

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПРОГНОЗУВАННЯ ЗАЛИШКОВОЇ ДОВГОВІЧНОСТІ БІМЕТАЛЕВИХ ПЛАСТИН ІЗ ВТОМНИМИ ТРІЩИНАМИ ЗА ВПЛИВУ ВОДНЕВМІСНОГО СЕРЕДОВИЩА

*Побудовано математичні моделі для визначення періоду докритичного росту поверхневої та наскрізної воднево-втомної тріщини в біметалевій пластині за дії циклічного навантаження і водневмісного середовища. Моделі ґрунтуються на використанні механічного аналогу першого закону термодинаміки – балансу енергетичних складових та швидкостей їхньої зміни. Розраховано залишкову довговічність пластини зі сталей 35ХНЗМФА і 40Х.*

**Ключові слова:** математична модель, біметалева пластина, ріст воднево-втомної тріщини, залишкова довговічність, водневмісне середовище.

**Вступ.** Багатошарові матеріали широко використовують у різних галузях техніки та промисловості. Конструкції з таких матеріалів мають значні переваги, зокрема легкість, високу міцність, багатофункціональність тощо. Однак через невідповідність властивостей матеріалів суміжних шарів [17] такі конструкції виявляють підвищену вразливість щодо утворення тріщин на межі поділу шарів, що загрожує погіршенням несучої здатності та може призвести до їхнього пошкодження чи руйнування [7]. Тому прогнозування поширення міжфазних тріщин у багатошарових конструкціях є важливим питанням теоретичного та прикладного значення.

У [12] досліджено локальну стійкість двошарових металевих пластин (сталь-алюмінієвий сплав) з тріщиною при розтягуванні. Визначено критичні напруження, що відповідають початку згину. Для точнішої локалізації приповерхневих тріщин у двошарових матеріалах у [20] запропоновано дисперсійне характеристичне рівняння. В [14] аналітично досліджено динамічну взаємодію між двома міжфазними тріщинами у тришаровій пластині, яка перебуває під дією антиплоских полів напружень. Запропоновано новий критерій руйнування [15] для прогнозування складної поведінки поширення біматеріальної міжфазної тріщини, яка може розшаровуватися вздовж межі поділу або виходити за межі поділу в один із сусідніх матеріалів. Для прогнозування відхилення тріщини використано критерій міцності, а для оцінки розшарування вздовж межі поділу – енергетичний критерій [15].

Для вивчення руйнування шаруватих матеріалів широко використовують чисельні методи [8, 10, 11, 13, 16]. На основі експериментальних даних у [10] розроблено тривимірний пружнопластичний скінченно-елементний підхід для вивчення впливу різнорідних шарів перед фронтом тріщини на рушійну силу (зміщення розкриття вершини) і ріст тріщини. Ефективність моделі в пружних умовах спочатку було оцінено за допомогою порівняння її прогнозів з точним аналітичним розв'язком. Ріст тріщин у верхньому шарі було змодельовано приблизно на 95% його товщини. У [16] здійснено тривимірний аналіз за допомогою методу скінченних елементів для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень, швидкості вивільнення енергії деформації і двох фазових кутів для напівеліптичних поверхневих тріщин у біметалевих пластинах скінченної товщини. В [13] запропоновано методику, яка дає змогу просто визначити критичний коефіцієнт інтенсивності напружень для зразків з біматеріалів, що згинаються. За допомогою скінченно-елементних розрахунків методику верифіковано для широкого діапазону комбінацій модулів Юнга, товщин шарів і довжин тріщин.

✉ ira\_dolinska@ukr.net

Відомі на сьогодні результати, зокрема наведені вище, не дають можливості прогнозувати довговічність біметалевих елементів конструкцій, особливо коли на них діють зовнішні експлуатаційні чинники. Чи не найагресивнішим є вплив водневмісних середовищ, оскільки водень виявляє високу здатність дифундувати в метал, суттєво погіршуючи його міцнісні властивості [6, 19]. Такий вплив має тенденцію до посилення за дії циклічного навантаження.

У цій роботі побудовано розрахункові моделі поширення тріщин у біметалевій пластині за дії циклічних навантажень і водневмісних середовищ. На їхній основі оцінено залишкову довговічність пластини. Розглянуто випадок поширення поверхневої і наскрізної воднево-втомних тріщин.

## 1. Математична модель визначення залишкової довговічності двошарової пластини з поверхневою тріщиною.

**1.1. Постановка задачі.** Розглядаємо двошарову пластину, виготовлену з матеріалів 1 і 2, з поверхневою плоскою тріщиною, яка перебуває під дією циклічного навантаження і водневмісного середовища, яке в зоні передруйнування біля контуру тріщини створює концентрацію водню  $C_H$  (рис. 1). Приймаємо, що початкова тріщина має півеліптичну конфігурацію з початковими розмірами  $\rho(0) = b_0$ ,  $\rho(\pi/2) = a_0$ . На пластину діє циклічне навантаження розтягу, яке спрямоване перпендикулярно до площини розташування тріщини, забезпечує симетричний напружено-деформований стан відносно неї і характеризується параметром  $p$ . Вважаємо, що шар 1 товщини  $h_1$  і шар 2 товщини  $h_2$  виготовлено з металів, пружні властивості яких є близькими, а міцнісні, наводнювальні та втомні властивості – суттєво відмінними. Виберемо систему координат  $Oxyz$  з центром  $O$  на межі поділу шарів, полярну систему координат  $Or\varphi$  – у площині тріщини, а вісь  $Oz$  спрямуємо вздовж перетину перерізу площини тріщини і площини з'єднання двох матеріалів. Задача полягає у визначенні кінетики поширення поверхневої воднево-втомної тріщини і періоду  $N = N_*$  (кількості циклів навантаження) її докритичного росту, тобто залишкової довговічності двошарової пластини.

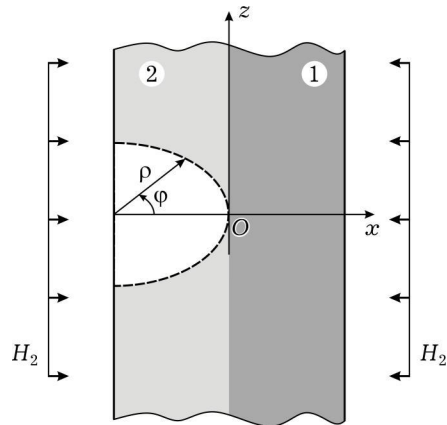


Рис. 1

Для розв'язання цієї задачі побудуємо розрахункову модель процесу руйнування матеріалу за розглянутих умов. Розглядаємо випадок, коли вершину напівеліпса початкової воднево-втомної тріщини розташовано на поверхні з'єднання шарів, а поширення тріщини відбуватиметься в глибину шару з матеріалу 1 (рис. 1). Раніше [3] при застосуванні енергетичного підходу [1, 2] було запропоновано розрахункову модель для дослідження локального руйнування однорідних матеріалів за дії водневмісного середовища і циклічного навантаження. Використавши цю розрахункову модель, розв'язування поставленої задачі зведемо до рівняння

$$\frac{\partial \rho}{\partial N} = \alpha_{H,i} \sqrt{1 + \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} \right)^2} \frac{K_{I,\max}^2 - K_{thH,i}^2}{4\sigma_{t,i} E (K_{fC,i}^2 - K_{I,\max}^2)} \times \\ \times ((K_{I,\max}^2 + K_{thH,i}^2)(1 - R)^4 + B_i), \quad i = 1, 2, \quad (1)$$

з початковою і кінцевою умовами

$$\begin{aligned}
N &= 0, & \rho(0, \varphi) &= \rho_0(\varphi), \\
N &= N_*, & \rho(N_*, \pi/2) &= h_1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Тут  $\alpha_{H,i}$ ,  $B_i$  – характеристики воднево-втомного руйнування  $i$ -го матеріалу,  $\sigma_{t,i}$  – усереднені напруження в зоні передруйнування біля вершини тріщини,  $K_{fC,i}$  – втомна тріщиностійкість  $i$ -го матеріалу,  $K_{thH,i}$  – нижнє порогове значення на кінетичній діаграмі воднево-втомного руйнування  $i$ -го матеріалу, нижче якого тріщина не поширюється,  $E$  – модуль пружності. Усі ці характеристики матеріалів визначають із експерименту [3]. Крім того,  $K_{I,max}$  – максимальне значення коефіцієнта інтенсивності напружень за цикл,  $R$  – коефіцієнт асиметрії циклу.

Отже, кінетику поширення воднево-втомної тріщини і період її докритичного росту визначаємо з (1) і (2). Розв'язок нелінійного диференціального рівняння в частинних похідних (1) отримати в аналітичний спосіб є досить складно. Надалі задачу розв'язуємо наближено, застосовуючи числові методи і приймаючи, що тріщина поширюючись буде наближено весь час зберігати півеліптичну конфігурацію. Тоді для визначення кінетики зміни конфігурації тріщини достатньо знати кінетику зміни півосей  $a$ ,  $b$  її еліптичної конфігурації. Для розв'язання задачі можна використати числовий метод Рунге – Кутга. Тоді рівняння (1) зведемо до системи диференціальних рівнянь для невідомих півосей еліпса величин  $a$ ,  $b$ :

$$\begin{aligned}
\frac{da}{dN} &= \alpha_{Hc,2} \frac{K_{I,a,max}^2 - K_{thH,2}^2}{K_{fC,2}^2 - K_{I,a,max}^2} ((K_{I,a,max}^2 + K_{thH,2}^2)(1-R)^4 + B_2), \\
\frac{db}{dN} &= \alpha_{Hc,1} \frac{K_{I,b,max}^2 - K_{thH,1}^2}{K_{fC,1}^2 - K_{I,b,max}^2} ((K_{I,b,max}^2 + K_{thH,1}^2)(1-R)^4 + B_1),
\end{aligned} \tag{3}$$

яку доповнено початковою та кінцевою умовами:

$$\begin{aligned}
N &= 0, & a(0) &= a_0, & b(0) &= h_2; \\
N &= N_*, & b(N_*) &= h.
\end{aligned} \tag{4}$$

Тут  $\alpha_{Hc,i} = \alpha_{H,i}/(4E\sigma_{t,i})$ ,  $K_{I,a,max}$ ,  $K_{I,b,max}$  – коефіцієнти інтенсивності напружень біля вершин півеліптичної тріщини, відповідно  $a$ ,  $b$ . Ці величини на основі результатів праці [6] можна подати у вигляді:

$$K_{I,b,max} = p\sqrt{\pi b} \frac{M}{\Phi} L, \quad K_{I,a,max} = p\sqrt{\pi b} \frac{M}{\Phi}. \tag{5}$$

де

$$\begin{aligned}
M &= 1.13 - 0.09\alpha - 0.54\beta^2 + \frac{0.89\beta^2}{0.2 + \alpha} + \frac{\beta^4}{2} - \frac{\beta^4}{0.65 + \alpha} + 14\beta^4(1-\alpha)^{2.4}, \\
L &= (1.1 + 0.35\beta^2)\sqrt{\alpha}, \quad \Phi = 1 + 1.464\alpha^{1.65}, \quad \alpha = b/a, \quad \beta = b/h.
\end{aligned}$$

Для визначення залишкової довговічності двошарової пластини вважаємо, що її виготовлено зі сталей 40Х (матеріал 1) [4] і 35ХНЗМФА (матеріал 2) [5]. Такий вибір марок сталей обумовлений тим, що для цих матеріалів в літературі відомі результати експериментальних досліджень їхнього воднево-втомного руйнування. Щоб застосувати математичну модель (3)–(5), необхідно мати усі характеристики матеріалів, які входять в рівняння (3). Визначимо ці характеристики у такий спосіб. У праці [4] побудовано кінетичну діаграму поширення воднево-втомної тріщини для сталі 40Х (рис. 2, кру-

жечки). Із використанням цих експериментальних даних, а також рівняння, записаного для випадку поширення тріщини в однорідному матеріалі

$$V = \alpha_{\text{Hc}} \frac{K_{\text{I,max}}^2 - K_{\text{thH}}^2}{K_{\text{fC}}^2 - K_{\text{I,max}}^2} ((K_{\text{I,max}}^2 + K_{\text{thH}}^2)(1 - R)^4 + B), \quad (6)$$

за допомогою методу найменших квадратів знайдено характеристики матеріалу сталі 40Х:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Hc},1} &= 6.3 \times 10^{-11} \text{ МПа}^{-2} \cdot \text{цикл}^{-1}, & B_1 &= 1270 \text{ МПа}^2, \\ K_{\text{thH},1} &= 7 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}, & K_{\text{fC},1} &= 40 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}. \end{aligned} \quad (7)$$

На підставі рівняння (6) і визначених параметрів (7) побудовано залежність швидкості росту воднево-втомної тріщини від коефіцієнта інтенсивності напружень (рис. 2, суцільна крива). Порівняння експериментальних і теоретичних результатів певною мірою підтверджує коректність рівняння (6), а тим самим – підходу до розв'язання задачі.

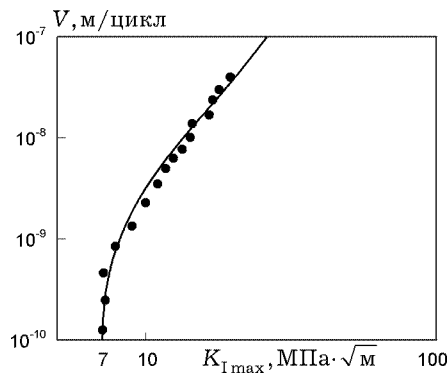


Рис. 2

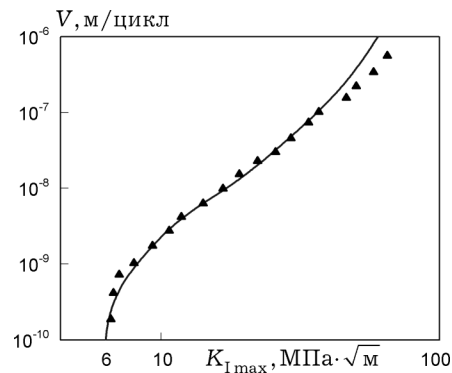


Рис. 3

У той самий спосіб на основі результатів експериментальних досліджень росту воднево-втомної тріщини в сталі 35ХНЗМФА [5] (див. рис. 3, трикутники) знайдено характеристики матеріалу 2:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Hc},2} &= 7.1 \times 10^{-11} \text{ МПа}^{-2} \cdot \text{цикл}^{-1}, & B_2 &= 2210 \text{ МПа}^2, \\ K_{\text{thH},2} &= 6 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}, & K_{\text{fC},2} &= 72 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}. \end{aligned} \quad (8)$$

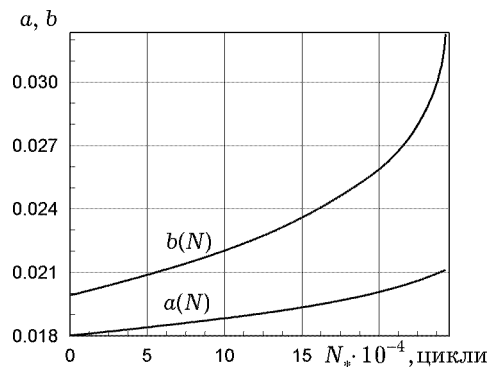


Рис. 4

Розглянемо випадок, коли  $p = 115 \text{ МПа}$ ,  $h_1 = h_2 = 0.02 \text{ м}$ ,  $a_0 = 0.018 \text{ м}$ ,  $b_0 = 0.02 \text{ м}$ , а механічні і втомні характеристики, а також параметри наводнювання, взято з (7), (8). Систему рівнянь (3) розв'язували чисельно методом Рунге – Кутта. На основі її розв'язку побудовано кінетичні залежності

півосей півеліптичної тріщини  $a$ ,  $b$  (рис. 4). На рисунку видно, що вершина  $b$  півеліптичної тріщини просувається швидше, що пов'язано з меншим опором матеріалу 1 щодо її воднево-втомного поширення.

З розв'язку системи (3) за умов (4) визначено залишкову довговічність двошарової пластини з поверхневою тріщиною  $N_* = 243656$  циклів. Також розраховано залишкову довговічність, коли матеріал пластини однорідний, відповідно, з матеріалів 1 або 2:  $N_{*,1} = 297123$  циклів,  $N_{*,2} = 319257$  циклів.

Із порівняння цих даних випливає нерівність  $N_* < N_{*,1} < N_{*,2}$ , що підтверджує коректність вибраного наближеного шляху розв'язання задачі.

**2. Розрахункова модель залишкової довговічності складеної пластини з наскрізною тріщиною.** Розглянемо біметалеву пластину, складену з двох компонент: півплощин 1 і 2 з близькими модулями пружності, але різними механічними та воднево-втомними характеристиками матеріалів. Пластину послаблено прямолінійною тріщиною початкової довжини  $2\ell_0$ . Перпендикулярно до лінії розміщення тріщини до пластини прикладено зовнішні довготривалі циклічні розтягувальні зусилля інтенсивності  $p$  в умовах водневмісного середовища (рис. 5). Водень, потрапляючи в тріщину, створює концентрацію у її вершині, що разом із дією силового чинника сприяє поширенню воднево-втомної тріщини до її критичного розміру та може призвести до руйнування пластини.

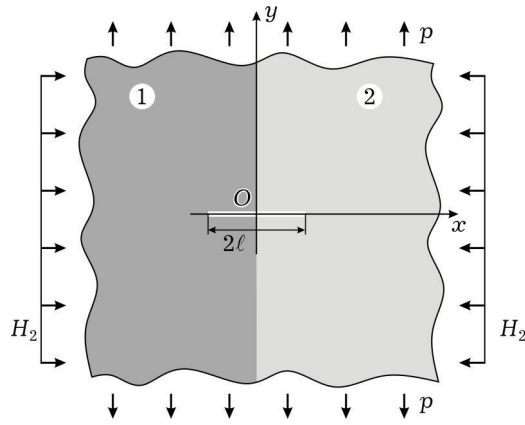


Рис. 5

Задача полягає у визначенні періоду докритичного росту тріщини  $N = N_*$ , тобто часу – кількості циклів навантаження, за який вона досягне критичного розміру  $\ell_1 + \ell_2 = \ell_*$ , де  $\ell_i$  – розміри кінців тріщини відповідно в півплощинах 1, 2,  $i = 1, 2$ .

Для визначення періоду докритичного росту воднево-втомної тріщини застосуємо рівняння (6), яке в цьому випадку зведеться до системи диференціальних рівнянь для невідомих функцій  $\ell_1(t)$ ,  $\ell_2(t)$ , що описують кінетику просування кінців тріщини в матеріалах 1 і 2 відповідно:

$$\frac{d\ell_i}{dN} = \alpha_{\text{Hc},i} \frac{K_{\text{I},i,\text{max}}^2 - K_{\text{thH},i}^2}{K_{\text{fC},i}^2 - K_{\text{I},i,\text{max}}^2} ((K_{\text{I},i,\text{max}}^2 + K_{\text{thH},i}^2)(1 - R)^4 + B_i), \quad (9)$$

де  $i = 1, 2$ . Система рівнянь (9) описує ріст воднево-втомної тріщини в складеній пластині. Для того щоб визначити період докритичного росту тріщини, додамо відповідні початкові і кінцеві умови

$$\begin{aligned} N = 0, \quad \ell_2(0) = \ell_0, \quad \ell_1(0) = \ell_0, \\ N = N_*, \quad \ell_1(N_*) + \ell_2(N_*) = \ell_*. \end{aligned} \quad (10)$$

Рівняння (9) з умовами (10) становлять математичну модель для визначення залишкової довговічності складеної біметалевої пластини за її воднево-втомного руйнування.

Для визначення критичного розміру  $\ell_*$  воднево-втомної тріщини в умовах (10) застосуємо критерій Ірвіна [9]

$$K_{\text{I},i,\text{max}}(\ell_*) = \min K_{\text{fC},i}.$$

Оскільки пружні характеристики матеріалів 1 і 2 є однаковими, то  $K_{I,1,\max} = K_{I,2,\max}$ . Розтяг пластини з тріщиною можна розглядати як аналог задачі Гріффітса при поширенні воднево-втомної тріщини. З огляду на це коефіцієнти інтенсивності напружень визначимо так [18]:

$$K_{I,i,\max} = p\sqrt{\frac{\pi}{2}(\ell_1 + \ell_2)}, \quad \ell = \ell_1 + \ell_2, \quad i = 1, 2. \quad (11)$$

Додавши перше рівняння системи (9) до другого, отримаємо таке рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{dN} = & \alpha_{\text{Hc},1} \frac{K_{I,1,\max}^2 - K_{\text{thH},1}^2}{K_{\text{fC},1}^2 - K_{I,1,\max}^2} ((K_{I,1,\max}^2 + K_{\text{thH},1}^2)(1-R)^4 + B_1) + \\ & + \alpha_{\text{Hc},2} \frac{K_{I,2,\max}^2 - K_{\text{thH},2}^2}{K_{\text{fC},2}^2 - K_{I,2,\max}^2} ((K_{I,2,\max}^2 + \\ & + K_{\text{thH},2}^2)(1-R)^4 + B_2). \end{aligned} \quad (12)$$

До рівняння (12) додамо початкову і кінцеву умови

$$\begin{aligned} N = 0, \quad \ell(0) = \ell_0, \\ N = N_*, \quad \ell(N_*) = \ell_*, \quad K_{I,\max}(\ell_*) = \min K_{\text{fC},i} \end{aligned} \quad (13)$$

Розглянемо випадок, коли пластину виготовлено зі сталей 35ХНЗМФА та 40Х, для яких механічні та воднево-втомні характеристики матеріалів 1 і 2 визначасмо зі співвідношень (7), (8), а амплітуда циклічних навантажень  $p = 110$  МПа. Вважаємо, що пластина зруйнується тоді, коли за критерієм Ірвіна [9] коефіцієнт інтенсивності напружень досягне найменшого значення циклічної тріщиностійкості  $K_{\text{fC}}$  матеріалів, тобто

$$K_{I,i,\max}(\ell_*) = 40 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}.$$

На основі (11) і (13) знайдено  $\ell_* = 0.08$  м. Після підстановки (7) і (8) в (12) математичну задачу (12), (13) розв'язано числово для різних значень початкового розміру тріщини. На основі отриманих результатів на рис. 6 побудовано залежність залишкової довговічності пластини від зміни початкового розміру дефекту.

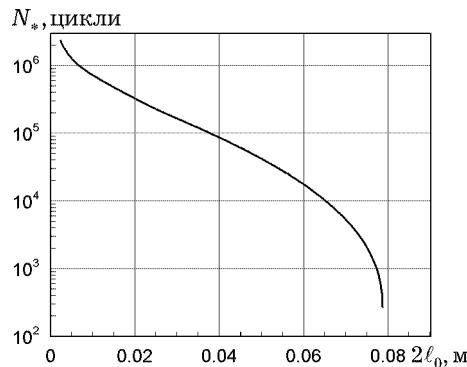


Рис. 6

**Висновки.** На основі енергетичного підходу побудовано розрахункову модель визначення залишкової довговічності двошарової пластини з поверхневою півеліптичною тріщиною за дії водню і циклічного навантаження. Побудовано розрахункову модель і на її основі розраховано період до-

критичного росту наскрізної воднево-втомної тріщини у складеній пластині. Чисельний розрахунок проведено для пластин, складених зі сталей 40X і 35ХНЗМФА.

1. Андрейків О. Є., Долінська І. Я., Кухар В. З., Штойко І. П. Вплив водню на залишковий ресурс труби газопроводу за маневрового режиму експлуатації // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2015. – **51**. – № 4. – С. 59–66.  
Te same: Andreikiv O. E., Dolins'ka I. Ya., Kukhar V. Z., Shtoiiko I. P. Influence of hydrogen on the residual service life of a gas pipeline in the maneuvering mode of operation // Mater. Sci. – 2016. – **51**, No. 4. – P. 500–508. – <https://doi.org/10.1007/s11003-016-9868-6>.
2. Андрейків О. Є., Долінська І. Я., Яворська Н. В. Оцінка періодів зародження і поширення повзучо-втомних тріщин у тонкостінних елементах конструкцій // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 3. – С. 7–15.  
Te same: Andreikiv O. E., Dolins'ka I. Ya., Yavors'ka N. V. Estimation of the periods of initiation and propagation of creep-fatigue cracks in thin-walled structural elements // Mater. Sci. – 2011. – **47**, No. 3. – P. 273–283. – <https://doi.org/10.1007/s11003-011-9393-6>.
3. Андрейків О., Никифорчин Г., Штойко І. Визначення залишкового ресурсу труби газопроводу за циклічною зміною тиску газу і наводнення її стінки // Проблеми корозії та протикорозійного захисту конструкційних матеріалів. Матеріали XIII Міжнар. конф. «Корозія-2016». – Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – № 11. Спецвипуск. – С. 61–66.
4. Георгиев М. Н., Никифорчин Г. Н., Межова Н. Я., Строк Л. П., Козак Л. Ю. О механизме влияния водорода в развитии усталостной трещины в конструкционных сталях // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1988. – **24**, № 3. – С. 39–42.  
Te same: Georgiev M. N., Nikiforchin G. N., Mezova N. Ya., Strok L. P., Kozak L. Yu. Mechanism of the effect of hydrogen on fatigue crack propagation in structural steels // Sov. Mater. Sci. – 1988. – **24**, No. 3. – P. 244–246. – <https://doi.org/10.1007/BF00724330>.
5. Романів О. Н., Никифорчин Г. Н., Козак Л. Ю. Структурная чувствительность циклической трещиностойкости роторной стали в газообразном водороде // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1984. – **20**, № 5. – С. 20–26.  
Te same: Romaniv O. N., Nikiforchin G. N., Kozak L. Yu. Structural sensitivity of the cyclic crack resistance of rotor steel in gaseous hydrogen // Sov. Mater. Sci. – 1985. – **20**, No. 5. – P. 424–429. – <https://doi.org/10.1007/BF00723135>.
6. Рудаєвський Д. В. Залишковий ресурс металевих елементів конструкцій у водневмісних середовищах. – Київ: Наук. думка, 2011. – 207 с.
7. Al-Ramahi N. J., Joffe R., Varna J. Criteria for crack path deviation in adhesive layer of bi-material DCB specimen // Compos. Part A-Appl. S. – 2021. – **147**. – Article No. 106408. – <https://doi.org/10.1016/j.compositesa.2021.106408>.
8. An X. M., Zhao Z. Y., Zhang H. H., He L. Modeling bimaterial interface cracks using the numerical manifold method // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2013. – **37**, No. 2. – P. 464–474. – <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2012.11.014>.
9. Anderson T. L. Fracture mechanics: Fundamentals and applications. – CRC Press, 1994. – 688 p.
10. Burke-Veliz A., Syngellakis S., Reed P. A. S. Assessment of three-dimensional crack growth in ductile layered material systems // Eng. Fract. Mech. – 2012. – **88**. – P. 15–27. – <https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2012.03.007>.
11. Chi Tho N., Van Thom D., Hong Cong P., Zenkour A. M., Hong Doan D., Van Minh P. Finite element modeling of the bending and vibration behavior of three-layer composite plates with a crack in the core layer // Compos. Struct. – 2023. – **305**. – Article No. 116529. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.116529>.
12. Guz A. N., Dyshel M. Sh. Buckling and cracking characteristics of two-layered plate in tension // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2002. – **38**, No. 1. – P. 103–107. – [https://doi.org/10.1016/S0167-8442\(02\)00084-8](https://doi.org/10.1016/S0167-8442(02)00084-8).
13. Kolitsch S., Kolednik O. Stress intensity factors for micro- and macroscale bimaterial cantilevers and bend specimens // Thin Solid Films. – 2021. – **732**. – Article No. 138750. – <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2021.138750>.
14. Kundu T. Dynamic interaction between two interface cracks in a three-layered plate // Int. J. Solids Struct. – 1988. – **24**, No. 1. – P. 27–39. – [https://doi.org/10.1016/0020-7683\(88\)90096-0](https://doi.org/10.1016/0020-7683(88)90096-0).

15. Li P., Shao Q., Li L., Yang J., Huang Q., Makradi A., Hu H. A novel strength-energy criterion for bimaterial interface crack propagation // Int. J. Solids Struct. – 2024. – **298**. – Article No. 112864. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2024.112864>.
16. Liu Zh., Chen X., Yu D., Wang X. Analysis of semi-elliptical surface cracks in the interface of bimaterial plates under tension and bending // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2018. – **93**. – P. 155–169. – <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2017.07.019>.
17. Mirsayar M. M. T-strain effects in kinked interfacial fracture of bonded composites // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2019. – **104**. – Article No. 102381. – <https://doi.org/10.1016/j.tafmec.2019.102381>.
18. Murakami Y. (ed.) Stress intensity factors handbook. – Oxford: Pergamon, 1987. – 1456 p.
19. Skalskyi V., Andreikiv O., Dolinska I. Assessment of subcritical crack growth in hydrogen-containing environment by the parameters of acoustic emission signals // Int. J. Hydrogen Energy. – 2018. – **43**, No. 10. – P. 5217–5224. – <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2018.01.124>.
20. Zhao Y., Zhang S. Exploiting Rayleigh waves in layered materials for the localization of near-surface cracks // Int. J. Mech. Sci. – 2024. – **278**. – Article No. 109421. – <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2024.109421>.

#### MATHEMATICAL MODELS FOR PREDICTING THE RESIDUAL LIFETIME OF BIMETALLIC PLATES WITH FATIGUE CRACKS UNDER THE INFLUENCE OF HYDROGEN-CONTAINING ENVIRONMENT

*Mathematical models have been developed to determine the period of subcritical growth of a surface and through hydrogen-fatigue crack in a bimetallic plate under cyclic loading and hydrogen-containing environment. The models are based on the mechanical counterpart of the first law of thermodynamics, i.e. the balance of energy components and their change rates. The residual lifetime of a plate made of 35KhN3MFA and 40Kh steels is calculated.*

**Key words:** *mathematical model, bimetallic plate, hydrogen-fatigue crack growth, residual lifetime, hydrogen-containing environment.*

<sup>1</sup> Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

<sup>2</sup> Фіз.-мех. ін-т ім. Г. В. Карпенка НАН України, Львів

Одержано

16.09.24