

**ЗАДАЧА ТЕРМОПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛА З ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ПОЗДОВЖНЬОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ЇЇ БЕРЕГІВ**

Сформульовано задачу термопружності для тіла з внутрішньою тріщиною з урахуванням поздовжньої теплопровідності її берегів та дії віддаленого теплового потоку і розтягувального навантаження. Вважається, що коефіцієнт поздовжньої теплопровідності тріщини не змінюється зі зміною навантаження. Задачу зведено до сингулярних інтегро-диференціальних рівнянь відносно стрибка температури між берегами тріщини та її розкриття. Стрибок температури подано через поліноми Чебишева, коефіцієнти при яких визначаються числово. Розкриття тріщини визначено в явному вигляді. З використанням отриманого розв'язку проаналізовано залежності стрибка температури від теплового потоку і коефіцієнта поздовжньої теплопровідності. Досліджено розподіл компонент вектора теплового потоку вздовж берегів тріщини і поблизу неї. Визначено коефіцієнти інтенсивності нормальних і дотичних напружень.

**Ключові слова:** термопружність, однорідне тіло, внутрішня тріщина, поздовжня теплопровідність.

**Вступ.** Важливим чинником термодформативної поведінки тіл із тріщинами є передача тепла між берегами тріщин або ж її відсутність за умови теплоізоляції берегів [1]. При постановці та розв'язуванні відповідних задач теплопровідності та термопружності теплопроникність і теплопровідність тріщин моделюється узагальненими умовами Я. С. Підстригача неідеального теплового контакту через проміжний шар [3]. У літературі розв'язано задачі теплопровідності й термопружності для тіл з частково проникними [6] і частково ізольованими тріщинами [7], з тріщинами, термоопір яких не залежить від навантаження [5], і тріщинами зі змінним термоопором [10]. На передачу тепла між берегами тріщини суттєво впливають властивості середовища, яке заповнює її порожнину [4, 9] і чинить опір теплового потоку. Задачі про неідеальний тепловий контакт поверхонь вивчено на прикладі тіла з високопровідним і слабопровідним включенням [8], де високу провідність змодельовано рівністю температури та стрибком теплового потоку між матрицею і включенням, а слабопровідне включення характеризується стрибком температури, який є пропорційним до нормальної складової теплового потоку. Відомі моделі передачі тепла між берегами тріщини в основному враховують провідність тріщини в перпендикулярному до неї напрямку, а провідність у поздовжньому напрямку нехтують. Тому питання про визначення впливу поздовжньої теплопровідності тріщини на зміну температури між берегами залишається невивченим.

Ця стаття присвячено дослідженню температури і напружень в однорідному тілі з тріщиною, береги якої наділені поздовжньою теплопровідністю під дією стаціонарного однорідного теплового потоку.

**1. Формулювання задачі та її зведення до сингулярного інтегро-диференціального рівняння.** Розглянемо однорідне тіло, яке характеризується коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda$  і коефіцієнтом лінійного теплового розширення  $\alpha$ . У тілі вздовж нескінченної смуги розташовано тріщину довжини  $2a$  (рис. 1). Вважаємо, що речовина, яка заповнює порожнину тріщини, не проводить тепло, а береги тріщини вкриті тонкими плівками, що характеризуються коефіцієнтом поздовжньої теплопровідності  $\lambda_s$ . На

<sup>✉</sup> ser.kristina@gmail.com

безмежності в перпендикулярному до тріщини напрямку на тіло діє стаціонарний однорідний тепловий потік  $q$  і розтягувальні зусилля  $p$ . Між берегами тріщини виконуються умови неідеального теплового контакту. В тілі розподілене стаціонарне двовимірне температурне поле  $T(x, y)$  в умовах плоскої деформації. Береги тріщини є вільними від напружень, а речовина заповнювача не чинить опір деформуванню тіла.

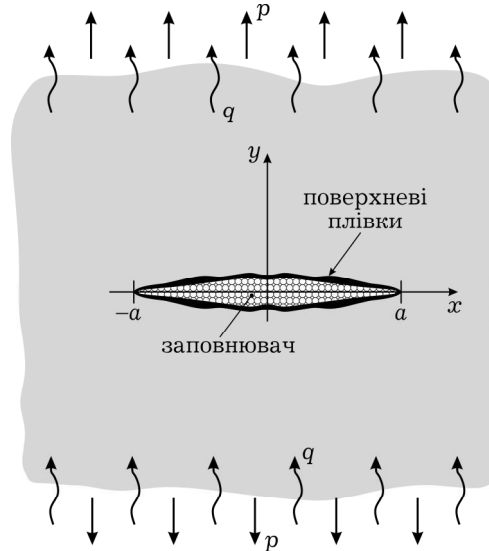


Рис. 1

Для побудови розв'язку задачі термопружності спершу знайдемо розподіл температури у розглянутому тілі (задача теплопровідності), а потім дослідимо розподіл напружень в околі вершин тріщини.

З метою розв'язання задачі теплопровідності в загальному випадку необхідно визначити температуру з урахуванням умов контакту на поверхнях розмежування усіх областей (тіла і верхнього берега тріщини, верхнього берега і речовини, речовини і нижнього берега, нижнього берега і тіла). Для спрощення задачі застосуємо узагальнені умови Підстригача неідеального теплового контакту для опису передачі тепла між берегами тріщини за припущення, що ці береги наділені поздовжньою теплопровідністю, що не змінюється під дією навантаження, а порожнина тріщини є теплоізолюваною. За цих припущень отримаємо умови неідеального теплового контакту на межі тріщини:

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T^- + T^+) + 2(q_y^- - q_y^+) = 0, \quad (1)$$

$$\lambda_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} (T^- - T^+) + 6(q_y^- + q_y^+) = 0, \quad (2)$$

де  $T$  – температура,  $q_y$  – нормальна компонента вектора теплового потоку, верхні індекси «+» і «-» позначають граничні значення функцій на верхньому і нижньому берегах тріщини.

Вважаємо, що між берегами тріщини відбувається зміна температури, а нормальна компонента вектора теплового потоку є однаковою для обох берегів тріщини ( $q_y^+ = q_y^-$ ).

Введемо в розгляд на ділянці тріщини функцію стрибка температури

$$\gamma(x) = T^-(x, 0) - T^+(x, 0), \quad |x| < a.$$

Температуру і компоненти вектора теплового потоку з використанням методики [10] подамо у вигляді

$$T = \operatorname{Re} \left[ F(z) + i \frac{qz}{\lambda} \right], \quad q_x - iq_y = -\lambda F'(z) - iq,$$

де  $F(z)$  – кусково-голоморфна у комплексній площині функція, яка прямує до нуля, коли її аргумент є безмежно великим,  $z = x + iy$  – комплексна змінна.

Комплексний потенціал визначимо так:

$$F(z) = \frac{i}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma(t)}{t-z} dt.$$

Граничні значення температури та компонент вектора теплового потоку на лінії тріщини мають вигляд

$$T^+(x, 0) = -\frac{1}{2} \gamma(x), \quad T^-(x, 0) = \frac{1}{2} \gamma(x),$$

$$q_y^+ = q_y^- = \frac{\lambda}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t)}{t-x} dt + q, \quad q_x^+ = -q_x^- = \frac{\lambda}{2} \gamma'(x). \quad (3)$$

Підставивши граничні значення (3) в умову (2), отримаємо сингулярне інтегро-диференціальне рівняння (СІДР) з другою похідною відносно стрибка температури  $\gamma(x)$

$$\lambda_s \gamma''(x) + \frac{6\lambda}{\pi} \int_{-a}^a \frac{\gamma'(t) dt}{t-x} = -12q, \quad |x| < a, \quad (4)$$

де

$$\gamma(a) = 0, \quad \gamma'(a) = 0. \quad (5)$$

Зауважимо, що умова неідеального теплового контакту (1) з урахуванням (3) задовольняється тотожно.

Напружено-деформований стан тіла визначається [2] функцією розкриття тріщини  $h(x)$ , для якої з урахування умови рівності напружень на ділянці тріщини отримано таке СІДР:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{h'(t) dt}{t-x} = -\frac{2(1-\nu)}{G} p, \quad |x| < a, \quad h(a) = 0. \quad (6)$$

**2. Методика розв'язування СІДР.** Отже, для визначення стрибка температури  $\gamma(x)$  між берегами тріщини отримано СІДР (4). Для побудови його розв'язку з урахуванням умов (5) застосуємо метод колокацій, який полягає у поданні розв'язку через поліноми Чебишева і задоволення рівняння в системі точок колокацій, що є нулями поліномів Чебишева.

Введемо в розгляд безрозмірні змінні

$$\bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{\lambda}_s = \frac{\lambda_s}{\lambda}, \quad \bar{q} = \frac{a\alpha q}{\lambda}, \quad \bar{\gamma} = \gamma a, \quad \bar{q}_y^+ = \frac{a\alpha q_y^+}{\lambda}, \quad \bar{q}_x^+ = \frac{a\alpha q_x^+}{\lambda}. \quad (7)$$

Рівняння (4) у безрозмірних змінних (7) матиме такий вигляд:

$$\bar{\lambda}_s \bar{\gamma}''(\bar{x}) + \frac{6}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{\gamma}'(t) dt}{t-\bar{x}} = -12\bar{q}, \quad |\bar{x}| < 1, \quad \bar{\gamma}(\pm 1) = 0. \quad (8)$$

Розв'язок рівняння (8) подаємо у вигляді скінченної суми ряду за поліномами Чебишева другого роду:

$$\bar{\gamma}(\bar{x}) = \sqrt{1 - \bar{x}^2} \sum_{n=1}^N X_n U_{2n-2}(\bar{x}), \quad |\bar{x}| < 1, \quad (9)$$

де  $X_n$  – невідомі коефіцієнти, які згідно з методом колокацій визначаємо з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{n=1}^N X_n (2n-1) \left[ \frac{\bar{\lambda}_s}{6} \left( \frac{x_k T_{2n-1}(x_k)}{\sqrt{(1-x_k^2)^3}} - \frac{(2n-1)U_{2n-2}(x_k)}{\sqrt{1-x_k^2}} \right) - U_{2n-2}(x_k) \right] = -2\bar{q}, \quad x_k = \cos\left(\frac{\pi k}{2N}\right), \quad k = 1, \dots, N.$$

Підставивши подання (9) у співвідношення (3), отримаємо вирази для компонент вектора теплового потоку в безрозмірних змінних:

$$\begin{aligned} \bar{q}_y^+ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (2n-1) X_n U_{2n-2}(\bar{x}) + \bar{q}, \quad |\bar{x}| < 1, \\ \bar{q}_y^+ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (2n-1) X_n \left[ U_{2n-2}(\bar{x}) - \frac{\text{sgn}(\bar{x})}{\sqrt{\bar{x}^2 - 1}} T_{2n-1}(\bar{x}) \right] + q, \quad |\bar{x}| > 1, \\ \bar{q}_x &= \begin{cases} -\frac{1}{2\sqrt{1-\bar{x}^2}} \sum_{n=1}^N (2n-1) X_n T_{2n-1}(\bar{x}), & |\bar{x}| < 1, \\ 0, & |\bar{x}| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Функцію розкриття тріщини визначено з рівняння (6) в явному вигляді:

$$\bar{h}(\bar{x}) = \frac{\bar{p}}{2} \sqrt{1 - \bar{x}^2}, \quad |\bar{x}| < 1. \quad (10)$$

Враховуючи (9) і (10), отримаємо вирази для коефіцієнтів інтенсивності (КІН)  $K_I$  і  $K_{II}$  нормальних і дотичних напружень відповідно в околі кінців тріщини [10]:

$$\bar{K}_I = \sqrt{\pi \bar{p}}, \quad \bar{K}_{II} = -\sqrt{\pi} X_1, \quad (11)$$

$$\text{де } \bar{K}_I = \frac{K_I(1-\nu)}{G\sqrt{a}}, \quad \bar{K}_{II} = \frac{K_{II}(1-\nu)}{2G\sqrt{a}(1+\nu)}.$$

**3. Числові результати та їхній аналіз.** На основі отриманого розв'язку проаналізовано залежності стрибка температури від густини теплового потоку та коефіцієнта поздовжньої теплопровідності берегів тріщини і визначено розподіл компонент вектора теплового потоку вздовж тріщини та поблизу неї. Проаналізовано розподіл коефіцієнтів інтенсивності нормальних і дотичних напружень.

Із системи (9) видно, що коефіцієнти  $X_n$  є пропорційними до  $\bar{q}$ , тому величина  $\bar{\gamma}$  також є пропорційною до  $\bar{q}$ . Це свідчить про лінійну залежність стрибка температури  $\bar{\gamma}$  від густини теплового потоку  $\bar{q}$ . Оскільки компоненти вектора теплового потоку є пропорційними до стрибка температури, то їхня залежність від густини теплового потоку є також лінійною.

Вплив коефіцієнта поздовжньої теплопровідності берегів тріщини на зміну температури та розподіл вектора теплового потоку проілюстровано на рис. 2 – рис. 4.

На рис. 2 показано зміну стрибка температури  $\bar{\gamma}$  для різних значень коефіцієнта поздовжньої теплопровідності  $\bar{\lambda}_s$  за фіксованої густини теп-

лового потоку  $\bar{q}$ . Збільшення коефіцієнта теплопровідності призводить до зменшення стрибка температури між берегами тріщини. Максимальних значень стрибок температури досягає посередині тріщини, найменших – на її краях. При значному збільшенні коефіцієнта теплопровідності посередині тріщини на певній ділянці величини стрибка температури є близькими за значеннями і наближаються до нуля, тобто у випадку високої теплопровідності температура верхнього і нижнього берега тріщини є однаковою.

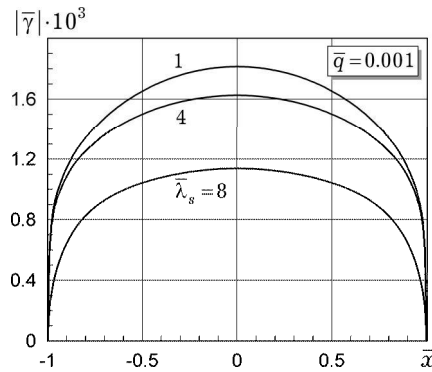


Рис. 2

На рис. 3 зображено розподіл поздовжньої складової вектора теплового потоку вздовж тріщини для різних значень коефіцієнта теплопровідності  $\bar{\lambda}_s$ . Бачимо, що компонента  $\bar{q}_x^+$  є непарною функцією ( $\bar{q}_x^+ = 0$  у центрі тріщини), такою, що  $\bar{q}_x^+ > 0$  при  $-1 < \bar{x} < 0$  та  $\bar{q}_x^+ < 0$  при  $0 < \bar{x} < 1$ . Це означає, що поздовжня складова теплового потоку скерована від середини тріщини до її країв. Зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності абсолютна величина  $\bar{q}_x^+$  зменшується. Максимальне значення поздовжнього теплового потоку досягається на кінцях тріщини, причому чим менший коефіцієнт теплопровідності, тим більшим є абсолютне значення компоненти теплового потоку. Ззовні тріщини  $\bar{q}_x^+ = 0$ , тобто поздовжній потік відсутній і передача тепла відбувається лише в нормальному напрямі.

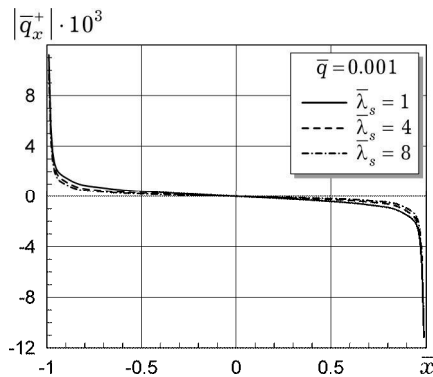


Рис. 3

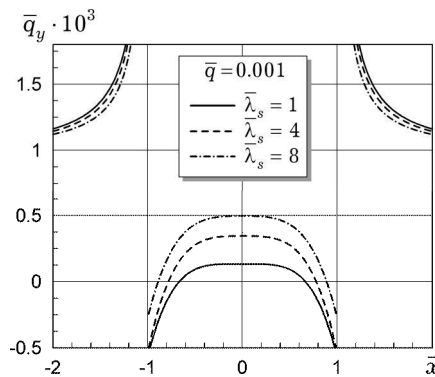


Рис. 4

На рис. 4 проілюстровано розподіл поперечної (нормальної) складової вектора теплового потоку на ділянці тріщини  $|\bar{x}| < 1$  і поза нею  $|\bar{x}| > 1$  для різних значень коефіцієнта  $\bar{\lambda}_s$ . На ділянці тріщини компонента  $\bar{q}_y^+$  зростає зі збільшенням коефіцієнта теплопровідності  $\bar{\lambda}_s$  і набуває посередині тріщини значень близьких до заданої густини теплового потоку  $\bar{q} = 0.001$ .

Поблизу країв зсередини тріщини нормальна складова приймає від'ємні значення, що може свідчити про те, що між берегами тріщини виникає стрибок теплового потоку (тобто, нормальна складова теплового потоку не є неперервною функцією в межах тріщини). Поза тріщиною компонента  $\bar{q}_y^+$  зростає зі зменшенням коефіцієнта теплопровідності  $\bar{\lambda}_s$  і має максимальні значення на кінцях тріщини. При віддаленні від тріщини  $\bar{q}_y^+$  набуває значень теплового потоку, заданого на безмежності  $\bar{q} = 0.001$ .

З формули (10) видно, що розкриття тріщини  $\bar{h}$  залежить лише від розтягувальних зусиль і є прямо пропорційним до його інтенсивності  $\bar{p}$ , тому очевидно, що збільшення зусиль призводить до збільшення розкриття тріщини і є найбільшим посередині. Згідно з (11), коефіцієнт інтенсивності нормальних напружень  $\bar{K}_I$  є також пропорційним до зусиль  $\bar{p}$  і відповідно зростає зі збільшенням значення  $\bar{p}$ . Коефіцієнт інтенсивності дотичних напружень  $\bar{K}_{II}$  визначається густиною теплового потоку  $\bar{q}$  і коефіцієнтом поздовжньої теплопровідності  $\bar{\lambda}_s$ . З рис. 5 видно, що коефіцієнт  $\bar{K}_{II}$  нелінійно залежить від теплопровідності  $\bar{\lambda}_s$  і пропорційно зростає зі збільшенням густини потоку  $\bar{q}$ . Чим більшим є коефіцієнт поздовжньої теплопровідності, тим менших значень набуває коефіцієнт інтенсивності  $\bar{K}_{II}$ .

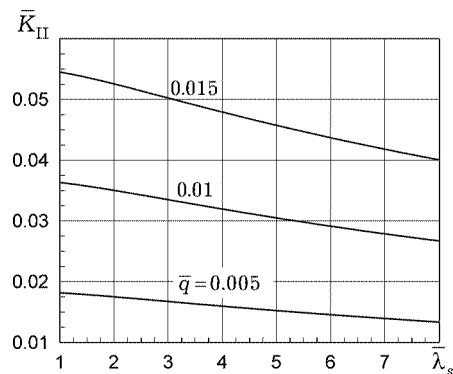


Рис. 5

**Висновки.** Досліджено вплив поздовжньої теплопровідності берегів внутрішньої тріщини на розподіл температурного поля в однорідному тілі під дією нормального теплового потоку. Задачу теплопровідності зведено до сингулярного інтегро-диференціального рівняння відносно стрибка температури між берегами тріщини. Проаналізовано розподіл стрибка температури та компонент вектора теплового потоку між берегами тріщини та поза нею. На основі отриманих результатів можна зробити висновок, що припущення про те, що між берегами тріщини виникає стрибок температури, а нормальна складова компонента є неперервною функцією на ділянці тріщини, є неоднозначним. Виявляється, що між берегами тріщини при великих відносних значеннях коефіцієнта поздовжньої теплопровідності виникає стрибок теплового потоку в поперечному до тріщини напрямку, а температура на обох берегах тріщини є однаковою. Це підтверджує відому в літературі модель високопровідного включення. Тріщина в цьому випадку вважається включенням у матрицю однорідного тіла. Вплив коефіцієнта поздовжньої теплопровідності на напружений стан тіла проявляється у зміні коефіцієнта інтенсивності дотичних напружень. Дотичні напруження в околі країв тріщини є більшими у випадку менших значень коефіцієнта теплопровід-

ності, тому не можна нехтувати поздовжньою теплопровідністю берегів тріщини, оскільки тим самим не врахуємо можливого поздовжнього росту тріщини.

Показано, що модель високопровідної тріщини можна будувати з використанням узагальнених умов Підстригача неідеального теплового контакту з урахуванням поздовжньої теплопровідності берегів тріщини. Отриману модель можна поширити на дослідження термопружної поведінки біматеріалів з міжфазними теплопровідними тріщинами.

Отримані результати можуть бути використані для розробки інженерних рекомендацій при створенні матеріалів з прогнозованою поверхневою теплопровідністю.

1. *Kim G. S., Suiko O. P.* Осесиметричні задачі стаціонарної теплопровідності та термопружності для тіла з теплоактивним або теплоізолюваним дисковим включенням (тріщиною) // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 1. – С. 58–70.  
Te same: *Kit H. S., Sushko O. P.* Axially symmetric problems of stationary heat conduction and thermoelasticity for a body with thermally active or thermally insulated disk inclusion (crack) // *J. Math. Sci.* – 2011. – **176**, No. 4. – P. 561–577. – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0422-7>.
2. *Мартиняк Р. М., Середницька Х. І.* Контактні задачі термопружності для міжфазних тріщин в біматеріальних тілах. – Львів: Растр-7, 2017. – 168 с.
3. *Підстригач Я. С.* Умови теплового контакту твердих тіл // *Доп. АН УРСР. Сер. А.* – 1963. – № 7. – С. 872–874.
4. *Середницька Х. І.* Термонапружений стан біматеріалу з міжфазною щілиною, заповненою стисливою рідиною // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 2. – С. 109–116. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.2.109-116>.  
Te same: *Serednytska Kh. I.* Thermal stressed state of a bimaterial with interface crack filled with a compressible liquid // *J. Math. Sci.* – 2023. – **272**, No. 1. – P. 125–134. – <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06404-2>.
5. *Adlucky V., Guk N., Loboda V.* Finite element modeling of partially conductive interfacial crack in piezoelectric bimaterial // *Selected Problems of Solid Mechanics and Solving Methods / Altenbach H., Bogdanov V., Grigorenko A. Ya., Kushnir R. M., Nazarenko V. M., Eremeyev V. A. (Eds).* – Ser. Advanced Structured Materials. – Vol. 204. – Cham: Springer, 2024. – P. 15–30. – [https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-031-54063-9_2).
6. *El-Borgi S., Erdogan F., Hidri L.* A partially insulated embedded crack in an infinite functionally graded medium under thermo-mechanical loading // *Int. J. Eng. Sci.* – 2004. – **42**, No. 3-4. – P. 371–393. – [https://doi.org/10.1016/S0020-7225\(03\)00287-8](https://doi.org/10.1016/S0020-7225(03)00287-8).
7. *Keppas L. K., Anifantis N. K.* Boundary element prediction on TBC fracture resistance // *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.* – 2010. – **33**, No. 3. – P. 174–182. – <https://doi.org/10.1111/j.1460-2695.2009.01427.x>.
8. *Kushch V. I., Sevostianov I., Belyaev A. S.* Effective conductivity of spheroidal particle composite with imperfect interfaces: complete solutions for periodic and random micro structures // *Mech. Mater.* – 2015. – **89**. – P. 1–11. – <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2015.05.010>.
9. *Serednytska Kh., Martynyak R., Chumak K.* The thermoelastic state of a bimaterial with an open gas-filled interface crack // *J. Theor. Appl. Mech.* – 2019. – **57**, No. 2. – P. 331–341. – <https://doi.org/10.15632/jtam-pl/104587>.
10. *Zhong X.-C., Wu B.* Thermoelastic analysis for an opening crack in an orthotropic material // *Int. J. Fract.* – 2012. – **173**. – P. 49–55. – <https://doi.org/10.1007/s10704-011-9665-z>.

#### **THERMOELASTICITY PROBLEM FOR A BODY WITH A CRACK TAKING INTO ACCOUNT THE LONGITUDINAL THERMAL CONDUCTIVITY OF ITS FACES**

*A thermoelasticity problem is formulated for a body with an internal crack by taking into account the longitudinal thermal conductivity of its faces and the influence of the remote heat flux and tensile forces. It is assumed that the coefficient of longitudinal thermal conductivity of the crack does not change with a change in load. The problem*

*is reduced to singular integro-differential equations for the temperature jump between the crack faces and its opening. The temperature jump is given in terms of the Chebyshev polynomials, the coefficients of which are determined numerically. The crack opening is found in an explicit form. Using the obtained solution, the dependences of the temperature jump on the heat flux and the coefficient of longitudinal thermal conductivity are analyzed. The distribution of the components of the heat flux vector along the crack faces and near it is investigated. The intensity coefficients of normal and tangential stresses are determined.*

**Key words:** *thermal elasticity, homogeneous body, internal crack, longitudinal thermal conductivity.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
24.06.24