))\| &\leq \sum_{\ell=0}^n \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \sum_{j, q=1}^n |T^{\lambda_{qk}} D_{jq}(\mu_k, T)|^2 |\varphi_{jk}|^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times \sup_{t \in [0, T]} |t^{\omega+\ell} u_{qk}^{(\ell)}(t)|^2 (1 + |\mu_k|)^{2\alpha} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \sum_{j, q=1}^n C_{3\ell} C_5 |\varphi_{jk}|^2 (1 + |\mu_k|)^{(2(2n-1)+2\ell)\chi + 2\delta + 2\alpha} \right)^{1/2} \leq \\ &\leq n (nC_5 \max_{0 \leq \ell \leq n} C_{3\ell})^{1/2} \times \\ &\quad \times \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} |\varphi_{jk}|^2 (1 + |\mu_k|)^{(2(2n-1)+2n)\chi + 2\delta + 2\alpha} \right)^{1/2} = \\ &= C_6 \sum_{j=1}^n \|\varphi_j; H_M^{(3n-1)\chi + \delta + \alpha}(\mathbb{R})\|. \end{aligned}$$

Отримана нерівність доводить твердження теореми. \blacklozenge

7. Оцінки малих знаменників. Твердження теореми 4 встановлено у припущенні виконання нерівності (60). З'ясуємо умови її виконання.

Позначимо $\tilde{s}_q = (0, \dots, 0, N_n, 0, \dots, 0)$, $q = 1, \dots, p$, – мультиіндекс довжини p , у якому на q -му місці знаходиться N_n . Розглянемо вектор $\mathbf{y} = (a_{n, \tilde{s}_1}, \dots, a_{n, \tilde{s}_p}) \in \mathbb{C}^p$, складений із коефіцієнтів полінома $A_n(\eta)$ з відповідними мультиіндексами.

Теорема 5. Якщо $p > 1$ і виконуються умови (12), (19) та (22), то для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{C}^p) векторів \mathbf{y} нерівність (60) виконується при

$$\delta > \frac{n-1}{2} \left(\frac{p}{2\sigma_1} + (n-2)\chi - N_n \right)$$

для всіх (крім скінченної кількості) $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Д о в е д е н н я. Враховуючи оцінки (8), аналогічно до доведення теореми 4 у [6, §12] (див. також [3]) показуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{C}^p) векторів \mathbf{y} та для всіх (крім скінченної кількості) $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконується оцінка

$$|W(\boldsymbol{\lambda}_k)| > (1 + |\mu_k|)^{-\delta_1}, \quad \delta_1 = \frac{n-1}{2} \left(\frac{p}{2\sigma_1} - N_n \right). \quad (76)$$

З формули (47) отримуємо таке співвідношення:

$$\prod_{\ell=1, \ell \neq q}^n |\lambda_{qk} - \lambda_{\ell k}| = \frac{|W(\boldsymbol{\lambda}_k)|}{|W_q(\boldsymbol{\lambda}_k)|}. \quad (77)$$

На підставі формули (47) та оцінок (58) знаходимо

$$|W_q(\boldsymbol{\lambda}_k)| \leq (2\Lambda)^{\delta_2} (1 + |\mu_k|)^{\delta_2}, \quad \delta_2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2} \chi. \quad (78)$$

З формул (76)–(78) отримуємо, що нерівність

$$\begin{aligned} \prod_{\ell=1, \ell \neq q}^n |\lambda_{qk} - \lambda_{\ell k}| &= \frac{|W(\boldsymbol{\lambda}_k)|}{|W_q(\boldsymbol{\lambda}_k)|} \geq (2\Lambda)^{-\delta_2} (1 + |\mu_k|)^{-\delta_1 - \delta_2} = \\ &= (2\Lambda)^{-\tilde{\delta}} (1 + |\mu_k|)^{-\tilde{\delta}}, \end{aligned} \quad (79)$$

де $\tilde{\delta} = (n-1)(p/(2\sigma_1) + (n-2)\chi - N_n)/2$, виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{C}^p) векторів \mathbf{y} та для всіх (крім скінченної кількості) $\mu_k \in \mathcal{M}$. З нерівності (79) випливає твердження теореми. \blacklozenge

Для задачі (9), (10) вдається виділити випадки, коли проблема малих знаменників відсутня. Це випливає з такого твердження.

Теорема 6. *Нехай виконуються умови теореми 5. Якщо рівняння (9) справджує умови зауваження 2, то нерівність (60) виконується при*

$$\delta > \frac{n(n-3)}{2}$$

для всіх (крім скінченної кількості) $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Д о в е д е н н я. За умов теореми на підставі нерівності 2.21 у [7, с. 100] отримуємо, що для всіх (крім скінченної кількості) $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконується оцінка

$$|W(\boldsymbol{\lambda}_k)| > 1 + |\mu_k|. \quad (80)$$

Враховуючи, що за умов теореми $\chi = 1$, на підставі (77), (78) та (80) отримуємо шукане твердження. \blacklozenge

Наостанок зауважимо, що у випадку однієї просторової змінної, $p = 1$, у теоремі 6 вимогу однорідності поліномів $A_j(\eta)$, які відповідають диференціальним виразам $A_j(\partial/\partial x)$ у рівнянні (9), можна опустити. Це безпосередньо випливає з результатів роботи [3] (див. нерівність (13) у [3]).

Висновки. В роботі досліджено задачу з інтегральними умовами у вигляді моментів довільного порядку від шуканої функції за часовою змінною (10) та умовами майже періодичності за просторовими змінними для рівняння із частинними похідними (9), що містить оператори Коші –

Ейлера $t \frac{d}{dt}$ за часовою змінною. Розглянута задача має особливість у початковій точці $t = 0$. Встановлено умови існування (та наведено конструктивні способи їхньої перевірки) єдиного розв'язку задачі у класі

просторів типу Соболева майже періодичних за просторовими змінними функціями та порядок особливості розв'язку задачі в околі $t = 0$ (теореми 1, 2 та 4). Побудовано розв'язок розглянутої задачі у вигляді ряду (формула (57)).

Розв'язність розглянутої задачі у загальному випадку пов'язана з проблемою малих знаменників, для яких, на основі метричного підходу, встановлено оцінки знизу (теорема 5). Виділено випадки задачі, коли проблема малих знаменників відсутня (теореми 3, 6). Показано, що для гіперболічного за Петровським у вузькому сенсі рівняння вигляду (9) за додатніх порядків моментів в умовах (10) така задача є коректною за Адамаром (див. зауваження 2 та теореми 4, 6).

Дослідження виконані за підтримки гранту НАН України дослідницьким лабораторіям/групам молодих вчених НАН України (2021–2022 рр.), договір № 02/01-2021(3).

1. Ільків В. С., Симолюк М. М., Слоновьовський Я. О. Метричні оцінки характеристичного визначника багатоточкової задачі для рівняння типу Ейлера // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2022. – **65**, № 1-2. – С. 65–79.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.1-2.65-79>.
Te same: *Il'kiv V. S., Symoliuk M. M., Sloniiovskiy Y. O. Metric estimates of the characteristic determinant of multipoint problem for an Euler-type equation // J. Math. Sci.* – 2024. – **282**, No. 5. – P. 678–698.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07209-7>.
2. Ільків В. С., Симолюк М. М., Слоновьовський Я. О. Метричні оцінки характеристичного визначника задачі Ніколетті для рівняння типу Ейлера // *Прикл. проблеми механіки і математики.* – 2022. – Вип. 20. – С. 31–38.
– <https://doi.org/10.15407/apmm2022.20.31-38>.
3. Ільків В. С., Страп Н. І., Волянська І. І. Нелокальна крайова задача для рівняння з оператором диференціювання $z\partial/\partial z$ в уточненій шкалі просторів Соболева // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 4. – С. 5–16.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.4.5-16>.
Te same: *Il'kiv V. S., Strap N. I., Volyanska I. I. Nonlocal boundary-value problem for an equation with differentiation operator $z\partial/\partial z$ in a refined Sobolev scale // J. Math. Sci.* – 2023. – **273**, No. 6. – P. 885–900.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06552-5>.
4. Каленюк П. І., Нитребич З. М., Ільків В. С., Симолюк М. М. Лінійні інтегральні задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2020. – 216 с.
5. Кузь А. М., Пташник Б. Й. Задача з інтегральними умовами за часом для рівнянь гіперболічних за Гордінгом // *Укр. мат. журн.* – 2013. – **65**, № 2. – С. 252–265.
Te same: *Kuz' A. M., Ptashnyk B. I. A problem with integral conditions with respect to time for Gårding hyperbolic equations // Ukr. Math. J.* – 2013. – **65**, No. 2. – P. 277–293. – <https://doi.org/10.1007/s11253-013-0777-7>.
6. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
7. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
8. Agarwal P., Merker J., Schuldt G. Singular integral Neumann boundary conditions for semilinear elliptic PDEs // *Axioms.* – 2021. – **10**, No. 2. – Art. No. 74.
– <https://doi.org/10.3390/axioms10020074>.
9. Besicovitch A. S. Almost periodic functions. – Cambridge Univ. Press, 1932. – xiii+180 p.
10. Black F., Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities // *J. Polit. Econ.* – 1973. – **81**, No. 3. – P. 637–654.
– <https://www.jstor.org/stable/1831029>.
11. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // *Q. Appl. Math.* – 1963. – **21**, No. 2. – P. 155–160.
12. Čiurpaila R., Sapagovas M., Pupalaigė K., Šaltenienė G. K. On error estimation and convergence of the difference scheme for a nonlinear elliptic equation with an integral boundary condition // *Mathematics.* – 2025. – **13**, No. 5. – Art. No. 873.
– <https://doi.org/10.3390/math13050873>.

13. *Gantmacher F. R.* The theory of matrices. – Vol. 2. – New York: Chelsea Publ. Co., 1959. – 276 p.
14. *Gorbachuk V. I., Gorbachuk M. L.* Boundary value problems for operator differential equations. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. – 358 p.
15. *Graham R. L., Knuth D. E., Patashnik O.* Concrete mathematics: A foundation for computer science. – Reading, MA, USA: Addison-Wesley, 1994. – xiv+657 p.
16. *Hastir A., Muolo R.* A generalized Routh – Hurwitz criterion for the stability analysis of polynomials with complex coefficients: Application to the PI-control of vibrating structures // IFAC J. Syst. Control. – 2023. – **26**. – Art. No. 100235. – <https://doi.org/10.1016/j.ifaesc.2023.100235>.
17. *Kuz A. M., Ptashnyk B. Yo.* Problem for hyperbolic system of equations having constant coefficients with integral conditions with respect to the time variable // Carpathian Math. Publ. – 2014. – **6**, No. 2. – P. 282–299. – <https://doi.org/10.15330/cmp.6.2.282-299>.
18. *Lee C.-C., Mizuno M., Moon S.-H.* On the uniqueness of linear convection–diffusion equations with integral boundary conditions // C. R. Math. – 2023. – **361**. – P. 191–206. – <https://doi.org/10.5802/crmath.396>.
19. *Ross C. C.* Differential equations: an introduction with Mathematica. – New York: Springer Verlag, 2004. – xiv+434 p. – <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3949-7>.
20. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York : McGraw Hill, 1951. – 507 p.
21. *Xu X., Zhang L., Shi Y., Chen L. Q., Xu J.* Integral boundary conditions in phase field models // Comput. Math. Appl. – 2023. – **135**. – P. 1–5. – <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2022.11.025>.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CAUCHY – EULER OPERATORS

The conditions are established for the well-posed solvability of a problem with integral conditions in the form of moments of arbitrary order of the sought function and almost periodicity conditions with respect to the remaining variables for a partial differential equation involving Cauchy – Euler operators.

Key words: *integral conditions, Cauchy – Euler operator, almost periodic functions, conditionally well-posed problems, small denominators.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
20.05.24