

**РОЗРАХУНОК ЛОКАЛЬНО НАВАНТАЖЕНИХ ТОНКИХ  
ОРТОТРОПНИХ ЗАМКНЕНИХ КОНІЧНИХ ОБОЛОНОК НА ОСНОВІ  
КЛАСИЧНОЇ ТА ДЕЯКИХ УТОЧНЕНИХ ТЕОРІЙ**

Реалізовано напіваналітичні алгоритми розв'язування задач про напружено-деформований стан тонких ортотропних зрізаних замкнених конічних оболонок під дією локальних навантажень, для моделювання яких використано дельтаподібні функції. Алгоритми використовують системи рівнянь теорій оболонок Кірхгоффа–Лява, типу Тимошенка та методу  $\{m, n\}$ -апроксимації, розв'язаних відносно частинних похідних першого порядку за координатою вздовж меридіана (при цьому всі невідомі функції, що в них входять, виражено через компоненти векторів розв'язків і частинні похідні за кільцевою координатою від них). Ці системи рівнянь записано в спеціальній формі і з використанням тригонометричних рядів Фур'є за кільцевою координатою зведено до послідовностей незв'язаних нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь, які можна розв'язувати за допомогою методу ортогональної прогонки С. К. Годунова. Отримані результати свідчать про надійність реалізованих алгоритмів і важливість уточнених теорій оболонок для адекватного опису тривимірного напруженого стану.

**Ключові слова:** конічна оболонка, локальне навантаження, теорія Кірхгоффа – Лява, теорія типу Тимошенка, метод  $\{m, n\}$ -апроксимації, тригонометричний ряд, метод ортогональної прогонки С. К. Годунова.

**Вступ.** Багато споруд (вежі, градирні, резервуари для води тощо) і конструкцій (ракети, літаки, підводні човни, корпуси ядерних реакторів і т. д.), а також деякі біомеханічні структури (аорта людини) мають форму конічних оболонок або містять елементи такої форми.

На сьогодні для розв'язування двовимірних крайових задач для оболонок обертання найчастіше використовують аналітичні методи [15–17, 41, 42], метод скінченних елементів (МСЕ) [20, 47, 48], метод узагальнених диференціальних квадратур [52].

У випадку осесиметричної деформації замкненої оболонки обертання маємо справу з одновимірною задачею. Основні підходи до розв'язування крайових задач для оболонок обертання з порушенням осесиметричності геометричних (наприклад товщини) або фізичних властивостей, зовнішніх навантажень тощо полягають у використанні звичайних [3, 6, 8, 9, 13, 18, 19, 22, 23, 27, 28, 32–35, 37, 39, 40, 44–46, 49–51, 53–55] або дискретних [13] тригонометричних рядів Фур'є, методу сплайн-колокацій [1, 2, 12–14, 35] або узагальненого методу Канторовича (Канторовича–Власова або повних систем) [36] за однією з координат на серединній поверхні. Таким чином, двовимірні задачі зводять до набору незв'язаних одновимірних задач, які відповідають гармонікам розвинень Фур'є, до однієї одновимірної задачі для гармонік розвинень Фур'є або параметрів сплайнів тощо. На сьогодні для розв'язування одновимірних задач для оболонок найчастіше використовують аналітичні методи [3, 8, 9, 19, 23, 28, 33, 37, 39, 49, 53], МСЕ [27, 40, 44–46, 50, 51], метод диференціальних квадратур [54, 55], метод скінченних різниць [32, 34], багаточаровий метод [38], метод ортогональної прогонки С. К. Годунова [1, 2, 6, 12–14, 18, 22, 35, 36].

Моделі, запропоновані в оглянутій літературі, базуються на мембранній (безмоментній) теорії [3, 41], класичних теоріях [6, 8, 12, 13, 15, 17–19, 22,

---

✉ roman.tuch@gmail.com

28, 32, 33, 35–37, 39, 41, 42, 48–51, 53], класичній асимптотичній теорії [54], класичних теоріях з урахуванням деформацій поперечного зсуву [40, 45], теоріях першого порядку [1, 2, 12–14, 22, 41], уточненій асимптотичній теорії [55], теоріях першого порядку з урахуванням поперечної нормальної деформації [20, 41, 42], теорії третього порядку, що нехтує поперечною нормальною деформацією [52], теорії третього порядку з урахуванням поперечної нормальної деформації [38], теоріях вищого порядку, що нехтують поперечною нормальною деформацією [46, 47], теоріях вищого порядку з урахуванням поперечної нормальної деформації [34].

Наскільки відомо авторам, у літературі немає аналізу конічних оболонок з використанням теорій методу  $\{m, n\}$ -апроксимації. Проблеми зосереджених чи локальних навантажень або зосереджених джерел тепла було вивчено за допомогою методу  $\{m, n\}$ -апроксимації в [4, 24, 25, 31], але лише для пластин і циліндричних оболонок.

У пропонованій роботі побудовано алгоритми чисельно-аналітичного розв'язування задач про напружено-деформований стан локально навантажених тонких ортотропних зрізаних замкнених конічних оболонок на основі теорій методу  $\{m, n\}$ -апроксимації, Кірхгоффа–Лява і типу Тимошенка.

З вихідних систем рівнянь цих теорій отримано еквівалентні їм системи рівнянь, розв'язаних відносно перших похідних від узагальнених переміщень і деяких узагальнених напружень за координатою вздовж меридіана.

Ці системи рівнянь записано в спеціальній формі і, подібно до того, як це було зроблено в роботах [6, 13, 18, 22, 35], за допомогою тригонометричних рядів Фур'є за кільцевою координатою зведено до послідовностей незв'язаних нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь.

На основі методу ортогональної прогонки С. К. Годунова побудовано алгоритми розв'язування крайових задач для нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь.

Як приклад використання цих алгоритмів розглянуто задачі про напружено-деформований стан локально навантаженої консольної тонкої ізотропної зрізаної замкненої конічної оболонки. Для моделювання локальних навантажень було використано дельтаподібні функції і їхні тригонометричні розвинення [5] за кільцевою координатою.

Виконано порівняння результатів, отриманих з використанням теорій Кірхгоффа – Лява, типу Тимошенка та методу  $\{m, n\}$ -апроксимації.

**1. Системи рівнянь для тонких конічних оболонок.** Розглянемо праву декартову прямокутну систему координат  $x, y, z$ , праву циліндричну систему координат  $r, \theta, z$  і поверхню  $S$ , утворену обертанням відрізка прямої навколо осі  $z$ , яка лежить із цим відрізком в одній площині. За криволінійні координати на  $S$  виберемо координату вздовж відрізка  $s$ , що відраховується від початкової точки  $s = s_0$  до кінцевої  $s = s_M$ , де  $M$  – натуральне число,  $s_0 < s_M$ , і координату вздовж кола  $\theta$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Координату  $s$  ще назвемо координатою вздовж меридіана.

Формули, що встановлюють залежність координат  $r$  і  $z$  точки відрізка від її координати  $s$ , такі:

$$r(s) = r_0 + (s - s_0) \sin \varphi, \quad z(s) = (s - s_0) \cos \varphi,$$

де  $0 < \varphi < \pi/2$  – кут, утворений віссю  $z$  з відрізком;  $r_0$  – радіус кола, утвореного обертанням навколо осі  $z$  початкової точки відрізка  $s = s_0$ .

Поперечну координату  $x_3$  будемо відраховувати у бік зростання зовнішньої нормалі до  $S$ , напрямком якої виберемо так, щоб координати  $s, \theta, x_3$  утворювали ліву систему координат.

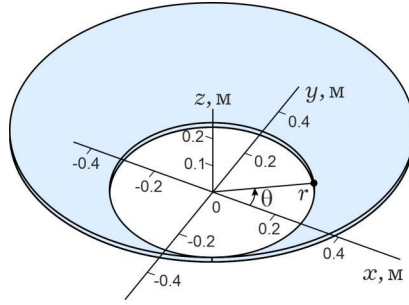


Рис. 1. Тонка замкнена конічна оболонка.

Розглянемо конічну оболонку, що має поверхню  $S$  за серединну і поверхні  $s = s_0$  і  $s = s_M$  – за бокові. Нехай  $h$  – півтовщина оболонки;  $k_s = 0$  і  $k_\theta = -\frac{\cos \varphi}{r}$  – головні кривини поверхні  $S$ ;  $S^-$  і  $S^+$  – лицьові поверхні оболонки;  $u_s, u_\theta, u_3$  – фізичні компоненти вектора переміщень;  $\sigma_{ss}, \sigma_{s\theta}, \sigma_{s3}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta 3}, \sigma_{33}$  – фізичні компоненти тензора напружень;  $P_{3s}^\pm, P_{3\theta}^\pm, P_{33}^\pm$  – значення напружень  $\sigma_{s3}, \sigma_{\theta 3}, \sigma_{33}$  на поверхнях  $S^\pm$ . Рівняння поверхонь  $S^\pm$  мають вигляд  $x_3 = \pm h$ . Товщину оболонки вважаємо сталою:  $h = \text{const}$ .

У подальшому розглядатимемо тонкі оболонки. Зрізану замкнену конічну оболонку будемо вважати тонкою, якщо виконуються умови [26]

$$\frac{r_0 + (s_M - s_0) \sin \varphi}{2 \cdot 10^3 \cos \varphi} \leq h \leq \frac{r_0}{80 \cos \varphi}, \quad \frac{s_M - s_0}{80} \leq h \leq \frac{s_M - s_0}{10}. \quad (1)$$

Припустимо, що координатні напрямки системи координат  $s, \theta, x_3$  в кожній точці оболонки збігаються з напрямками, еквівалентними в сенсі пружних властивостей, і що в кожній точці оболонки є три площини пружної симетрії (випадок ортотропної оболонки), нормальні до  $s, \theta, x_3$ .

Нехай  $P_{3s}^\pm(s, \theta) = P_{3\theta}^\pm(s, \theta) = P_{33}^\pm(s, \theta) = 0, P_{33}^+(s_0, \theta) = P_{33}^+(s_M, \theta) = 0$ . Вираз функції  $P_{33}^\pm(s, \theta)$  конкретизуємо нижче.

Наведемо системи диференціальних рівнянь теорій оболонок Кірхгофа-Лява, типу Тимошенка й методу  $\{m, n\}$ -апроксимації, розв'язаних відносно частинних похідних першого порядку за  $s$ , і запишемо їх у спеціальній формі.

**1.1. Система рівнянь теорії ортотропних конічних оболонок Кірхгофа-Лява.** Приймемо наближені вирази для полів переміщень і напружень у вигляді

$$u_s = u - \frac{\partial w}{\partial s} x_3, \quad u_\theta = v + \left( v \cos \varphi - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \frac{x_3}{r}, \quad u_3 = w, \\ \sigma_{ss} = \frac{N_s}{\delta} + \frac{12M_s}{\delta^3} x_3, \quad \sigma_{s\theta} = \frac{S}{\delta} + \frac{12H}{\delta^3} x_3, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{N_\theta}{\delta} + \frac{12M_\theta}{\delta^3} x_3,$$

де  $\delta = 2h$ ,  $u, v, w$  – переміщення точки поверхні  $S$  у напрямках  $s, \theta, x_3$  відповідно;  $N_s, N_\theta$  і  $S$  – нормальні і зсувне зусилля;  $M_s, M_\theta$  і  $H$  – згинні і крутний моменти.

Позначимо поперечні зусилля через  $Q_s$  і  $Q_\theta$  та введемо функції  $\hat{T}_{s\theta}$  і  $\hat{Q}_s$  за формулами

$$\hat{T}_{s\theta} = S + \frac{2 \cos \varphi}{r} H, \quad \hat{Q}_s = Q_s + \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}. \quad (2)$$

З урахуванням позначень (2) рівняння рівноваги запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}\frac{\partial N_s}{\partial s} &= -\frac{1}{r} \left[ (N_s - N_\theta) \sin \varphi + \frac{\partial S}{\partial \theta} \right], \\ \frac{\partial \hat{T}_{s\theta}}{\partial s} &= -\frac{1}{r} \left( 2\hat{T}_{s\theta} \sin \varphi + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \right), \\ \frac{\partial \hat{Q}_s}{\partial s} &= -\frac{1}{r} \left[ \hat{Q}_s \sin \varphi - N_\theta \cos \varphi + \frac{1}{r} \left( 2 \frac{\partial H}{\partial \theta} \sin \varphi + \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} \right) \right] - q_3, \\ \frac{\partial M_s}{\partial s} &= -\frac{1}{r} \left[ (M_s - M_\theta) \sin \varphi + 2 \frac{\partial H}{\partial \theta} \right] + \hat{Q}_s,\end{aligned}\quad (3)$$

$$Q_\theta = \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{r} \left( 2H \sin \varphi + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \right), \quad (4)$$

де  $q_3 = P_{33}^+$ . Доповнимо рівняння (3) диференціальними рівняннями

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \epsilon_s, \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \gamma_{s\theta} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \varphi \right), \quad \frac{\partial w}{\partial s} = -\phi_s, \quad \frac{\partial \phi_s}{\partial s} = \alpha_s. \quad (5)$$

Перше, друге та останнє з рівнянь (5) тривіально впливають з деформаційних співвідношень теорії оболонок Кірхгоффа-Лява.

Отже, маємо систему диференціальних рівнянь (3), (5), розв'язаних відносно частинних похідних першого порядку за  $s$  від функцій  $N_s$ ,  $\hat{T}_{s\theta}$ ,  $\hat{Q}_s$ ,  $M_s$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\phi_s$ . Решту невідомих величин, що фігурують у виразах (2), рівняннях (3)–(5) та решті рівнянь теорії оболонок Кірхгоффа-Лява, можемо виразити через ці функції і частинні похідні за  $\theta$  від них:

$$\begin{aligned}\epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \varphi + w \cos \varphi \right), & \epsilon_s &= \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1 \delta} N_s - \nu_2 \epsilon_\theta, \\ H &= \frac{G_{12} \delta^3 r}{2(3r^2 + \delta^2 \cos^2 \varphi)} \left[ \frac{\partial \phi_s}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \left( \frac{\hat{T}_{s\theta}}{G_{12} \delta} - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \cos \varphi \right], \\ S &= \hat{T}_{s\theta} - \frac{2 \cos \varphi}{r} H, & \gamma_{s\theta} &= \frac{S}{G_{12} \delta}, \\ Q_s &= \hat{Q}_s - \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \theta}, & N_\theta &= E_2 \delta \left( \epsilon_\theta + \frac{\nu_1}{E_1 \delta} N_s \right), \\ \alpha_\theta &= \frac{1}{r} \left( \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \phi_s \sin \varphi \right), & \alpha_s &= \frac{12(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1 \delta^3} M_s - \nu_2 \alpha_\theta, \\ \alpha_{s\theta} &= \frac{12H}{G_{12} \delta^3}, & M_\theta &= \frac{E_2 \delta^3}{12} \left( \alpha_\theta + \frac{12\nu_1}{E_1 \delta^3} M_s \right), \\ Q_\theta &= \frac{\delta^2 r}{2(3r^2 + \delta^2 \cos^2 \varphi)} \left\langle \frac{\cos \varphi}{r} \left( \frac{4 \cos \varphi}{r} H - \hat{T}_{s\theta} \right) \sin \varphi + G_{12} \delta \left\{ \frac{\partial \alpha_s}{\partial \theta} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\cos \varphi}{r} \left[ \frac{1}{G_{12} \delta} \left( \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial \epsilon_s}{\partial \theta} \right] \right\} \right\rangle + \frac{1}{r} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta},\end{aligned}\quad (6)$$

де  $\nu_1$  – коефіцієнт Пуассона, що характеризує стискання в напрямку  $\theta$  при розтягу в напрямку  $s$ ;  $\nu_2$  – коефіцієнт Пуассона, що характеризує

стискання в напрямку  $s$  при розтягу в напрямку  $\theta$ ;  $E_1$  і  $E_2$  – модулі Юнга для розтягу–стиску в напрямках  $s$  і  $\theta$  відповідно;  $G_{12}$  – модуль зсуву, що характеризує зміну кутів між напрямками  $s$  і  $\theta$ .

У випадку ізотропної оболонки  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $E_1 = E_2 = E$ ,  $G_{12} = G = E / (2 + 2\nu)$ , де  $E$ ,  $G$  і  $\nu$  – модуль Юнга, модуль зсуву і коефіцієнт Пуассона відповідно.

Систему рівнянь (3), (5) запишемо у формі

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y_1}{\partial s} &= \Phi_{10}^{KL} Y_1 + \Phi_{11}^{KL} \frac{\partial Y_2}{\partial \theta} + \Phi_{12}^{KL} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \theta^2} + \Phi_{13}^{KL} \frac{\partial^3 Y_2}{\partial \theta^3} + \Phi_{14}^{KL} \frac{\partial^4 Y_1}{\partial \theta^4} + f_1, \\ \frac{\partial Y_2}{\partial s} &= \Phi_{20}^{KL} Y_2 + \Phi_{21}^{KL} \frac{\partial Y_1}{\partial \theta} + \Phi_{22}^{KL} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial \theta^2} + \Phi_{23}^{KL} \frac{\partial^3 Y_1}{\partial \theta^3},\end{aligned}\quad (7)$$

де

$$Y_1 = [N_s, \hat{Q}_s, M_s, u, w, \phi_s]^\top, \quad Y_2 = [\hat{T}_{s\theta}, v]^\top, \quad f_1 = [0, -q_3, 0, 0, 0, 0]^\top, \quad (8)$$

$\Phi_{10}^{KL}$ ,  $\Phi_{11}^{KL}$ ,  $\Phi_{12}^{KL}$ ,  $\Phi_{13}^{KL}$ ,  $\Phi_{14}^{KL}$ ,  $\Phi_{20}^{KL}$ ,  $\Phi_{21}^{KL}$ ,  $\Phi_{22}^{KL}$ ,  $\Phi_{23}^{KL}$  – матриці–функції від  $s$ , до елементів яких не входять ні шукані функції, ні їхні частинні похідні будь-яких порядків. Вектори  $Y_1$  і  $Y_2$  назвемо векторами розв'язків.

Вирази (6) запишемо у формі

$$\begin{aligned}Y_3 &= \Phi_{30}^{KL} Y_1 + \Phi_{31}^{KL} \frac{\partial Y_2}{\partial \theta} + \Phi_{32}^{KL} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \theta^2}, \\ Y_4 &= \Phi_{40}^{KL} Y_2 + \Phi_{41}^{KL} \frac{\partial Y_1}{\partial \theta} + \Phi_{42}^{KL} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial \theta^2} + \Phi_{43}^{KL} \frac{\partial^3 Y_1}{\partial \theta^3},\end{aligned}\quad (9)$$

де

$$Y_3 = [e_s, e_\theta, x_s, x_\theta, N_\theta, Q_s, M_\theta]^\top, \quad Y_4 = [\gamma_{s\theta}, x_{s\theta}, S, Q_\theta, H]^\top, \quad (10)$$

$\Phi_{30}^{KL}$ ,  $\Phi_{31}^{KL}$ ,  $\Phi_{32}^{KL}$ ,  $\Phi_{40}^{KL}$ ,  $\Phi_{41}^{KL}$ ,  $\Phi_{42}^{KL}$ ,  $\Phi_{43}^{KL}$  – матриці–функції від  $s$ , до елементів яких не входять ні шукані функції, ні їхні частинні похідні будь-яких порядків.

Для системи (7), (9) розглянемо такі граничні умови:

$$\begin{aligned}u = w = 0, \quad \phi_s = 0 & \quad \text{при } s = s_0, \\ N_s = \hat{Q}_s = 0, \quad M_s = 0 & \quad \text{при } s = s_M;\end{aligned}\quad (11)$$

$$v = 0 \quad \text{при } s = s_0, \quad \hat{T}_{s\theta} = 0 \quad \text{при } s = s_M. \quad (12)$$

**1.2. Система рівнянь теорії ортотропних конічних оболонок типу Тимошенка.** Прийємо наближені вирази для полів переміщень і напружень у вигляді

$$\begin{aligned}u_s &= u + \beta_s x_3, \quad u_\theta = v + \beta_\theta x_3, \quad u_3 = w, \\ \sigma_{ss} &= \frac{N_s}{\delta} + \frac{12M_s}{\delta^3} x_3, \quad \sigma_{s\theta} = \frac{S}{\delta} + \frac{12H}{\delta^3} x_3, \quad \sigma_{s3} = \frac{3}{2\delta} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{\delta} \right)^2 \right] Q_s, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{N_\theta}{\delta} + \frac{12M_\theta}{\delta^3} x_3, \quad \sigma_{\theta 3} = \frac{3}{2\delta} \left[ 1 - \left( \frac{2x_3}{\delta} \right)^2 \right] Q_\theta,\end{aligned}$$

де  $\beta_s$  і  $\beta_\theta$  – кути повороту нормалі, а  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $N_s$ ,  $S$ ,  $N_\theta$ ,  $Q_s$ ,  $Q_\theta$ ,  $M_s$ ,  $H$ ,  $M_\theta$  мають той самий зміст, що й у попередньому підпункті.

Рівняння рівноваги подамо у вигляді

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_s}{\partial s} &= -\frac{1}{r} \left[ (N_s - N_\theta) \sin \varphi + \frac{\partial S}{\partial \theta} \right], \\
\frac{\partial T_{s\theta}}{\partial s} &= -\frac{1}{r} \left( 2T_{s\theta} \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{r} H \sin \varphi + Q_\theta \cos \varphi + \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} \right), \\
\frac{\partial Q_s}{\partial s} &= -\frac{1}{r} \left( Q_s \sin \varphi - N_\theta \cos \varphi + \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \right) - q_3, \\
\frac{\partial M_s}{\partial s} &= Q_s - \frac{1}{r} \left[ (M_s - M_\theta) \sin \varphi + \frac{\partial H}{\partial \theta} \right], \\
\frac{\partial H}{\partial s} &= Q_\theta - \frac{1}{r} \left( 2H \sin \varphi + \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} \right). \tag{13}
\end{aligned}$$

Доповнимо (13) диференціальними рівняннями, які тривіально випливають з деформаційних співвідношень теорії оболонок типу Тимошенка:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial s} &= \epsilon_s, & \frac{\partial v}{\partial s} &= \gamma_{s\theta} - \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \varphi \right), \\
\frac{\partial w}{\partial s} &= \gamma_{s3} - \beta_s, & \frac{\partial \beta_s}{\partial s} &= \alpha_s, \\
\frac{\partial \beta_\theta}{\partial s} &= \alpha_{s\theta} - \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial \beta_s}{\partial \theta} - \beta_\theta \sin \varphi + \gamma_{s\theta} \cos \varphi - \frac{\cos \varphi}{r} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \varphi \right) \right]. \tag{14}
\end{aligned}$$

Отже, маємо систему диференціальних рівнянь (13), (14), розв'язаних відносно частинних похідних першого порядку за  $s$  від функцій  $N_s$ ,  $T_{s\theta}$ ,  $Q_s$ ,  $M_s$ ,  $H$ ,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $\beta_s$ ,  $\beta_\theta$ . Решту невідомих величин, що фігурують у рівняннях (13), (14) та решті рівнянь теорії оболонок типу Тимошенка, виразимо через ці функції і частинні похідні за  $\theta$  від них:

$$\begin{aligned}
\epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \varphi + w \cos \varphi \right), & \epsilon_s &= \frac{1 - \nu_1 \nu_2}{E_1 \delta} N_s - \nu_2 \epsilon_\theta, \\
S &= T_{s\theta} - \frac{\cos \varphi}{r} H, & \gamma_{s\theta} &= \frac{S}{G_{12} \delta}, & N_\theta &= E_2 \delta \left( \epsilon_\theta + \frac{\nu_1}{E_1 \delta} N_s \right), \\
\gamma_{\theta 3} &= \beta_\theta - \frac{1}{r} \left( v \cos \varphi - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right), & \gamma_{s3} &= \frac{6Q_s}{5G_{13} \delta}, & Q_\theta &= \frac{5G_{23} \delta}{6} \gamma_{\theta 3}, \\
\alpha_\theta &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \beta_\theta}{\partial \theta} + \beta_s \sin \varphi \right), & \alpha_s &= \frac{12(1 - \nu_1 \nu_2)}{E_1 \delta^3} M_s - \nu_2 \alpha_\theta, \\
\alpha_{s\theta} &= \frac{12H}{G_{12} \delta^3}, & M_\theta &= \frac{E_2 \delta^3}{12} \left( \alpha_\theta + \frac{12\nu_1}{E_1 \delta^3} M_s \right), \tag{15}
\end{aligned}$$

де  $G_{23}$  і  $G_{13}$  – модулі зсуву, що характеризують зміни кутів між напрямками  $\theta$  і  $x_3$  та між напрямками  $s$  і  $x_3$  відповідно, а  $\nu_1$ ,  $\nu_2$ ,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  мають той самий зміст, що й у попередньому підпункті.

У випадку ізотропної оболонки  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$ ,  $E_1 = E_2 = E$ ,  $G_{12} = G_{23} = G_{13} = G$ .

Систему рівнянь (13), (14) запишемо у формі

$$\frac{\partial Y_1}{\partial s} = \Phi_{10}^{\text{Tym}} Y_1 + \Phi_{11}^{\text{Tym}} \frac{\partial Y_2}{\partial \theta} + \Phi_{12}^{\text{Tym}} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \theta^2} + f_1,$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial s} = \Phi_{20}^{\text{Tym}} Y_2 + \Phi_{21}^{\text{Tym}} \frac{\partial Y_1}{\partial \theta} + \Phi_{22}^{\text{Tym}} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial \theta^2}, \quad (16)$$

де

$$Y_1 = [N_s, Q_s, M_s, u, w, \beta_s]^\top, \quad Y_2 = [T_{s0}, H, v, \beta_\theta]^\top, \\ f_1 = [0, -q_3, 0, 0, 0, 0]^\top, \quad (17)$$

$\Phi_{10}^{\text{Tym}}, \Phi_{11}^{\text{Tym}}, \Phi_{12}^{\text{Tym}}, \Phi_{20}^{\text{Tym}}, \Phi_{21}^{\text{Tym}}, \Phi_{22}^{\text{Tym}}$  – матриці-функції від  $s$ , до елементів яких не входять ні шукані функції, ні їхні частинні похідні будь-яких порядків.

Вирази (15) запишемо у формі

$$Y_3 = \Phi_{30}^{\text{Tym}} Y_1 + \Phi_{31}^{\text{Tym}} \frac{\partial Y_2}{\partial \theta}, \quad Y_4 = \Phi_{40}^{\text{Tym}} Y_2 + \Phi_{41}^{\text{Tym}} \frac{\partial Y_1}{\partial \theta}, \quad (18)$$

де

$$Y_3 = [e_s, e_\theta, \gamma_{s3}, \alpha_s, \alpha_\theta, N_\theta, M_\theta]^\top, \quad Y_4 = [\gamma_{s0}, \gamma_{\theta3}, \alpha_{s0}, S, Q_\theta]^\top, \quad (19)$$

$\Phi_{30}^{\text{Tym}}, \Phi_{31}^{\text{Tym}}, \Phi_{40}^{\text{Tym}}, \Phi_{41}^{\text{Tym}}$  – матриці-функції від  $s$ , до елементів яких не входять ні шукані функції, ні їхні частинні похідні будь-яких порядків.

Для системи (16), (18) розглянемо такі граничні умови:

$$u = w = 0, \quad \beta_s = 0 \quad \text{при } s = s_0, \\ N_s = Q_s = 0, \quad M_s = 0 \quad \text{при } s = s_M; \quad (20)$$

$$v = 0, \quad \beta_\theta = 0 \quad \text{при } s = s_0, \\ T_{s0} = 0, \quad H = 0 \quad \text{при } s = s_M. \quad (21)$$

**1.3. Система рівнянь теорії ортотропних конічних оболонок у рамках  $\{m, n\}$ -апроксимації.** Припустимо, що функції  $u_s, u_\theta, u_3, \sigma_{ss}, \sigma_{s0}, \sigma_{s3}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{\theta3}, \sigma_{33}$  є достатньо гладкими і їх можна розвивати в ряди за поліномами Лежандра  $P_k(\zeta)$  [5, 7, 25, 30], де  $\zeta = x_3 / h$ .

У розвиненні тангенціальних переміщень виділимо по  $(m+1)$ -му члену, а в розвиненні нормальної компоненти –  $n+1$  член [29, 43]:

$$(u_s, u_\theta) = \sum_{k=0}^m (u_s^{(k)}, u_\theta^{(k)}) P_k(\zeta), \quad u_3 = \sum_{k=0}^n u_3^{(k)} P_k(\zeta). \quad (22)$$

Коефіцієнти  $u_s^{(k)}, u_\theta^{(k)}, k > m; u_3^{(k)}, k > n$ , можуть бути й ненульовими. Будемо розглядати випадок  $m \geq n+1$ .

Подамо компоненти тензора напружень наближеними виразами [29]

$$(\sigma_{ss}, \sigma_{s0}, \sigma_{\theta\theta}) = \sum_{k=0}^m \frac{2k+1}{2h} (P_{ss}^{(k)}, P_{s0}^{(k)}, P_{\theta\theta}^{(k)}) P_k(\zeta), \\ (\sigma_{s3}, \sigma_{\theta3}) = \sum_{k=0}^{m+1} \frac{2k+1}{2h} (P_{s3}^{(k)}, P_{\theta3}^{(k)}) P_k(\zeta), \\ \sigma_{33} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2h} P_{33}^{(k)} P_k(\zeta). \quad (23)$$

Введемо позначення

$$\underline{P}_{ss}^{(k)} = P_{ss}^{(k)} - X_{ss}^k, \quad \underline{P}_{\theta\theta}^{(k)} = P_{\theta\theta}^{(k)} - X_{\theta\theta}^k,$$

$$P_{33}^{(k)} = P_{33}^{(k)} - X_{33}^k, \quad k = 0, 1, \dots, n+1,$$

де

$$X_{ss}^k = \frac{2h}{2k+1} \varepsilon_{n+1,k} \frac{A_{13}}{A_{33}} P_{33}^+, \quad X_{\theta\theta}^k = \frac{2h}{2k+1} \varepsilon_{n+1,k} \frac{A_{23}}{A_{33}} P_{33}^+,$$

$$X_{33}^k = \frac{2h}{2k+1} \varepsilon_{n+1,k} P_{33}^+, \quad k = 0, 1, \dots, n+1,$$

причому

$$\varepsilon_{n+1,k} = \frac{2k+1}{(n+2)[n+2+(-1)^{k+n+1}]}, \quad k = 0, 1, \dots, n+1.$$

Тут  $A_{13}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{33}$  – компоненти тензора пружної жорсткості матеріалу або модулі пружності. Ці та решту модулів пружності, що не дорівнюють нулеві, виразимо через «технічні сталі» [21]:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{(1 - \nu_{32}\nu_{23})E_1}{\Delta}, & A_{12} &= \frac{(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})E_1}{\Delta}, & A_{13} &= \frac{(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})E_1}{\Delta}, \\ A_{22} &= \frac{(1 - \nu_{31}\nu_{13})E_2}{\Delta}, & A_{23} &= \frac{(\nu_{32} + \nu_{31}\nu_{12})E_2}{\Delta}, & A_{33} &= \frac{(1 - \nu_{21}\nu_{12})E_3}{\Delta}, \\ A_{44} &= G_{23}, & A_{55} &= G_{13}, & A_{66} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (24)$$

де  $E_3$  – модуль Юнга для розтягу–стиску в напрямку  $x_3$ ;  $\nu_{13}$  – коефіцієнт Пуассона, що характеризує стискання в напрямку  $x_3$  при розтягу в напрямку  $s$  і т. д.;  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{23}$ ,  $G_{13}$  мають той самий зміст, що й у попередньому підпункті, а  $\nu_{12} = \nu_1$  і  $\nu_{21} = \nu_2$ , де  $\nu_1$  і  $\nu_2$  мають той самий зміст, що й у попередніх підпунктах;

$$\Delta = 1 - \nu_{32}\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{12} - \nu_{31}\nu_{13} - \nu_{31}\nu_{12}\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}.$$

Між «технічними сталими» існують залежності [21]:

$$E_1\nu_{21} = E_2\nu_{12}, \quad E_2\nu_{32} = E_3\nu_{23}, \quad E_3\nu_{13} = E_1\nu_{31}.$$

У випадку ізотропної оболонки замість (24) маємо

$$A_{11} = A_{22} = A_{33} = \frac{(1 - \nu)E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

$$A_{12} = A_{13} = A_{23} = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)},$$

$$A_{44} = A_{55} = A_{66} = G.$$

Крім того, будемо користуватися позначеннями

$$Y_s^k = \frac{\partial X_{ss}^k}{\partial s} + \frac{\sin \varphi}{r} \left( X_{ss}^k - X_{\theta\theta}^k \right), \quad k = 0, 1, \dots, n+1,$$

$$Y_\theta^k = \frac{1}{r} \frac{\partial X_{\theta\theta}^k}{\partial \theta}, \quad k = 0, 1, \dots, n+1,$$

$$Y_3^k = -\frac{\cos \varphi}{r} X_{\theta\theta}^k - \frac{1}{h} X_{33}^k + P_{33}^+, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

де

$$\underline{X}_{33}^0 = 0, \quad \underline{X}_{33}^k = 2h\varepsilon'_{n+1,k} P_{33}^+, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

причому

$$\varepsilon'_{n+1,k} = \frac{k(k+1)}{2(n+2)[n+2+(-1)^{k+n}]}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Систему диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно частинних похідних першого порядку за координатою  $s$  від функцій  $\underline{P}_{ss}^{(k)}$ ,  $k=0,1,\dots,\dots,n+1$ ;  $P_{ss}^{(k)}$ ,  $k=n+2,n+3,\dots,m$ ;  $P_{s0}^{(k)}$ ,  $k=0,1,\dots,m$ ;  $P_{s3}^{(k)}$ ,  $k=0,1,\dots,n$ ;  $u_s^{(k)}$ ,  $u_0^{(k)}$ ,  $k=0,1,\dots,m$ ;  $u_3^{(k)}$ ,  $k=0,1,\dots,n$ , отримаємо з відповідної системи звичайних диференціальних рівнянь у [29] і запишемо у формі

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_1}{\partial s} &= \Phi_{10}^{\{m,n\}} Y_1 + \Phi_{11}^{\{m,n\}} \frac{\partial Y_2}{\partial \theta} + \Phi_{12}^{\{m,n\}} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial \theta^2} + f_1, \\ \frac{\partial Y_2}{\partial s} &= \Phi_{20}^{\{m,n\}} Y_2 + \Phi_{21}^{\{m,n\}} \frac{\partial Y_1}{\partial \theta} + \Phi_{22}^{\{m,n\}} \frac{\partial^2 Y_2}{\partial \theta^2} + f_2, \end{aligned} \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} Y_1 &= [\underline{P}_{ss}^{(0)}, \dots, \underline{P}_{ss}^{(n+1)}, \underline{P}_{ss}^{(n+2)}, \dots, P_{ss}^{(m)}, P_{s3}^{(0)}, \dots, P_{s3}^{(n)}, u_s^{(0)}, \dots, u_s^{(m)}, \\ &\quad u_3^{(0)}, \dots, u_3^{(n)}]^\top, \\ Y_2 &= [P_{s0}^{(0)}, \dots, P_{s0}^{(m)}, u_0^{(0)}, \dots, u_0^{(m)}]^\top, \\ f_1 &= \left[ -Y_s, \dots, -Y_s, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n-1}, -Y_3, \dots, -Y_3, \underbrace{0, \dots, 0}_{m+n+2} \right]^\top, \\ f_2 &= \left[ -Y_0, \dots, -Y_0, \underbrace{0, \dots, 0}_{2m-n} \right]^\top, \end{aligned} \quad (26)$$

$\Phi_{10}^{\{m,n\}}$ ,  $\Phi_{11}^{\{m,n\}}$ ,  $\Phi_{12}^{\{m,n\}}$ ,  $\Phi_{20}^{\{m,n\}}$ ,  $\Phi_{21}^{\{m,n\}}$ ,  $\Phi_{22}^{\{m,n\}}$  – матриці-функції від  $s$ , до елементів яких не входять ні шукані функції, ні їхні частинні похідні будь-яких порядків.

Співвідношення, що встановлюють зв'язок функцій  $P_{s3}^{(k)}$ ,  $k=n+1, n+2, \dots, m+1$ ;  $\underline{P}_{00}^{(k)}$ ,  $\underline{P}_{33}^{(k)}$ ,  $k=0,1,\dots,n+1$ ;  $P_{00}^{(k)}$ ,  $k=n+2, n+3, \dots, m$ ;  $P_{03}^{(k)}$ ,  $k=0,1,\dots,m+1$ , з компонентами векторів  $Y_1$  і  $Y_2$ , отримаємо з відповідних формул у [29] і запишемо у формі

$$Y_3 = \Phi_{30}^{\{m,n\}} Y_1 + \Phi_{31}^{\{m,n\}} \frac{\partial Y_2}{\partial \theta}, \quad Y_4 = \Phi_{40}^{\{m,n\}} Y_2 + \Phi_{41}^{\{m,n\}} \frac{\partial Y_1}{\partial \theta}, \quad (27)$$

де

$$\begin{aligned} Y_3 &= [P_{s3}^{(n+1)}, \dots, P_{s3}^{(m+1)}, \underline{P}_{00}^{(0)}, \dots, \underline{P}_{00}^{(n+1)}, \underline{P}_{00}^{(n+2)}, \dots, P_{00}^{(m)}, \underline{P}_{33}^{(0)}, \dots, \underline{P}_{33}^{(n+1)}]^\top, \\ Y_4 &= [P_{03}^{(0)}, \dots, P_{03}^{(m+1)}]^\top, \end{aligned} \quad (28)$$

$\Phi_{30}^{\{m,n\}}$ ,  $\Phi_{31}^{\{m,n\}}$ ,  $\Phi_{40}^{\{m,n\}}$ ,  $\Phi_{41}^{\{m,n\}}$  – матриці-функції від  $s$ , до елементів яких не входять ні шукані функції, ні їхні частинні похідні будь-яких порядків.

З огляду на громіздкість систему рівнянь (25) і вирази (27) у розгорнутому вигляді не виписуватимемо.

Для системи (25), (27) розглянемо такі граничні умови:

$$\begin{aligned}
u_s^{(k)} &= 0, & k &= 0, 1, \dots, m, \\
u_3^{(k)} &= 0, & k &= 0, 1, \dots, n, & \text{при } s = s_0; \\
P_{ss}^{(k)} &= 0, & k &= 0, 1, \dots, n+1, \\
P_{ss}^{(k)} &= 0, & k &= n+2, n+3, \dots, m, \\
P_{s3}^{(k)} &= 0, & k &= 0, 1, \dots, n, & \text{при } s = s_M;
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
u_\theta^{(k)} &= 0, & k &= 0, 1, \dots, m, & \text{при } s = s_0, \\
P_{s\theta}^{(k)} &= 0, & k &= 0, 1, \dots, m, & \text{при } s = s_M.
\end{aligned} \tag{30}$$

Системи рівнянь теорій оболонок обертання, розв'язаних відносно похідних від узагальнених переміщень і деяких узагальнених напружень за координатою вздовж меридіана, було отримано в [6, 18, 22, 29]. Системи рівнянь теорій оболонок, розв'язаних відносно похідних від узагальнених переміщень за однією з координат на серединній поверхні, було отримано в [1, 2, 12, 14, 35, 43].

**2. Зведення систем рівнянь теорій оболонок до незв'язаних нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь.** Розвинувши всі величини, що характеризують напружено-деформований стан оболонки або зовнішнє навантаження, у ряди Фур'є за кільцевою координатою  $\theta$ , задовольнимо умови періодичності і відокремимо змінні у вихідних рівняннях і співвідношеннях. Таким чином, зведемо вихідні системи диференціальних рівнянь з частинними похідними до незв'язаних нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь.

Із цією метою введемо вектори  $X_1$  і  $X_2$ :

– для теорії Кірхгоффа–Лява

$$\begin{aligned}
X_1 &= [u, w, \phi_s, \epsilon_s, \epsilon_\theta, \alpha_s, \alpha_\theta, N_s, N_\theta, Q_s, \widehat{Q}_s, M_s, M_\theta, q_3]^\top, \\
X_2 &= [v, \gamma_{s\theta}, \alpha_{s\theta}, S, \widehat{T}_{s\theta}, Q_\theta, H]^\top;
\end{aligned} \tag{31}$$

– для теорії типу Тимошенка

$$\begin{aligned}
X_1 &= [u, w, \beta_s, \epsilon_s, \epsilon_\theta, \gamma_{s3}, \alpha_s, \alpha_\theta, N_s, N_\theta, Q_s, M_s, M_\theta, q_3]^\top, \\
X_2 &= [v, \beta_\theta, \gamma_{s\theta}, \gamma_{\theta 3}, \alpha_{s\theta}, S, T_{s\theta}, Q_\theta, H]^\top;
\end{aligned} \tag{32}$$

– для теорії в рамках  $\{m, n\}$ -апроксимації

$$\begin{aligned}
X_1 &= \left[ u_s^{(0)}, \dots, u_s^{(m)}, u_3^{(0)}, \dots, u_3^{(n)}, P_{ss}^{(0)}, \dots, P_{ss}^{(n+1)}, P_{ss}^{(n+2)}, \dots, P_{ss}^{(m)}, \right. \\
&\quad P_{s3}^{(0)}, \dots, P_{s3}^{(m+1)}, P_{\theta\theta}^{(0)}, \dots, P_{\theta\theta}^{(n+1)}, P_{\theta\theta}^{(n+2)}, \dots, P_{\theta\theta}^{(m)}, \\
&\quad \left. P_{33}^{(0)}, \dots, P_{33}^{(n+1)}, P_{33}^+, Y_s^0, \dots, Y_s^{n+1}, Y_3^0, \dots, Y_3^n \right]^\top, \\
X_2 &= \left[ u_\theta^{(0)}, \dots, u_\theta^{(m)}, P_{s\theta}^{(0)}, \dots, P_{s\theta}^{(m)}, P_{\theta 3}^{(0)}, \dots, P_{\theta 3}^{(m+1)}, Y_\theta^0, \dots, Y_\theta^{n+1} \right]^\top.
\end{aligned} \tag{33}$$

Розглянемо задачі (7), (9), (11), (12); (16), (18), (20), (21) і (25), (27), (29), (30) і припустимо, що  $P_{33}^+(s, \theta)$  можна подати у вигляді ряду Фур'є за кільцевою координатою  $\theta$ :

$$P_{33}^+(s, \theta) = \sum_{q=1}^{\infty} P_{33q}^+(s) \sin q\theta + \frac{1}{2} \tilde{P}_{330}^+(s) + \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{P}_{33q}^+(s) \cos q\theta. \quad (34)$$

Тоді в цих задачах вектори  $X_1$  і  $X_2$  з (31)–(33) можемо записати у вигляді

$$X_1 = \sum_{q=1}^{\infty} X_{1q} \sin q\theta + \frac{1}{2} \tilde{X}_{10} + \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{X}_{1q} \cos q\theta, \quad (35)$$

$$X_2 = \sum_{q=1}^{\infty} X_{2q} \cos q\theta + \sum_{q=1}^{\infty} \tilde{X}_{2q} \sin q\theta, \quad (36)$$

де  $X_{1q}$ ,  $X_{2q}$ ,  $\tilde{X}_{10}$ ,  $\tilde{X}_{1q}$ ,  $\tilde{X}_{2q}$  залежать лише від координати  $s$ .

Аналогічно до (35) і (36) можна записати подання для  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$ ,  $Y_4$ ,  $f_1$ ,  $f_2$ .

У результаті задовольнимо умови періодичності та отримаємо:

- співвідношення

$$\frac{\partial \tilde{Y}_{10}}{\partial s} = \Phi_{10}^{\text{KL}} \tilde{Y}_{10} + \tilde{f}_{10}, \quad \tilde{Y}_{30} = \Phi_{30}^{\text{KL}} \tilde{Y}_{10}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial \tilde{Y}_{10}}{\partial s} = \Phi_{10}^{\text{Tym}} \tilde{Y}_{10} + \tilde{f}_{10}, \quad \tilde{Y}_{30} = \Phi_{30}^{\text{Tym}} \tilde{Y}_{10}, \quad (38)$$

$$\frac{\partial \tilde{Y}_{10}}{\partial s} = \Phi_{10}^{\{m,n\}} \tilde{Y}_{10} + \tilde{f}_{10}, \quad \tilde{Y}_{30} = \Phi_{30}^{\{m,n\}} \tilde{Y}_{10} \quad (39)$$

відповідно зі співвідношень (7), (9); (16), (18) і (25), (27). Тут  $\tilde{Y}_{10}$  і  $\tilde{Y}_{30}$  – коефіцієнти рядів Фур'є відповідно векторів  $Y_1$  і  $Y_3$  згідно з (8), (10); (17), (19) і (26), (28),  $\tilde{f}_{10}$  – коефіцієнт ряду Фур'є вектора  $f_1$  відповідно з (8), (17) і (26);

- граничні умови для (37), (38) і (39) відповідно у формах (11), (20) і (29), у яких необхідно забезпечити нижнім індексом «0» і символом «~» всі функції, які є компонентами вектора  $Y_1$  відповідно з (8), (17) і (26).

Позначимо ці умови відповідно через  $(\tilde{C}_0^{\text{KL}})$ ,  $(\tilde{C}_0^{\text{Tym}})$  і  $(\tilde{C}_0^{\{m,n\}})$ ;

- співвідношення для  $q$ -гармонік розвинень,  $q = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_{1q}}{\partial s} &= (\Phi_{10}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{12}^{\text{KL}} + q^4 \Phi_{14}^{\text{KL}}) Y_{1q} - q(\Phi_{11}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{13}^{\text{KL}}) Y_{2q} + f_{1q}, \\ \frac{\partial Y_{2q}}{\partial s} &= (\Phi_{20}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{22}^{\text{KL}}) Y_{2q} + q(\Phi_{21}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{23}^{\text{KL}}) Y_{1q}, \\ Y_{3q} &= (\Phi_{30}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{32}^{\text{KL}}) Y_{1q} - q \Phi_{31}^{\text{KL}} Y_{2q}, \\ Y_{4q} &= (\Phi_{40}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{42}^{\text{KL}}) Y_{2q} + q(\Phi_{41}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{43}^{\text{KL}}) Y_{1q}; \\ \frac{\partial Y_{1q}}{\partial s} &= (\Phi_{10}^{\text{Tym}} - q^2 \Phi_{12}^{\text{Tym}}) Y_{1q} - q \Phi_{11}^{\text{Tym}} Y_{2q} + f_{1q}, \\ \frac{\partial Y_{2q}}{\partial s} &= (\Phi_{20}^{\text{Tym}} - q^2 \Phi_{22}^{\text{Tym}}) Y_{2q} + q \Phi_{21}^{\text{Tym}} Y_{1q}, \\ Y_{3q} &= \Phi_{30}^{\text{Tym}} Y_{1q} - q \Phi_{31}^{\text{Tym}} Y_{2q}, \quad Y_{4q} = \Phi_{40}^{\text{Tym}} Y_{2q} + q \Phi_{41}^{\text{Tym}} Y_{1q}; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y_{1q}}{\partial s} &= (\Phi_{10}^{\{m,n\}} - q^2 \Phi_{12}^{\{m,n\}}) Y_{1q} - q \Phi_{11}^{\{m,n\}} Y_{2q} + f_{1q}, \\
\frac{\partial Y_{2q}}{\partial s} &= (\Phi_{20}^{\{m,n\}} - q^2 \Phi_{22}^{\{m,n\}}) Y_{2q} + q \Phi_{21}^{\{m,n\}} Y_{1q} + f_{2q}, \\
Y_{3q} &= \Phi_{30}^{\{m,n\}} Y_{1q} - q \Phi_{31}^{\{m,n\}} Y_{2q}, \quad Y_{4q} = \Phi_{40}^{\{m,n\}} Y_{2q} + q \Phi_{41}^{\{m,n\}} Y_{1q} \quad (42)
\end{aligned}$$

відповідно зі співвідношень (7), (9); (16), (18) і (25), (27). Тут  $Y_{1q}$ ,  $Y_{2q}$ ,  $Y_{3q}$ ,  $Y_{4q}$  – коефіцієнти рядів Фур’є відповідно векторів  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$ ,  $Y_4$  згідно з (8), (10); (17), (19) і (26), (28),  $f_{1q}$  – коефіцієнт ряду Фур’є вектора  $f_1$  відповідно з (8), (17) і (26),  $f_{2q}$  – коефіцієнт ряду Фур’є вектора  $f_2$  з (26);

- граничні умови для (40), (41) і (42) відповідно у формах (11), (12); (20), (21) і (29), (30), у яких необхідно забезпечити нижнім індексом  $q$  всі функції, які є компонентами векторів  $Y_1$  або  $Y_2$  відповідно з (8), (17) і (26). Позначимо ці умови відповідно через  $(C_q^{\text{KL}})$ ,  $(C_q^{\text{Tym}})$  і  $(C_q^{\{m,n\}})$ ;

- співвідношення для  $q$ -гармонік розвинень,  $q = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{Y}_{1q}}{\partial s} &= (\Phi_{10}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{12}^{\text{KL}} + q^4 \Phi_{14}^{\text{KL}}) \tilde{Y}_{1q} + q(\Phi_{11}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{13}^{\text{KL}}) \tilde{Y}_{2q} + \tilde{f}_{1q}, \\
\frac{\partial \tilde{Y}_{2q}}{\partial s} &= (\Phi_{20}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{22}^{\text{KL}}) \tilde{Y}_{2q} - q(\Phi_{21}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{23}^{\text{KL}}) \tilde{Y}_{1q}, \\
\tilde{Y}_{3q} &= (\Phi_{30}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{32}^{\text{KL}}) \tilde{Y}_{1q} + q \Phi_{31}^{\text{KL}} \tilde{Y}_{2q}, \\
\tilde{Y}_{4q} &= (\Phi_{40}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{42}^{\text{KL}}) \tilde{Y}_{2q} - q(\Phi_{41}^{\text{KL}} - q^2 \Phi_{43}^{\text{KL}}) \tilde{Y}_{1q}; \quad (43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{Y}_{1q}}{\partial s} &= (\Phi_{10}^{\text{Tym}} - q^2 \Phi_{12}^{\text{Tym}}) \tilde{Y}_{1q} + q \Phi_{11}^{\text{Tym}} \tilde{Y}_{2q} + \tilde{f}_{1q}, \\
\frac{\partial \tilde{Y}_{2q}}{\partial s} &= (\Phi_{20}^{\text{Tym}} - q^2 \Phi_{22}^{\text{Tym}}) \tilde{Y}_{2q} - q \Phi_{21}^{\text{Tym}} \tilde{Y}_{1q}, \\
\tilde{Y}_{3q} &= \Phi_{30}^{\text{Tym}} \tilde{Y}_{1q} + q \Phi_{31}^{\text{Tym}} \tilde{Y}_{2q}, \quad \tilde{Y}_{4q} = \Phi_{40}^{\text{Tym}} \tilde{Y}_{2q} - q \Phi_{41}^{\text{Tym}} \tilde{Y}_{1q}; \quad (44)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{Y}_{1q}}{\partial s} &= (\Phi_{10}^{\{m,n\}} - q^2 \Phi_{12}^{\{m,n\}}) \tilde{Y}_{1q} + q \Phi_{11}^{\{m,n\}} \tilde{Y}_{2q} + \tilde{f}_{1q}, \\
\frac{\partial \tilde{Y}_{2q}}{\partial s} &= (\Phi_{20}^{\{m,n\}} - q^2 \Phi_{22}^{\{m,n\}}) \tilde{Y}_{2q} - q \Phi_{21}^{\{m,n\}} \tilde{Y}_{1q} + \tilde{f}_{2q}, \\
\tilde{Y}_{3q} &= \Phi_{30}^{\{m,n\}} \tilde{Y}_{1q} + q \Phi_{31}^{\{m,n\}} \tilde{Y}_{2q}, \quad \tilde{Y}_{4q} = \Phi_{40}^{\{m,n\}} \tilde{Y}_{2q} - q \Phi_{41}^{\{m,n\}} \tilde{Y}_{1q} \quad (45)
\end{aligned}$$

відповідно зі співвідношень (7), (9); (16), (18) і (25), (27). Тут  $\tilde{Y}_{1q}$ ,  $\tilde{Y}_{2q}$ ,  $\tilde{Y}_{3q}$ ,  $\tilde{Y}_{4q}$  – коефіцієнти рядів Фур’є відповідно векторів  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$ ,  $Y_4$  згідно з (8), (10); (17), (19) і (26), (28),  $\tilde{f}_{1q}$  – коефіцієнт ряду Фур’є вектора  $f_1$  відповідно з (8), (17) і (26),  $\tilde{f}_{2q}$  – коефіцієнт ряду Фур’є вектора  $f_2$  з (26);

- граничні умови для (43), (44) і (45) відповідно у формах (11), (12); (20), (21) і (29), (30), у яких необхідно забезпечити нижнім індексом  $q$  і символом

«~» всі функції, які є компонентами векторів  $Y_1$  або  $Y_2$  згідно з (8), (17) і (26). Позначимо ці умови відповідно через  $(\tilde{C}_q^{KL})$ ,  $(\tilde{C}_q^{Tym})$  і  $(\tilde{C}_q^{\{m,n\}})$ .

Відмітимо, що всі системи звичайних диференціальних рівнянь, отримані в результаті відокремлення змінних у вихідних задачах, є нормальними.

**3. Крайові задачі для гармонік розвинень  $X_1$  і  $X_2$  у випадку локально навантаженої оболонки.** Конкретизуємо вигляд функції  $P_{33}^+(s, \theta)$  і розглянемо крайові задачі для гармонік розвинень  $X_1$  і  $X_2$ , що виникають у зв'язку з цим. Виберемо на інтервалі  $(-\pi, \pi)$  точку  $\theta_L$ , а на відрізку  $[s_0, s_M]$  – точки  $s_0 < \dots < s_{p-1} < s_p < s_{p+1} < \dots < s_M$ , де  $p$  – додатне ціле число,  $0 < p < M$ ,  $s_{p-1} = s_p - \varepsilon$ ,  $s_{p+1} = s_p + \varepsilon$ , причому

$$r_p \max\left(\frac{\pi}{50}, \frac{h \cos \varphi}{r_0}\right) \leq \varepsilon < \min(s_p - s_0, s_M - s_p, r_p(\theta_L + \pi), r_p(\pi - \theta_L)),$$

де  $r_p = r(s_p)$ .

Розглянемо функції

$$g_s(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\varepsilon} \left(1 + \cos \frac{s - s_p}{\varepsilon} \pi\right), & |s - s_p| \leq \varepsilon, \\ 0, & s \in [s_0, s_M], |s - s_p| > \varepsilon, \end{cases}$$

$$g_\theta(s, \theta) = \begin{cases} \frac{r_p}{2\varepsilon r(s)} \left(1 + \cos \frac{\theta - \theta_L}{\varepsilon} \pi r_p\right), & s \in [s_0, s_M], |\theta - \theta_L| \leq \frac{\varepsilon}{r_p}, \\ 0, & s \in [s_0, s_M], \theta \in [-\pi, \pi], |\theta - \theta_L| > \frac{\varepsilon}{r_p}. \end{cases} \quad (46)$$

Такі функції називаються симетричними дельтоподібними фінітними функціями [5].

Припустимо, що

$$P_{33}^+(s, \theta) = \begin{cases} -P g_s(s) g_\theta(s, \theta), & |s - s_p| \leq \varepsilon, |\theta - \theta_L| \leq \frac{\varepsilon}{r_p}, \\ 0, & s \in [s_0, s_M], \theta \in [-\pi, \pi], |s - s_p| > \varepsilon \vee |\theta - \theta_L| > \frac{\varepsilon}{r_p}, \end{cases} \quad (47)$$

тобто  $P_{33}^+$  локалізовано на частині поверхні  $S^+$ , що визначається нерівностями  $|s - s_p| \leq \varepsilon$ ,  $|\theta - \theta_L| \leq \frac{\varepsilon}{r_p}$ . Тут  $P$  – задана невід'ємна дійсна стала.

Розглянемо ряд [5]

$$\begin{aligned} \frac{r_p}{2\varepsilon} \left(1 + \cos \frac{\theta - \theta_L}{\varepsilon} \pi r_p\right) &= \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{q\varepsilon}{r_p}\right) (\sin q\theta_L \sin q\theta + \cos q\theta_L \cos q\theta) \right], \end{aligned} \quad (48)$$

де  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\varphi\left(\frac{q\varepsilon}{r_p}\right) = \frac{r_p}{2\varepsilon} \int_{-\varepsilon/r_p}^{\varepsilon/r_p} \left(1 + \cos \frac{\pi r_p t}{\varepsilon}\right) \cos qt \, dt = \int_0^1 (1 + \cos \pi t) \cos \frac{q\varepsilon t}{r_p} \, dt.$$

Неважко переконатись, що

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{\theta \left[1 - \left(\frac{\theta}{\pi}\right)^2\right]}, & \theta \neq \pi, \\ \frac{1}{2}, & \theta = \pi. \end{cases}$$

Застосувавши формулу (48), згідно з формулами (46) і (47), для  $P_{33}^+(s, \theta)$  отримаємо ряд (34), у якому

$$P_{33q}^+(s) = \begin{cases} 0, & s \in [s_0, s_{p-1}] \cup (s_{p+1}, s_M], \\ -\frac{P}{2\varepsilon\pi r(s)} \left(1 + \cos \frac{s-s_p}{\varepsilon} \pi\right) \varphi\left(\frac{q\varepsilon}{r_p}\right) \sin q\theta_L, & s \in [s_{p-1}, s_{p+1}], \quad q=1, 2, \dots, \end{cases} \quad (49)$$

$$\tilde{P}_{330}^+(s) = \begin{cases} 0, & s \in [s_0, s_{p-1}] \cup (s_{p+1}, s_M], \\ -\frac{P}{2\varepsilon\pi r(s)} \left(1 + \cos \frac{s-s_p}{\varepsilon} \pi\right), & s \in [s_{p-1}, s_{p+1}], \end{cases} \quad (50)$$

$$\tilde{P}_{33q}^+(s) = \begin{cases} 0, & s \in [s_0, s_{p-1}] \cup (s_{p+1}, s_M], \\ -\frac{P}{2\varepsilon\pi r(s)} \left(1 + \cos \frac{s-s_p}{\varepsilon} \pi\right) \varphi\left(\frac{q\varepsilon}{r_p}\right) \cos q\theta_L, & s \in [s_{p-1}, s_{p+1}], \quad q=1, 2, \dots \end{cases} \quad (51)$$

Розв'язування крайових задач (37),  $(\tilde{C}_0^{\text{KL}})$ ; (38),  $(\tilde{C}_0^{\text{Tym}})$  і (39),  $(\tilde{C}_0^{\{m,n\}})$ , де  $\tilde{P}_{330}^+(s)$  взято з (50), повністю визначає напружено-деформований стан оболонки для 0-гармоніки розвинення (35), де  $X_1$  взято відповідно з (31), (32), (33).

Розв'язування крайових задач (40),  $(C_q^{\text{KL}})$  і (43),  $(\tilde{C}_q^{\text{KL}})$ ; (41),  $(C_q^{\text{Tym}})$  і (44),  $(\tilde{C}_q^{\text{Tym}})$ ; (42),  $(C_q^{\{m,n\}})$  і (45),  $(\tilde{C}_q^{\{m,n\}})$ , де  $P_{33q}^+(s)$  взято із (49), а  $\tilde{P}_{33q}^+(s)$  взято з (51), повністю визначає напружено-деформований стан оболонки для  $q$ -гармонік розвинень (35) і (36), де  $X_1$  і  $X_2$  взято відповідно з (31), (32), (33).

Розглянемо крайову задачу для системи (42) з граничними умовами  $(C_q^{\{m,n\}})$  для  $q = 1, 2, \dots$

Запишемо перші два рівняння системи (42) у формі

$$\frac{\partial Y_{5q}}{\partial s} = \Phi_5^{\{m,n\}}(q) Y_{5q} + f_{5q}, \quad (52)$$

де

$$Y_{5q} = [P_{ssq}^{(0)}, \dots, P_{ssq}^{(n+1)}, P_{ssq}^{(n+2)}, \dots, P_{ssq}^{(m)}, P_{s\theta q}^{(0)}, \dots, P_{s\theta q}^{(m)}, P_{s3q}^{(0)}, \dots, P_{s3q}^{(n)}],$$

$$u_{sq}^{(0)}, \dots, u_{sq}^{(m)}, u_{\theta q}^{(0)}, \dots, u_{\theta q}^{(m)}, u_{3q}^{(0)}, \dots, u_{3q}^{(n)}]^T,$$

$$f_{5q} = \left[ -Y_{sq}^{(0)}, \dots, -Y_{sq}^{(n+1)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n-1}, -Y_{\theta q}^{(0)}, \dots, -Y_{\theta q}^{(n+1)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n-1} \right]^T,$$

$$\left. \begin{matrix} 0 \\ -Y_{3q}, \dots, -Y_{3q}, \underbrace{0, \dots, 0}_\ell \end{matrix} \right]^\top,$$

$\Phi_5^{\{m,n\}}(q)$  – матриця, складена відповідним чином з елементів матриць  $\Phi_{10}^{\{m,n\}} - q^2 \Phi_{12}^{\{m,n\}}$ ,  $-q \Phi_{11}^{\{m,n\}}$ ,  $\Phi_{20}^{\{m,n\}} - q^2 \Phi_{22}^{\{m,n\}}$ ,  $q \Phi_{21}^{\{m,n\}}$ . Тут  $\ell = 2m + n + 3$ .

Розглянемо на кінцях відрізка інтегрування граничні умови вигляду

$$L_0 Y_{5q}(s_0) = \left[ \underbrace{0, \dots, 0}_\ell \right]^\top, \quad L_\ell Y_{5q}(s_M) = \left[ \underbrace{0, \dots, 0}_\ell \right]^\top, \quad (53)$$

де

$$L_i = \begin{bmatrix} \gamma_{1+i} & 0 & \dots & 0 & 1 - \gamma_{1+i} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_{2+i} & \dots & 0 & 0 & 1 - \gamma_{2+i} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma_{\ell+i} & 0 & 0 & \dots & 1 - \gamma_{\ell+i} \end{bmatrix}, \quad i = 0, \ell.$$

Тут  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell$ , – ознаки граничних умов у точці  $s = s_0$ ;  $\gamma_i$ ,  $i = \ell + 1, \ell + 2, \dots, 2\ell$ , – ознаки граничних умов у точці  $s = s_M$ , причому  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, 2\ell$ , набувають значень «0» і «1».

У випадку граничних умов ( $C_q^{\{m,n\}}$ ) маємо

$$\begin{aligned} \gamma_i &= 0, & i &= 1, 2, \dots, \ell, \\ \gamma_i &= 1, & i &= \ell + 1, \ell + 2, \dots, 2\ell. \end{aligned}$$

Розв'язок крайової задачі (52), (53) для  $q = 1, 2, \dots$  отримаємо за допомогою методу ортогональної прогонки С. К. Годунова [10, 11, 12, 43] з автоматичним згущенням точок ортогоналізації і контролем точності розв'язку в цих точках.

Аналогічним чином можна отримати розв'язки крайових задач (40), ( $C_q^{\text{KL}}$ ); (41), ( $C_q^{\text{Tym}}$ ); (43), ( $\tilde{C}_q^{\text{KL}}$ ); (44), ( $\tilde{C}_q^{\text{Tym}}$ ) і (45), ( $\tilde{C}_q^{\{m,n\}}$ ) для  $q = 1, 2, \dots$  і розв'язки крайових задач (37), ( $\tilde{C}_0^{\text{KL}}$ ); (38), ( $\tilde{C}_0^{\text{Tym}}$ ) і (39), ( $\tilde{C}_0^{\{m,n\}}$ ) для  $q = 0$ .

Перед розв'язуванням крайової задачі (52), (53) для  $q = 1, 2, \dots$  за допомогою методу ортогональної прогонки С. К. Годунова на кожному відрізку  $[s_{i-1}, s_i]$  виберемо  $M_i + 1$  точок ортогоналізації з координатами

$$s_k^* = s_{i-1} + \frac{s_i - s_{i-1}}{M_i} j, \quad k = \sum_{t=1}^{i-1} M_t + j, \quad j = 0, 1, \dots, M_i, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Наведемо схему визначення напружено-деформованого стану оболонки в задачі (25), (27), (29), (30): підсумовуванням за  $q$  отримаємо розв'язок для скінченної кількості перших членів рядів векторів  $Y_1$  і  $Y_2$  в точках вигляду  $(s_k^*, \theta)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N_*$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ; зі співвідношень (27) знайдемо елементи векторів  $Y_3$  і  $Y_4$  в тих самих точках; за формулами (22) і (23) обчислимо величини  $u_s$ ,  $u_\theta$ ,  $u_3$ ,  $\sigma_{ss}$ ,  $\sigma_{s\theta}$ ,  $\sigma_{s3}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{\theta 3}$ ,  $\sigma_{33}$  в точках вигляду

$(s_k^*, \theta, x_3)$ ,  $k = 0, 1, \dots, N_*$ ,  $\theta \in [-\pi, \pi]$ ,  $x_3 \in [-h, h]$ . Тут  $N_* = \sum_{i=1}^M M_i$ . Очевидно,

що  $s_0^* = s_0$ ,  $s_{N_*}^* = s_M$ .

Побудувати подібні схеми визначення напружено-деформованого стану оболонок у задачах (7), (9), (11), (12) і (16), (18), (20), (21) неважко, тому на цьому тут не будемо зупинятися.

**4. Розрахунок консольної ізотропної кінчної оболонки замкнутого профілю.** Як приклад розрахунків з використанням алгоритмів розв'язування крайових задач для гармонік розвинень  $X_1$  і  $X_2$  розглянемо навантаження типу (47) ізотропної замкнутої кінчної оболонки з параметрами

$$\varphi = \pi / 4, \quad \theta_L = \pi / 2, \quad h = 0.005 \text{ м}, \quad r_0 = 0.3 \text{ м}, \quad p = 4, \\ M = 8, \quad s_0 = 0 \text{ м}, \quad s_M = 3 / 8 \text{ м}, \quad s_4 = (s_0 + s_M) / 2 = 3 / 16 \text{ м},$$

$$\varepsilon = \frac{3\pi}{100} \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{8\sqrt{2}} \right) \text{ м}, \quad s_3 = s_4 - \varepsilon, \quad s_5 = s_4 + \varepsilon,$$

$$s_1 = s_0 + (s_3 - s_0) / 5 = s_3 / 5, \quad s_2 = s_3 - (s_3 - s_0) / 5 = 4s_3 / 5,$$

$$s_6 = s_5 + (s_M - s_5) / 5 = (s_M + 4s_5) / 5, \quad s_7 = s_M - (s_M - s_5) / 5 = (4s_M + s_5) / 5,$$

$$E = 210 \text{ ГПа}, \quad \nu = 0.3, \quad P = 1 \text{ кН},$$

у якої торець  $s = s_0$  – зацемлений, а торець  $s = s_M$  – вільний, і реалізуємо для неї задачі (7), (9), (11), (12) (теорія Кірхгоффа–Лява); (16), (18), (20), (21) (теорія типу Тимошенка) і (25), (27), (29), (30) ( $\{m, n\}$ -апроксимація).

Геометричні параметри оболонки задовольняють вимоги (1), тобто маємо тонку оболонку. Загальний вигляд оболонки зображено на рис. 1.

При чисельних розрахунках було прийнято:

$$M_i = 20, \quad i = 1, 3, 4, 5, 6, \quad M_i = 10, \quad i = 2, 7, 8.$$

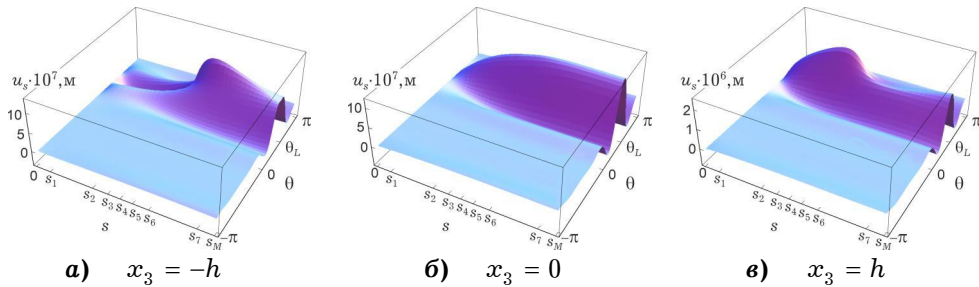


Рис. 2. Переміщення  $u_s$ .

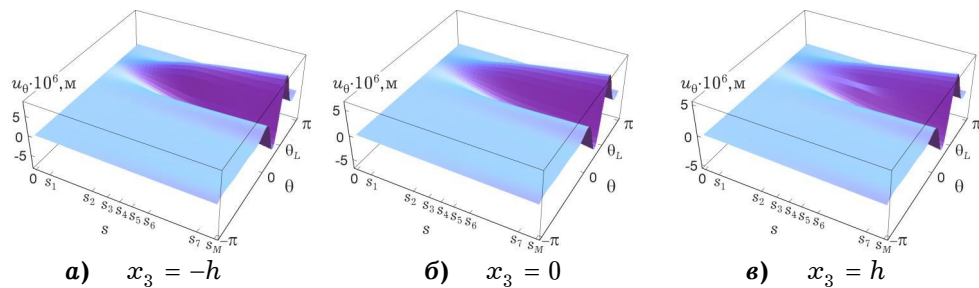


Рис. 3. Переміщення  $u_0$ .

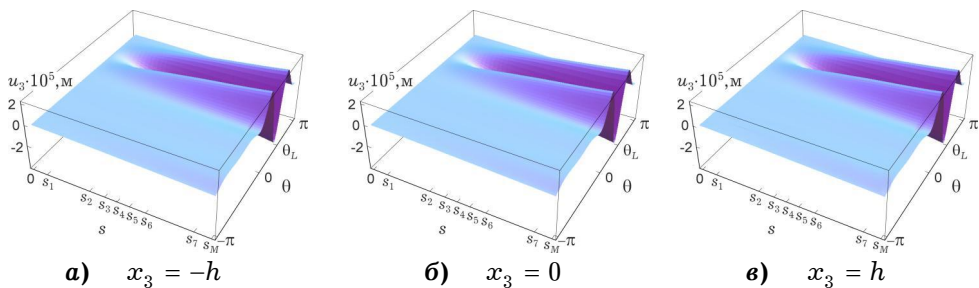


Рис. 4. Переміщення  $u_3$ .

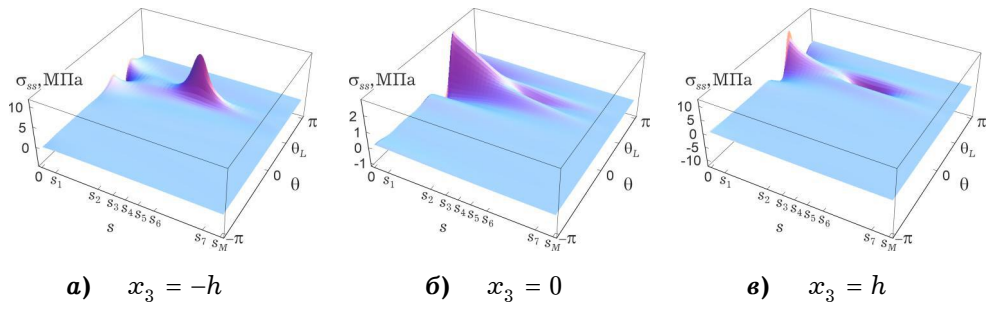


Рис. 5. Напряжения  $\sigma_{ss}$ .

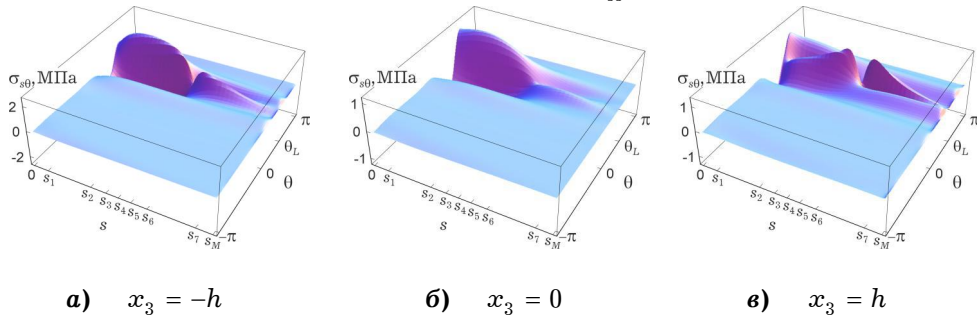


Рис. 6. Напряжения  $\sigma_{s0}$ .

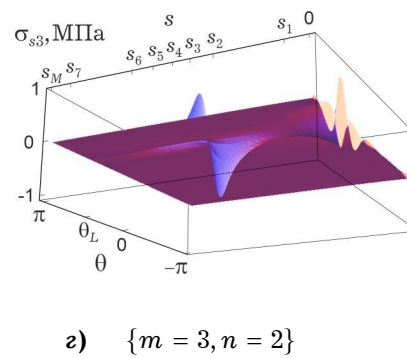
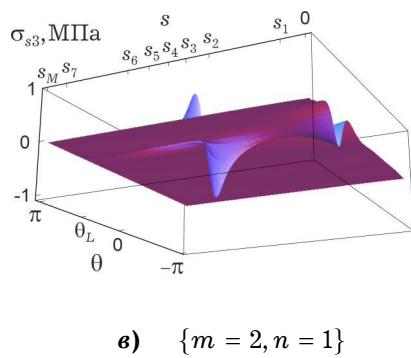
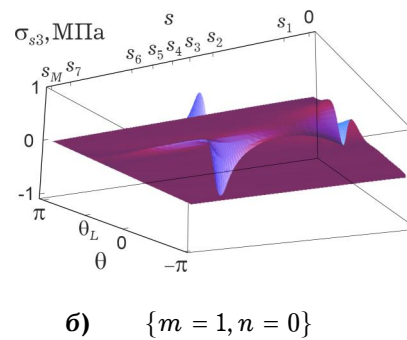
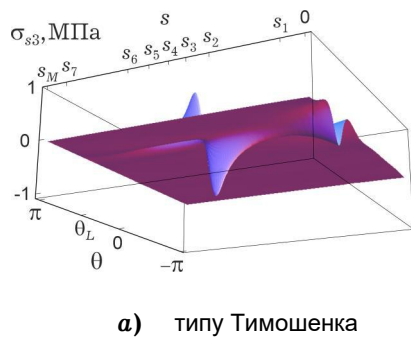


Рис. 7. Напряжения  $\sigma_{s3}$  при  $x_3 = 0$ .

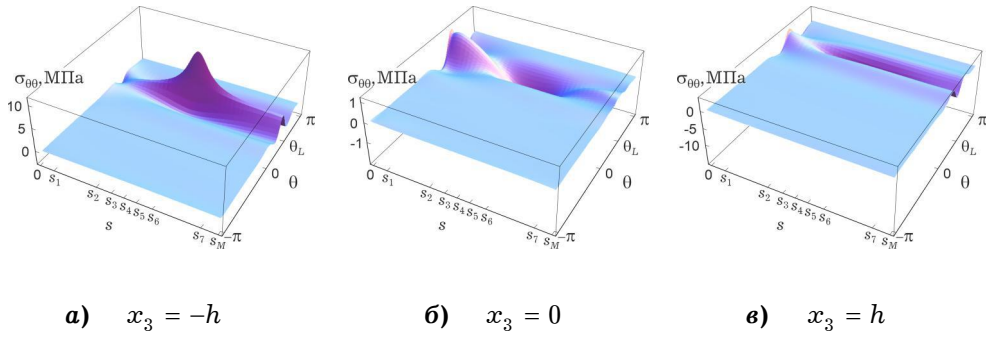


Рис. 8. Напруження  $\sigma_{00}$ .

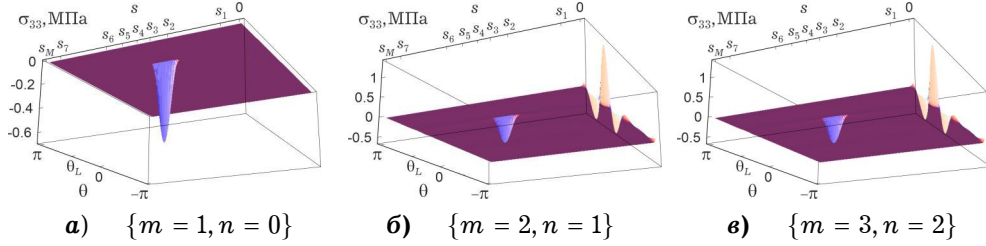


Рис. 9. Напруження  $\sigma_{33}$  при  $x_3 = 0$ .

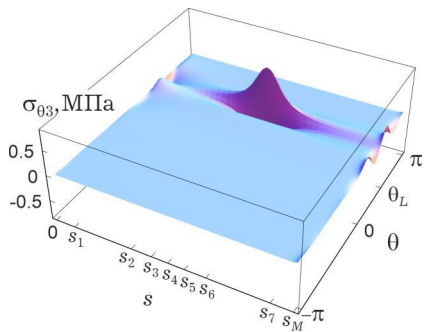


Рис. 10. Напруження  $\sigma_{03}$  при  $x_3 = 0$ .

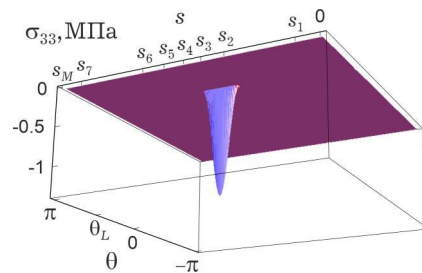


Рис. 11. Напруження  $\sigma_{33}$  при  $x_3 = h$ .

Розв'язки задач (7), (9), (11), (12); (16), (18), (20), (21) і (25), (27), (29), (30) отримано для членів рядів (34)–(36), що відповідають коефіцієнтам  $P_{33q}^+$ ,  $X_{1q}$ ,  $X_{2q}$ ,  $q = 1, 3, \dots, 299$ ;  $\tilde{P}_{330}^+$ ,  $\tilde{X}_{10}$ ;  $\tilde{P}_{33q}^+$ ,  $\tilde{X}_{1q}$ ,  $\tilde{X}_{2q}$ ,  $q = 2, 4, \dots, 300$ , цих рядів. При цьому слід мати на увазі, що при  $\theta_L = \frac{\pi}{2}$  з огляду на формули (49) і (51) маємо  $P_{33q}^+ = 0$ ,  $X_{1q} = 0$ ,  $X_{2q} = 0$ ,  $q = 2, 4, \dots, 298$ ;  $\tilde{P}_{33q}^+ = 0$ ,  $\tilde{X}_{1q} = 0$ ,  $\tilde{X}_{2q} = 0$ ,  $q = 1, 3, \dots, 299$ , у рядах (34)–(36).

Результати розв'язування задачі (16), (18), (20), (21) наведено на рис. 7а; результати розв'язування задачі (25), (27), (29), (30) при  $m = 1$ ,  $n = 0$  і  $m = 2$ ,  $n = 1$  – на рис. 7б, рис. 9а і рис. 7в, рис. 9б відповідно; результати розв'язування задачі (25), (27), (29), (30) при  $m = 3$ ,  $n = 2$  – на рис. 2 – рис. 6, рис. 7г, рис. 8, рис. 9в і рис. 10.

Результати розв'язування задач (7), (9), (11), (12); (16), (18), (20), (21) і (25), (27), (29), (30) при  $m = 1$ ,  $n = 0$  і  $m = 2$ ,  $n = 1$  на рис. 2 – рис. 6 і рис. 8 не наведено, оскільки вони тією чи іншою мірою узгоджуються з поданими

на цих рисунках результатами. Із цієї ж причини не наведено на рис. 10 результатів розв'язування задач (16), (18), (20), (21) і (25), (27), (29), (30) при  $m = 1, n = 0$  і  $m = 2, n = 1$ . Узгодженість результатів, отриманих на основі різних теорій оболонок, серед іншого, свідчить про надійність використаних алгоритмів розв'язування крайових задач.

Зауважимо, що в теорії Кірхгоффа–Лява напруження  $\sigma_{s3}, \sigma_{\theta3}, \sigma_{33}$ , а в теорії типу Тимошенка – напруження  $\sigma_{33}$  вважаються малими порівняно з іншими напруженнями, і на основі цих теорій розрахунки відповідних напружень не проводяться.

Графіки переміщень і напружень на рис. 2 – рис. 10 мають яри, складки з крутими схилами, западини, горби, піки в смугі, що визначається нерівностями  $0 < \theta < \pi$ . Поза межами цієї смуги напружено-деформований стан оболонки майже не збурений.

Аналіз чисельних результатів показав, що теорії методу  $\{m, n\}$ -апроксимації у випадках  $m = 1, n = 0$ ;  $m = 2, n = 1$  і  $m = 3, n = 2$  приводять до дуже подібних, за винятком напружень  $\sigma_{s3}$  і  $\sigma_{33}$ , розподілів напружено-деформованого стану оболонки. Що стосується напружень  $\sigma_{s3}$  і  $\sigma_{33}$ , то, як бачимо на рис. 7 і рис. 9, відмінності між випадками  $m = 1, n = 0$ ;  $m = 2, n = 1$  і  $m = 3, n = 2$  проявляються лише у вузькій зоні крайового ефекту в безпосередній близькості до защемленого торця оболонки.

На рис. 11 зображено задані на лицьовій поверхні  $S^+$  нормальні напруження  $\sigma_{33}$ .

**Висновки.** З вихідних рівнянь теорій тонких ортотропних конічних оболонок Кірхгоффа–Лява, типу Тимошенка і методу  $\{m, n\}$ -апроксимації отримано системи диференціальних рівнянь, розв'язаних відносно частинних похідних першого порядку за координатою вздовж меридіана. Ці системи рівнянь записано в спеціальній формі і за допомогою тригонометричних розвинень за кільцевою координатою зведено до наборів незв'язаних нормальних систем звичайних диференціальних рівнянь. Побудовано алгоритми розв'язування відповідних крайових задач. При цьому використано метод ортогональної прогонки С. К. Годунова.

Застосування згаданих алгоритмів розглянуто на прикладі задачі про напружено-деформований стан локально навантаженої консольної тонкої ізотропної замкненої конічної оболонки. Аналізуючи отримані результати, можемо зробити такі висновки. Якщо величина зони прикладання локального навантаження достатньо велика, то відмінності між теоріями, виключаючи напруження  $\sigma_{s3}$  і  $\sigma_{\theta3}$  (розрахунки яких у теорії Кірхгоффа–Лява не проводяться) і напруження  $\sigma_{33}$  (розрахунки якого в теоріях Кірхгоффа–Лява і типу Тимошенка не проводяться), проявляються слабо навіть у зоні прикладання локального навантаження. Проте у вузькій зоні крайового ефекту в безпосередній близькості до защемленого торця оболонки проявляються значні відмінності між теорією типу Тимошенка, випадками  $m = 1, n = 0$  і  $m = 2, n = 1$  і випадком  $m = 3, n = 2$  для напруження  $\sigma_{s3}$ , а також значні відмінності між випадком  $m = 1, n = 0$  і випадками  $m = 2, n = 1$  і  $m = 3, n = 2$  для напруження  $\sigma_{33}$ .

Отримані результати можна використати для перевірки нових теорій оболонок.

Більшість описаних тут підходів можна використати в рамках теорій оболонок, побудованих методом І. Н. Векуа [7], теорії оболонок І. Ю. Хоми [30] та ін.

1. Авраменко О. А. Анализ напряженно-деформированного состояния нетонких конических оболочек переменной толщины в двух координатных направлениях // Прикл. механика. – 2012. – **48**, № 3. – С. 117–126.  
Te same: *Avramenko O. A. Stress-strain analysis of nonthin conical shells with thickness varying in two coordinate directions // Int. Appl. Mech.* – 2012. – **48**, No. 3. – P. 332–342. – <https://doi.org/10.1007/s10778-012-0524-z>.
2. Авраменко О. А. О влиянии локальных нагрузок на напряженно-деформированное состояние нетонких ортотропных конических оболочек // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 8. – С. 103–113.  
Te same: *Avramenko O. A. Effect of local loads on the stress-strain state of nonthin orthotropic conical shells // Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No. 8. – P. 916–926. – <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0106-2>.
3. Амиро И. Я. К определению напряженного состояния оболочек вращения, подверженных действию локальных нагрузок // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 11. – С. 43–49.  
Te same: *Amiro I. Ya. Determination of the stressed state of shells of revolution subjected to the action of local loads // Int. Appl. Mech.* – 1994. – **30**, No. 11. – P. 867–873. – <https://doi.org/10.1007/BF00847041>.
4. Бондаренко Н. С., Гольцев А. С., Шевченко В. П. Фундаментальные решения уравнений термоупругости трансверсально-изотропных пластин // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 3. – С. 51–60.  
Te same: *Bondarenko N. S., Gol'tsev A. S., Shevchenko V. P. Fundamental solutions of the thermoelastic equations for transversely isotropic plates // Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, No. 3. – P. 287–295. – <https://doi.org/10.1007/s10778-010-0309-1>.
5. Бурак Я. Й., Рудаевський Ю. К., Сухорольський М. А. Аналітична механіка локально навантажених оболонок. – Львів: Інтелект–Захід, 2007. – 240 с.
6. Василенко А. Т., Григоренко Я. М., Судавацова Г. К. Решение задач о напряженном состоянии тонких оболочек вращения при локальных нагрузках // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 4. – С. 106–113.  
Te same: *Vasilenko A. T., Grigorenko Y. M., Sudavtsova G. K. Solving problems on the stress state of thin shells of revolution under local loads // Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, No. 4. – P. 518–525. – <https://doi.org/10.1007/BF02681975>.
7. Веква И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – Москва: Наука, 1982. – 288 с.
8. Виноградов Ю. И., Меньков Г. Б. Метод функционального нормирования для краевых задач теории оболочек. – Москва: Эдиториал УРСС, 2001. – 160 с.
9. Виноградов Ю. И., Меньков Г. Б. Построение специальных функций для аналитического решения краевых задач теории конических оболочек // Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, № 1. – С. 127–131.  
Te same: *Vinogradov Yu. I., Men'kov G. B. The construction of special functions for the analytic solution of boundary-value problems of the theory of conical shells // J. Appl. Math. Mech.* – 1996. – **60**, No. 1. – P. 121–125. – [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(96\)00016-0](https://doi.org/10.1016/0021-8928(96)00016-0).
10. Годунов С. К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1961. – **16**, № 3 (99). – С. 171–174.
11. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – Москва: Машиностроение, 1988. – 288 с.
12. Григоренко Я. М. Некоторые подходы к численному решению линейных и нелинейных задач теории оболочек в классической и уточненной постановках // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 6. – С. 3–39.  
Te same: *Grigorenko Y. M. Approaches to the numerical solution of linear and nonlinear problems in shell theory in classical and refined formulations // Int. Appl. Mech.* – 1996. – **32**, No. 6. – P. 409–442. – <https://doi.org/10.1007/BF02088409>.
13. Григоренко Я. М., Авраменко О. А. Анализ влияния геометрических и механических параметров на напряженно-деформированное состояние замкнутых нетонких конических оболочек // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 10. – С. 52–62.  
Te same: *Grigorenko Ya. M., Avramenko O. A. Influence of geometrical and mechanical parameters on the stress-strain state of closed nonthin conical shells // Int. Appl. Mech.* – 2008. – **44**, No. 10. – P. 1119–1127.

- <https://doi.org/10.1007/s10778-009-0128-4>.
14. Григоренко Я. М., Григоренко А. Я. Задачи статики и динамики анизотропных неоднородных оболочек с переменными параметрами и их численное решение (обзор) // Прикл. механика. – 2013. – **49**, № 2. – С. 3–70.  
Te same: Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya. Static and dynamic problems for anisotropic inhomogeneous shells with variable parameters and their numerical solution (review) // Int. Appl. Mech. – 2013. – **49**, No. 2. – P. 123–193.  
– <https://doi.org/10.1007/s10778-013-0558-x>.
  15. Гудрамович В. С. Механика контактных взаимодействий оболочечных систем при локальном нагружении // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 24–51.  
Te same: Hudramovich V. S. Contact mechanics of shell structures under local loading // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 7. – P. 708–729.  
– <https://doi.org/10.1007/s10778-009-0224-5>.
  16. Гудрамович В. С., Дзюба А. П. Контактные взаимодействия и оптимизация оболочечных конструкций при локальном нагружении // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2008. – **51**, № 2. – С. 188–201.  
Te same: Hudramovich V. S., Dzyuba A. P. Contact interactions and optimization of locally loaded shell structures // J. Math. Sci. – 2009. – **162**, No. 2. – P. 231–245. – <https://doi.org/10.1007/s10958-009-9634-5>.
  17. Гурьянов Н. Г., Артюхин Ю. П. Коническая оболочка линейно-переменной толщины под действием нормальной сосредоточенной силы // Исслед. по теории пластин и оболочек. – 1972. – Вып. 8. – С. 278–286.  
Te same: Guryanov N. G., Artyukhin Yu. P. A conical shell of linearly variable thickness under the effect of a normal concentrated force. – Foreign Technology Division: Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1974. – 19 p.
  18. Емельянов И. Г., Кузнецов А. В. Напряженное состояние оболочечных конструкций при локальных нагрузках // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2014. – № 1. – С. 53–59.  
Te same: Emelyanov I. G., Kuznetsov A. V. The stressed state of shell structures under local loads // J. Mach. Manuf. Reliab. – 2014. – **43**, No. 1. – P. 42–47.  
– <https://doi.org/10.3103/S1052618814010051>.
  19. Коваленко А. Д., Григоренко Я. М., Ильин Л. А. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1963. – 287 с.
  20. Куликов Г. М., Плотникова С. В. Исследование локально нагруженных многослойных оболочек смешанным методом конечных элементов. 1. Геометрически линейная постановка // Механика композит. материалов. – 2002. – **38**, № 5. – С. 607–620.  
Te same: Kulikov G. M., Plotnikova S. V. Investigation of locally loaded multi-layer shells by a mixed finite-element method. 1. Geometrically linear statement // Mech. Compos. Mater. – 2002. – **38**, No. 5. – P. 397–406.  
– <https://doi.org/10.1023/A:1020978008577>.
  21. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1950. – 300 с.
  22. Мясников В. И., Григорьев И. В. Расчет составных оболочечных конструкций на ЭВМ: Справочник. – Москва: Машиностроение, 1981. – 216 с.
  23. Нерубайло Б. В., Ольшанский В. П. Асимптотический метод расчета конической оболочки на действие локальной загрузки // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2007. – № 3. – С. 115–124.  
Te same: Nerubailo B. V., Ol'shanskii V. P. Asymptotic method for analysis of a conical shell under local loading // Mech. Solids. – 2007. – **42**, No. 3. – P. 429–436. – <https://doi.org/10.3103/S0025654407030119>.
  24. Пелех Б. Л., Максимук А. В., Коровайчук И. М. Контактные задачи для слоистых элементов конструкций и тел с покрытиями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 280 с.
  25. Пелех Б. Л., Сухорольский М. А. Контактные задачи теории упругих анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 214 с.
  26. Погорелов В. И. Строительная механика тонкостенных конструкций. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2007. – 528 с.
  27. Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Иванов А. И. Исследование оболочек вращения при локализованных силовых и температурных воздействиях // Расчеты на прочность. – 1989. – Вып. 29. – С. 243–262.
  28. Сибиряков В. А. Расчет ортотропной конической оболочки на произвольную внешнюю нагрузку по методу В. З. Власова // Изв. ВУЗов. Авиац. техника. – 1959. – № 2. – С. 72–82.

- Te same: *Sibiriyakov V. A.* Calculation of orthotropic conical shell for arbitrary external load, using the method of V. Z. Vlasov // *ARS Journal. Supplement.* – 1960. – **30**, No. 1. – P. 78–82. – <https://doi.org/10.2514/8.4990>.
29. *Тучапський Р. І.* Рівняння тонких анізотропних пружних оболонок обертання методу  $\{m, n\}$ -апроксимації // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – **58**, № 3. – С. 43–56.  
Te same: *Tuchapskiyy R. I.* Equations of thin anisotropic elastic shells of revolution in the  $\{m, n\}$ -approximation method // *J. Math. Sci.* – 2017. – **226**, No. 1. – P. 52–68. – <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3518-x>.
  30. *Хома І. Ю.* Обобщенная теория анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 172 с.
  31. *Bokov I., Bondarenko N., Strelnikova E.* Investigation of stress-strain state of transversely isotropic plates under bending using equation of statics  $\{1, 2\}$ -approximation // *EUREKA: Phys. Eng.* – 2016. – No. 5. – P. 58–66. – <https://doi.org/10.21303/2461-4262.2016.00159>.
  32. *Chandrashekhara K., Karekar M. S.* Bending analysis of a truncated conical shell subjected to asymmetric load // *Thin-Walled Struct.* – 1992. – **13**, No. 4. – P. 299–318. – [https://doi.org/10.1016/0263-8231\(92\)90026-S](https://doi.org/10.1016/0263-8231(92)90026-S).
  33. *Cui W., Pei J., Zhang W.* A simple and accurate solution for calculating stresses in conical shells // *Comput. Struct.* – 2001. – **79**, No. 3. – P. 265–279. – [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(00\)00139-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00139-5).
  34. *Firsanov V. V., Thien P. V.* Research of the stress-strain state of conical shell under the action of local load based on the non-classical theory // *J. Mech. Eng. Res. Dev.* – 2020. – **43**, No. 4. – P. 24–32.
  35. *Grigorenko A. Ya., Müller W. H., Grigorenko Ya. M., Vlaikov G. G.* Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. Vol. 1. General theory and applications of classical theory. – Singapore: Springer Nature, 2016. – viii+108 p. – <https://doi.org/10.1007/978-981-10-0353-0>.
  36. *Grigorenko Ya. M., Grigorenko A. Ya., Bespalova E.* On some recent discrete-continuum approaches to the solution of shell problems // In: H. Altenbach, J. Chróscielewski, V. A. Eremeyev, K. Wiśniewski (Eds.). *Recent Developments in the Theory of Shells.* – Ser.: *Advanced Structured Materials.* – Vol. 110. – Cham: Springer, 2019. – P. 285–313. – [https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8\\_16](https://doi.org/10.1007/978-3-030-17747-8_16).
  37. *Hoff N. J.* Thin circular conical shells under arbitrary loads // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1955. – **22**, No. 4. – P. 557–562. – <https://doi.org/10.1115/1.4011154>.
  38. *Jabbari M., Nejad M. Z., Ghannad M.* Thermo-elastic analysis of axially functionally graded rotating thick truncated conical shells with varying thickness // *Composites Part B: Eng.* – 2016. – **96**. – P. 20–34. – <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2016.04.026>.
  39. *Jain R., Ramachandra K., Simha K. R. Y.* Singularity in rotating orthotropic discs and shells // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – **37**, No. 14. – P. 2035–2058. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(98\)00346-1](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(98)00346-1).
  40. *Loula A. F. D., Toledo E. M., Franca L. P., Garcia E. L. M.* Application of a mixed Galerkin/least-squares method to axisymmetric shell problems subjected to arbitrary loading. – Technical Report No. 028/89, LNCC, Rio de Janeiro, Brazil, 1989. – 6 p.
  41. *Lukasiewicz S. A.* Introduction of concentrated loads in plates and shells // *Prog. Aersp. Sci.* – 1976. – **17**. – P. 109–146. – [https://doi.org/10.1016/0376-0421\(76\)90006-3](https://doi.org/10.1016/0376-0421(76)90006-3).
  42. *Lukasiewicz S.* Local loads in plates and shells // *Monographs and textbooks on mechanics of solids and fluids.* – Ser. *Mechanics of surface structures.* – Vol. 4. – Alphen aan den Rijn, The Netherlands: Sijthoff & Noordhoff, 1979. – xviii+570 p.
  43. *Marchuk M., Tuchapskiyy R., Nespliak D.* Numerical use of  $\{m, n\}$ -approximation method thermoelastic anisotropic thin shell theory equations represented in a special form // *Comput. Math. Appl.* – 2019. – **77**, No. 10. – P. 2740–2763. – <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2019.01.003>.
  44. *Moita J. S., Araújo A. L., Franco Correia V., Mota Soares C. M.* Free vibrations analysis of composite and hybrid axisymmetric shells // *Compos. Struct.* – 2022. – **286**. – Article 115267. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2022.115267>.
  45. *Moita J. S., Araújo A. L., Franco Correia V., Mota Soares C. M.* Vibrations of functionally graded material axisymmetric shells // *Compos. Struct.* – 2020. – **248**.

- Article 112489. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.112489>.
46. Pinto Correia I. F., Barbosa J. I., Mota Soares C. M., Mota Soares C. A. A finite element semi-analytical model for laminated axisymmetric shells: statics, dynamics and buckling // *Comput. Struct.* – 2000. – **76**, No. 1-3. – P. 299–317.  
– [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(99\)00165-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00165-0).
  47. Pinto Correia I. F., Mota Soares C. M., Mota Soares C. A., Herskovits J. Analysis of laminated conical shell structures using higher order models // *Compos. Struct.* – 2003. – **62**, No. 3-4. – P. 383–390.  
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2003.09.009>.
  48. Raju I. S., Rao G. V., Rao B. P., Venkataramana J. A conical shell finite element // *Comput. Struct.* – 1974. – **4**, No. 4. – P. 901–915.  
– [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(74\)90052-2](https://doi.org/10.1016/0045-7949(74)90052-2).
  49. Sarrazin M., Jensen H. Axisymmetric shells for non-axisymmetric loads: an exact conical element approach // *Adv. Eng. Softw.* (1978). – 1984. – **6**, No. 3. – P. 148–155. – [https://doi.org/10.1016/0141-1195\(84\)90026-3](https://doi.org/10.1016/0141-1195(84)90026-3).
  50. Sheinman I., Weissman S. Coupling between symmetric and antisymmetric modes in shells of revolution // *J. Compos. Mater.* – 1987. – **21**, No. 11. – P. 988–1007.  
– <https://doi.org/10.1177/002199838702101101>.
  51. Sundarasivarao B. S. K., Ganesan N. Deformation of varying thickness of conical shells subjected to axisymmetric loading with various end conditions // *Eng. Fract. Mech.* – 1991. – **39**, No. 6. – P. 1003–1010.  
– [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(91\)90106-B](https://doi.org/10.1016/0013-7944(91)90106-B).
  52. Viola E., Rossetti L., Fantuzzi N., Tornabene F. Static analysis of functionally graded conical shells and panels using the generalized unconstrained third order theory coupled with the stress recovery // *Compos. Struct.* – 2014. – **112**. – P. 44–65.  
– <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2014.01.039>.
  53. Witt F. J. Thermal stress analysis of conical shells // *Nucl. Struct. Eng.* – 1965. – **1**, No. 5. – P. 449–456. – [https://doi.org/10.1016/0369-5816\(65\)90147-X](https://doi.org/10.1016/0369-5816(65)90147-X).
  54. Wu C.-P., Hung Y.-C. Asymptotic theory of laminated circular conical shells // *Int. J. Eng. Sci.* – 1999. – **37**, No. 8. – P. 977–1005.  
– [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(98\)00108-6](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(98)00108-6).
  55. Wu C.-P., Hung Y.-C., Lo J.-Y. A refined asymptotic theory of laminated circular conical shells // *Eur. J. Mech. A/Solids.* – 2002. – **21**, No. 2. – P. 281–300.  
– [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01199-8](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01199-8).

#### CALCULATION OF LOCALLY LOADED THIN ORTHOTROPIC CLOSED CONICAL SHELLS ON THE BASIS OF CLASSICAL AND SOME REFINED THEORIES

*Semi-analytical algorithms for solving problems on the stress-strain state of thin orthotropic truncated closed conical shells under local loads modeled by delta-shaped functions are implemented. The algorithms are based on the systems of equations of the Kirchhoff–Love, the Timoshenko-type, and the  $\{m, n\}$ -approximation method shell theories solved with respect to the first order partial derivatives with respect to the coordinate along the meridian (all unknown functions included in these equations were expressed via the components of solution vectors and partial derivatives from these components with respect to the circumferential coordinate). These systems of equations are written in a special form and, using trigonometric Fourier series in the circumferential coordinate, are reduced to sequences of uncoupled normal systems of ordinary differential equations, which can be solved using the S. K. Godunov method of orthogonal successive substitutions. The obtained results indicate the reliability of the implemented algorithms and the importance of refined shell theories for an adequate description of three-dimensional stress state.*

**Key words:** conical shell, local load, Kirchhoff–Love theory, Timoshenko theory,  $\{m, n\}$ -approximation method, trigonometric series, S. K. Godunov method of orthogonal successive substitutions.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
22.04.24