УДК 539.3

В. П. Ревенко✉

ВИЗНАЧЕННЯ ТРИВИМІРНОГО ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПЛАСТИН ЧЕРЕЗ ГАРМОНІЧНІ ФУНКЦІЇ

Розглянуто тривимірну стаціонарну задачу термопружності для пластини за гармонічного розподілу температури, залежної від двох змінних. Чисто температурні переміщення і напруження (часткові розв'язки рівнянь термопружності, які не залежать від пружних переміщень) знайдено аналітично. Для задоволення крайових умов на плоских поверхнях пластини отримано систему рівнянь, загальний розв'язок яких подано через три залежні від двох змінних гармонічні функції без використання гіпотез про нульові дотичні напруження.

Ключові слова: *стаціонарна термопружність, крайові умови, переміщення, пружна пластина, температурний стан.*

Вступ. Задачі про вивчення термопружної поведінки твердих тіл за впливу температурних полів і силових навантажень є актуальними для багатьох галузей [7, 8, 12]. Методи розв'язування статичних тривимірних задач термопружності ґрунтуються, в основному, на використанні певних подань загального розв'язку рівнянь термопружності [1, 6, 10, 11], де температура є відомою функцією. Такі розв'язки будують [7, 8, 12, 13] із використанням відомих розв'язків рівнянь теорії пружності, які доповнюють частковим розв'язком, визначеним за допомогою термопружного потенціалу [1, 6]. В [11, 14] з використанням методу безпосереднього інтегрування і перетворення Фур'є побудовано аналітичні розв'язки плоскої задачі термопружності, а в [9] визначення усередненого тривимірного термопружного стану пластини зведено до розв'язання двовимірної крайової задачі. У [2] на основі методу безпосереднього інтегрування запропоновано підхід до побудови розв'язків плоских двовимірних задач термопружності для прямокутної пластини та кільцевого сектора з ключових інтегро-диференціальних рівнянь для визначальної функції Вігака. У [10] знайдено нові фізично обґрунтовані часткові розв'язки рівнянь термопружності в декартових координатах без використання термопружного потенціалу. Напруження і переміщення в знайдених розв'язках не містять пружних складових, а отже, враховують лише вплив температурного поля на напружений стан термопружних тіл. Там само з використанням результатів [3] запропоновано нове подання загального розв'язку рівнянь термопружності у тривимірній постановці через чотири гармонічні функції.

Метою цієї роботи є розробка двовимірної теорії пластин за дії силових та температурних навантажень без накладання додаткових обмежень на компоненти її напружено-деформованого стану.

1. Формулювання задачі та побудова часткового розв'язку рівнянь Нав'є. Розглянемо задачу термопружності для пластини $\mathcal{K}$ товщини h у заданому температурному полі $T(x_1, x_2)$. Серединна поверхня пластини займає область S у площині Ox_1x_2 декартової системи координат $Ox_1x_2x_3$, обмежену контуром L. Пластину навантажено зовнішніми силами лише на бічних поверхнях симетрично щодо серединної поверхні у паралельному до неї напрямку. Плоскі поверхні пластини є вільними від силових навантажень. Для опису термонапруженого стану пластини використаємо співвідношення закону Дюгамеля − Неймана [1, 6, 8]

✉ victorrev@ukr.net

DOI: 10.15407/mmpmf2024.67.3-4.155-163

$$\sigma_k = 2G\left(\varepsilon_k + \frac{\nu}{1-2\nu}e - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha T\right), \quad \tau_{kj} = G\gamma_{kj}, \quad k \neq j\,, \tag{1}$$

де σ_k, τ_{kj} та ε_k, γ_{kj} – відповідно нормальні та дотичні компоненти тензорів напружень і деформації, $k, j = 1,2,3$, $e = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – об'ємне розширення, $G = E/(2+2\nu)$ – модуль зсуву, E – модуль Юнга, ν – коефіцієнт Пуассона, α – коефіцієнт лінійного теплового розширення.

Компоненти вектора переміщень u_k, $k = 1,2,3$, визначатимемо з рівнянь Нав'є [6, 10]

$$(1-2\nu)\nabla^2 u_k + \frac{\partial e}{\partial x_k} = 2(1+\nu)\alpha\frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad k = 1,2,3\,, \tag{2}$$

де $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2 + \partial^2/\partial x_3^2$ – оператор Лапласа. Стаціонарне температурне поле є розв'язком рівняння теплопровідності

$$\Delta T(x_1, x_2) = 0\,, \tag{3}$$

де $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ – оператор Лапласа, залежний від двох змінних.

Означення. Частковий розв'язок u_k^{t}, $k = 1,2,3$, системи рівнянь (2) називаємо *чисто температурним*, якщо він не містить пружних переміщень.

Загальний розв'язок системи (2) подамо у вигляді суми однорідного і чисто температурного розв'язків [10]:

$$u_k = u_k^{\mathrm{e}} + u_k^{\mathrm{t}}, \quad k = 1,2,3\,,$$

де u_k^{e} – компоненти вектора пружних переміщень.

В [10] показано, що для чисто температурних розв'язків системи рівнянь (2) виконуються такі залежності:

$$e^{\mathrm{t}} = 3\alpha T, \quad \Theta^{\mathrm{t}} = 0\,,$$

де $e^{\mathrm{t}} = \varepsilon_1^{\mathrm{t}} + \varepsilon_2^{\mathrm{t}} + \varepsilon_3^{\mathrm{t}}$, $\Theta^{\mathrm{t}} = \sigma_1^{\mathrm{t}} + \sigma_2^{\mathrm{t}} + \sigma_3^{\mathrm{t}}$ – суми нормальних чисто температурних деформацій та напружень, відповідно.

Чистий температурний розв'язок рівнянь Нав'є. У [10] побудовано частковий розв'язок рівнянь Нав'є (2), коли температура не є лінійною функцією і не залежить від змінної x_3, у вигляді

$$u_j^{\mathrm{t}}(x_1, x_2) = \frac{\partial\psi}{\partial x_j} + \beta_1\Omega_j, \quad j = 1,2, \quad u_3^{\mathrm{t}} = \alpha x_3 T\,, \tag{4}$$

де $\Omega_j(x_1, x_2) = \int T(x_1, x_2)dx_j$ – гармонічні функції, $\psi(x_1,x_2) = \beta(x_1\Omega_1 + x_2\Omega_2)$ – бігармонічна функція, яка задовольняє рівняння $\Delta\psi = -\alpha T$, $\beta_1 = 3\alpha/2$, $\beta = -\alpha/4$.

За відомими переміщеннями (4) визначимо деформації та чисто температурні напруження з використанням (1):

$$\sigma_j^{\mathrm{t}} = 2G\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2} + \frac{\alpha}{2}T\right), \quad \sigma_3^{\mathrm{t}} = 0\,,$$

$$\tau_{12}^{\mathrm{t}} = 2G\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \tau_{3j}^{\mathrm{t}} = \alpha \mathrm{G} x_3 \frac{\partial T}{\partial x_j}, \quad j = 1,2\,. \tag{5}$$

Вирази (4), (5) описують чисто температурні компоненти тривимірного термонапруженого стану пластини внаслідок розподілу температурного поля, залежного від двох змінних.

2. Подання загального розв'язку задачі термопружності. Використаємо загальне подання термопружного розв'язку [10]

$$u_j = u_j^{\mathrm{e}} + u_j^{\mathrm{t}} = \frac{\partial P}{\partial x_j} - (-1)^j \frac{\partial Q}{\partial x_{3-j}} + u_j^{\mathrm{t}}, \qquad j = 1,2,$$

$$u_3 = u_3^{\mathrm{e}} + u_3^{\mathrm{t}} = \frac{\partial P}{\partial x_3} - 4(1-\nu)\Phi + \alpha x_3 T, \tag{6}$$

де $P = x_3\Phi + \Psi$, а Φ, Ψ, Q – гармонічні функції, залежні від трьох змінних [3]. Запишемо загальні вирази нормальних

$$\sigma_j = \sigma_j^{\mathrm{e}} + \sigma_j^{\mathrm{t}} = 2G\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_j^2} - (-1)^j \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\nu \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right) + \sigma_j^{\mathrm{t}}, \qquad j = 1,2,$$

$$\sigma_3 = \sigma_3^{\mathrm{e}} = 2G\left(\frac{\partial^2 P}{\partial x_3^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right), \qquad \sigma_3^{\mathrm{t}} = 0, \tag{7}$$

та зсувних

$$\tau_{j3} = \tau_{j3}^{\mathrm{e}} + \tau_{j3}^{\mathrm{t}} = G\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\frac{\partial P}{\partial x_3} - 4(1-\nu)\Phi\right) - (-1)^j \frac{\partial^2 Q}{\partial x_{3-j}\partial x_3}\right) + \tau_{3j}^{\mathrm{t}},$$

$$\tau_{12} = \tau_{12}^{\mathrm{e}} + \tau_{12}^{\mathrm{t}} = G\left(2\frac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x_1^2}\right) + \tau_{12}^{\mathrm{t}}, \qquad j = 1,2, \tag{8}$$

напружень у вигляді суми пружних і чисто температурних складових. Із використанням формул (6)–(8) знайдемо суму нормальних напружень та об'ємне розширення:

$$\Theta = -2E\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}, \qquad e = \frac{1-2\nu}{E}\Theta + 3\alpha T. \tag{9}$$

З урахуванням специфіки навантаження торцевої периферії пластини робимо висновок, що нормальні і зсувні напруження σ_j^{e}, σ_j^{t}, $j = 1,2,3$, і τ_{12}^{e}, τ_{12}^{t}, відповідно, є парними за змінною x_3, а зсувні напруження τ_{j3}^{e}, τ_{j3}^{t}, $j = 1,2$, – непарними. Тому згідно з (6)–(8) функції P, Q є парними за змінною x_3, а функція Φ – непарною.

Крайові умови, що враховують вплив температури на плоских поверхнях пластини. Зауважимо, що температурне поле викликає чисто температурні переміщення (4) і температурні напруження (5). Вважатимемо, що вільні від силових навантажень плоскі поверхні пластини деформуються без зовнішнього супротиву так, що чисто температурні напруження (5) на них зрівноважено внутрішніми напруженнями σ_3^{e}, τ_{3j}^{e}. Тому, згідно з (7), (8), умови на плоских поверхнях пластини запишемо у вигляді

$$\sigma_3^{\mathrm{e}}(x_1, x_2, \pm h_3) = 0, \qquad \tau_{3j}^{\mathrm{t}}(x_1, x_2, \pm h_3) = \mp \alpha \mathrm{G} h_3 \frac{\partial T}{\partial x_j}, \qquad j = 1,2, \tag{10}$$

де $h_3 = h/2$. З використанням першого рівняння (10) та виразу (7) отримаємо крайову умову

$$\frac{\partial^2 P^+}{\partial x_3^2} - 2(2-\nu)\frac{\partial \Phi^+}{\partial x_3} = 0. \tag{11}$$

Тут і надалі верхні позначки «+» та «–» позначають значення відповідних функцій на верхній $x_3 = h_3$ і нижній $x_3 = -h_3$ плоских поверхнях пластини. Симетричність напружено-деформованого стану (6)–(8) дає змогу виразити умови на нижній поверхні пластини через умови на верхній поверхні. Тому надалі розглядатимемо умови лише на верхній поверхні пластини.

З використанням співвідношень (5), (8) подамо умови (10) через зсувні напруження

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(2\frac{\partial P^+}{\partial x_3} - 4(1-\nu)\Phi^+ + \alpha\frac{h}{2}T\right) = (-1)^j \frac{\partial^2 Q^+}{\partial x_{3-j}\partial x_3}, \quad j = 1,2. \tag{12}$$

Після диференціювання рівнянь (12) одержимо такі умови:

$$\Delta\frac{\partial Q^+}{\partial x_3} = 0, \quad \Delta\left(\frac{\partial P^+}{\partial x_3} - 2(1-\nu)\Phi^+\right) = 0. \tag{13}$$

Із (13) випливає, що функції $\partial Q^+/\partial x_3$, $\partial P^+/\partial x_3 - 2(1-\nu)\Phi^+$ є гармонічними.

3. Зведення тривимірної задачі до двовимірної. Після інтегрування напружень (7), (8) за змінною x_3 введемо в розгляд залежні від двох змінних зусилля T_1, T_2, S_{12} на серединній поверхні пластини [4, 5]:

$$T_j = 2G\left(\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial x_j^2} - (-1)^j\frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial x_1\partial x_2} - 4\nu\Phi^+ + h\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2} + \frac{h}{2}\alpha T\right),$$

$$S_{12} = 2G\left(\frac{\partial^2\tilde{P}}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2\tilde{Q}}{\partial x_1^2}\right) + h\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1\partial x_2}\right), \quad S_{j3} = 0, \tag{14}$$

де $j = 1,2$, $\{\tilde{P},\tilde{Q}\} = \int\limits_{-h_3}^{h_3}\{P,Q\}\,dx_3$.

Визначимо усереднені напруження на серединній поверхні пластини через зусилля (14):

$$\sigma_j = \frac{1}{h}T_j, \quad \tau_{12} = \frac{1}{h}S_{12}, \quad j = 1,2. \tag{15}$$

Вирази (14), (15) описують лінійний зв'язок між усередненим тривимірним напруженим станом пластини (7), (8) і напруженнями на її серединній поверхні.

На основі (14) можемо знайти суму нормальних зусиль у вигляді

$$T_1 + T_2 = 2G(\Delta\tilde{P} - 8\nu\Phi^+). \tag{16}$$

Зусилля (14) задовольняють два рівняння рівноваги пластин [4, 5], звідки одержуємо таку систему рівнянь:

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Delta\tilde{P} - 4\nu\Phi^+ - \frac{h}{2}\alpha T\right) = (-1)^j\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_{3-j}}\Delta\tilde{Q}, \quad j = 1,2. \tag{17}$$

Після інтегрування за змінною x_3 рівняння Лапласа для функції Q отримаємо рівняння

$$\Delta\tilde{Q} = -2\frac{\partial Q^+}{\partial x_3}, \tag{18}$$

з огляду на яке рівняння (17) подамо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Delta\tilde{P} - 4\nu\Phi^+ - \frac{h}{2}\alpha T\right) = -(-1)^j\frac{\partial^2 Q^+}{\partial x_{3-j}\partial x_3}, \quad j = 1,2. \tag{19}$$

Із системи рівнянь (19) з урахуванням умов (13) випливає таке ключове бігармонічне рівняння:

$$\Delta(\Delta\tilde{P} - 4\nu\Phi^+) = 0. \tag{20}$$

Подамо температурне поле у вигляді виразу

$$T = -8\frac{\partial^2 \eta(x_1, x_2)}{\partial x_1^2}, \tag{21}$$

який задовольняє рівняння (3). Тут η − гармонічна функція. Використаємо подання (21) для побудови базових температурних функцій, які входять у вирази для переміщень (4) і напружень (5):

$$\Omega_j = 8(-1)^j \frac{\partial \eta}{\partial x_j}, \quad \psi = 2\alpha\left(x_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2}\right), \quad j = 1,2. \tag{22}$$

З урахуванням (21) подамо розв'язок систем рівнянь (12), (13) у вигляді

$$\frac{\partial Q^+}{\partial x_3} = -2h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - 4\alpha h \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2}, \tag{23}$$

де φ − невідома гармонічна функція. Використання (23) разом із (12) призводить до рівняння

$$\frac{\partial P^+}{\partial x_3} = 2(1-\nu)\Phi^+ - h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}. \tag{24}$$

Використання (23), (24) разом із (19) дає змогу одержати основне рівняння теорії термопружних пластин

$$\Delta \tilde{P} - 4\nu\Phi^+ = 2h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}. \tag{25}$$

Рівняння (19)−(25) є точними в лінійній постановці задачі термопружності. Використаємо той факт, що нормальні напруження σ_3 є незначними порівняно з напруженнями σ_1 та σ_2:

$$|T_1|, |T_2| \gg \left| \int_{-h_3}^{h_3} \sigma_z(x_1, x_2, x_3)\, dx_3 \right|. \tag{26}$$

Після інтегрування за товщиною пластини першої залежності (9) та використання співвідношень (16), (26) одержимо ще одне рівняння

$$\Delta \tilde{P} = -4(1-\nu)\Phi^+. \tag{27}$$

Порівнявши рівняння (25) та (27), знайдемо вираз

$$\Phi^+ = -\frac{h}{2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}. \tag{28}$$

Із (27), (28) випливає, що функція Φ^+ є гармонічною, а функція $\tilde{P}$ − бігармонічною. З (24), (28) випливає, що функція $\partial P^+/\partial x_3$ має вигляд

$$\frac{\partial P^+}{\partial x_3} = -(2-\nu)h\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}. \tag{29}$$

Отже, крайові умови (12) вдається задовольнити, якщо використати співвідношення (21), (28), (29), а крайова умова (11) наближено виконується завдяки виконанню умови (26).

4. Подання термопружного стану пластини через гармонічні функції двох змінних. Підставивши (23), (28) у (18), (27), одержимо два рівняння з гармонічними правими частинами для визначення функцій $\tilde{P}$, $\tilde{Q}$:

$$\Delta \tilde{P} = 2h(1-\nu)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \quad \Delta \tilde{Q} = 4h\frac{\partial^2 (\varphi + 2\alpha\eta)}{\partial x_1 \partial x_2}. \tag{30}$$

Оскільки чисто температурні переміщення (4) і напруження (5) є симетричними відносно x_1, x_2, то загальні розв'язки рівнянь (30) матимуть вигляд:

$$\tilde{P} = h(1-\nu)x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + hg_1(x_1, x_2),$$

$$\tilde{Q} = 2h\alpha\left(x_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right) + 2hx_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + hg_2(x_1, x_2), \tag{31}$$

де g_j – довільні гармонічні функції, які можна подати у вигляді [4, 9]

$$g_1 = -\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial(\phi - g)}{\partial x_2}, \quad g_2 = -\frac{1+\nu}{2}\frac{\partial(\phi + g)}{\partial x_1}. \tag{32}$$

Тут ϕ, g – невідомі гармонічні функції.

Після підстановки в (14) співвідношень (21), (22), (28), (31), (32) переконуємось, що в остаточні вирази для зусиль функція g не входить. Отже, функцію g, як у випадку плоскої задачі теорії пружності [4], можна не враховувати. Тому бігармонічні функції (31) мають такий вигляд:

$$\tilde{P} = h(1-\nu)x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{1+\nu}{2} h \frac{\partial \phi}{\partial x_2},$$

$$\tilde{Q} = 2hx_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{1+\nu}{2} h \frac{\partial \phi}{\partial x_1} + 2h\alpha\left(x_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \right). \tag{33}$$

Пружну частину напружень (14), (15) виразимо через бігармонічну функцію [4]

$$\sigma_j^{\mathrm{e}} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_{3-j}^2}, \quad \tau_{12}^{\mathrm{e}} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_1^{\mathrm{e}} + \sigma_2^{\mathrm{e}} = 2E\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2}, \quad j = 1, 2,$$

де $U = E\left(x_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right)$ – функція напружень Ері, яка визначає пружний стан пластини під дією навантажень за відсутності температури.

Означення. Пружні напруження, які нівелюють чисто температурні напруження на поверхнях пластини, називатимемо *додатковими*, а суперпозицію чисто температурного і додаткового станів – температурним напруженим станом пластини.

Зауважимо, що чисто температурні переміщення (4) і напруження (5) визначаються лише частковим розв'язком системи рівнянь (2). Додаткові компоненти визначаються складовою $2h\alpha\left(x_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \eta}{\partial x_1} \right)$ функції $\tilde{Q}$ у співвідношеннях (33). Підставимо у залежності (14), (15) лише ті доданки у (22), (33), які залежать від температури. Після математичних перетворень одержимо рівність нулеві температурних напружень: $\sigma_1^{\mathrm{T}} = \sigma_2^{\mathrm{T}} = \tau_{12}^{\mathrm{T}} = 0$.

Визначення переміщень в пластині. Знайдемо пружні переміщення в пластині після усереднення перших двох формул (6) і використання співвідношень (33) без температурних складових [4]

$$u_1^{\mathrm{e}} = -(1+\nu)\left(x_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + (1-\nu)\frac{\partial \varphi}{\partial x_1},$$

$$u_2^{\mathrm{e}} = -(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} + x_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_1} \right) - 2\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}.$$

Температурні переміщення. Усереднимо (6), де врахуємо (4) та залежну від температури складову функції $\tilde{Q} = 2h\alpha\left(x_1 \dfrac{\partial\eta}{\partial x_2} + x_2 \dfrac{\partial\eta}{\partial x_1}\right)$. У результаті знайдемо температурні переміщення

$$u_1^{\mathrm{T}} = -8\alpha \frac{\partial\eta}{\partial x_1}, \quad u_2^{\mathrm{T}} = 8\alpha \frac{\partial\eta}{\partial x_2}.$$

Підставимо вирази (28), (29) в третє співвідношення (6) і визначимо прогин верхньої поверхні пластини

$$u_3^+ = -\nu h \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{h}{2}\alpha T. \tag{34}$$

З (15), (16), (27), (28) знаходимо залежність $\sigma_1 + \sigma_2 = 2E\partial^2\varphi/\partial x_1^2$, звідки з урахуванням (34) отримаємо таку формулу для прогину:

$$u_3^+ = \frac{h}{2}\left(\alpha T - \frac{\nu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2)\right). \tag{35}$$

5. Побудова температурних переміщень, які не враховані у поданні (4). Подання (4) не враховують випадок, коли температура є лінійною функцією. Виділимо окремо три випадки лінійного подання температури: сталу температуру $T = t_0$, лінійну температуру, залежну від однієї з координат у серединній площині $T = t_j x_j$, $j = 1,2$, і лінійну температуру $T = t_3 x_3$.

У випадку сталої температури переміщення є такими:

$$u_j^{\mathrm{t}} = \alpha t_0 x_j, \quad e^{\mathrm{t}} = 3\alpha t_0, \quad \gamma_{kj} = 0, \quad k \ne j, \quad j,k = 1,2,3. \tag{36}$$

У цьому випадку праві частини рівнянь (2) дорівнюють нулю і переміщення (36), згідно зі співвідношеннями (1), описують як температурний

$$\sigma_k^{\mathrm{t}} = 0, \quad \gamma_{kj}^{\mathrm{t}} = 0, \quad \Theta^{\mathrm{t}} = 0, \quad k \ne j, \quad j,k = 1,2,3, \tag{37}$$

так і пружний

$$\sigma_k^{\mathrm{e}} = c_0 E, \quad \gamma_{kj}^{\mathrm{e}} = 0, \quad \Theta^{\mathrm{e}} = 3c_0 E, \quad k \ne j, \quad j,k = 1,2,3,$$

напружений стани пластини, де $c_0 = \dfrac{\alpha t_0}{1 - 2\nu}$.

У випадку температури $T = t_1 x_1$ маємо:

$$u_1^{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\alpha t_1 (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2), \quad u_2^{\mathrm{t}} = \alpha t_1 x_1 x_2,$$

$$u_3^{\mathrm{t}} = \alpha t_1 x_1 x_3, \quad e^{\mathrm{t}} = 3\alpha T,$$

$$\sigma_k^{\mathrm{t}} = 0, \quad \gamma_{kj}^{\mathrm{t}} = 0, \quad \Theta^{\mathrm{t}} = 0, \quad k \ne j, \quad k = 1,2,3. \tag{38}$$

Переміщення (38) є симетричними відносно змінних x_2 та x_3 і задовольняють рівняння (2).

У випадку виразу для температури $T = t_3 x_3$ маємо:

$$u_1^{\mathrm{t}} = \alpha t_3 x_1 x_3, \quad u_2^{\mathrm{t}} = \alpha t_3 x_2 x_3,$$

$$u_3^{\mathrm{t}} = \frac{1}{2}\alpha t_3 (x_3^2 - x_1^2 - x_2^2), \quad e^{\mathrm{t}} = 3\alpha T,$$

$$\sigma_k^{\mathrm{t}} = 0, \quad \gamma_{kj}^{\mathrm{t}} = 0, \quad \Theta^{t} = 0, \quad k \ne j, \quad j,k = 1,2,3. \tag{39}$$

Важливо, що комбінація першого (36), (37) і другого (38) випадків можуть описувати плоский термопружний стан пластини, а комбінація першого і третього (39) випадків відповідає теплоізольованій пластині.

6. Теоретичне обґрунтування розрахункової формули для експериментального визначення нормальних напружень на контурі отвору. Формула (35) дає змогу експериментально визначити нормальне напруження вздовж контуру отвору $L_1(\tau)$ в пластині, яка перебуває в температурному полі $T(x_1, x_2)$ і симетрично навантажена на зовнішньому контурі L. Тут τ – координата вздовж контуру отвору L_1. Припустимо, що на L_1 розподілено навантаження $\sigma_n = f(\tau)$, $\tau_{n\tau} = 0$, де $f(\tau)$ – відома функція. Тоді з урахуванням інваріантності суми напружень одержимо

$$\sigma_\tau + f = \sigma_1 + \sigma_2 , \tag{40}$$

де σ_τ – невідоме нормальне напруження вздовж контуру отвору. Із рівнянь (35), (40) визначимо це напруження у вигляді

$$\sigma_\tau = \frac{\alpha E}{\nu} T - \frac{2E}{h\nu} u_3^+ - f .$$

З цієї формули можна знайти напруження σ_τ, коли експериментально визначено переміщення u_3^+ і температуру T вздовж контуру отвору L_1.

Висновки. На основі тривимірної теорії термопружності без використання гіпотез про нульові дотичні напруження побудовано двовимірну теорію термопружних пластин. Знайдені напруження і переміщення перераховуються за відповідними усередненими значеннями тривимірної теорії термопружності. Із одержаних формул випливають подання напружень плоскої задачі теорії пружності. Знайдено формулу для нормального прогину плоскої поверхні пластини, із якої можна експериментально визначити суму нормальних напружень у пластині.

Встановлено, що за дії залежного від двох змінних температурного поля і вільного теплового розширення пластини чисто температурні напруження будуть зрівноважені пружними напруженнями. Аналітично-числовий алгоритм розв'язання силової крайової задачі не відрізнятиметься від пружного випадку.

1. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 309 с.
   Те саме: *Kovalenko A. D.* Thermoelasticity. Basic theory and applications. – Gröningen: Wolters-Noordhoff Publishing, 1970. – 263 p.
2. *Кушнір Р. М., Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В.* Зведення двовимірних задач термопружності для тіл з кутовими точками до ключових інтегро-диференціальних рівнянь // Укр. мат. журнал. – 2021. – **73**, № 10. – С. 1355–1367. – https://doi.org/10.37863/umzh.v73i10.6784.
   Те саме: *Kushnir R. M., Tokovyi Y. V., Yuzvyak M. Y., Yasinskyi A. V.* Reduction of the two-dimensional thermoelasticity problems for solids with corner points to key integrodifferential equations // Ukr. Math. J. – 2022. – **73**, No. 10. – P. 1566–1579. – https://doi.org/10.1007/s11253-022-02014-4.
3. *Ревенко В. П.* О решении трехмерных уравнений линейной теории упругости // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 52–65.
   Те саме: *Revenko V. P.* Solving the three-dimensional equations of the linear theory of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 7. – P. 730–741. – https://doi.org/10.1007/s10778-009-0225-4.
4. *Ревенко В. П., Ревенко А. В.* Розрахунок плоского напружено-деформованого стану пластин на основі тривимірної теорії пружності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2016. – **52**, № 6. – С. 63–68.
   Те саме: *Revenko V. P., Revenko A. V.* Determination of plane stress-strain states of the plates on the basis of the three-dimensional theory of elasticity // Mater. Sci. – 2017. – **52**, No. 6. – P. 811–818. – https://doi.org/10.1007/s11003-017-0025-7.

5. *Donnell L.H.* Beams, plates, and shells. – Chicago: McGraw-Hill Inc., 1976. – 453 p.
6. *Melan E., Parkus G.* Wärmespannungen: Infolge Stationärer Temperaturfelder. – Wien: Springer, 1953. – 114 s.
7. *Noda N., Hetnarski R. B., Tanigawa Y.* Thermal stresses. – New York: Taylor & Francis, 2003. – 507 p.
8. *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon, 1962. – 628 p.
9. *Revenko V. P.* Analytical solution of the problem of symmetric thermally stressed state of thick plates based on the 3D elasticity theory // J. Mech. Eng. – 2021. – **24**, No. 1. – P. 36–41. – https://doi.org/10.15407/pmach2021.01.036.
10. *Revenko V.* Construction of static solutions of the equations of elasticity and thermoelasticity theory // Вісн. Терноп. нац. техн. ун-ту. – 2022. – **108**, No. 4. – P. 64–73. – https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2022.04.064.
11. *Rychahivskyy A. V., Tokovyy Y. V.* Correct analytical solutions to the thermoelasticity problems in a semi-plane // J. Therm. Stresses. – 2008. – **31**, No. 11. – P. 1125–1145. – https://doi.org/10.1080/01495730802250854.
12. *Sadd M. H.* Elasticity: Theory, applications, and numerics. – Burlington: Acad. Press, 2009. – xv+536 p.
13. *Timoshenko S. P., Goodier J. N.* Theory of elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1970. – 574 p.
14. *Tokovyy Y.* Plane thermoelasticity of inhomogeneous solids. / In: Altenbach H., Öchsner A. (eds) // Encyclopedia of Continuum Mechanics. – Berlin–Heidelberg: Springer, 2019. – P. 1–13. – https://doi.org/10.1007/978-3-662-53605-6_361-1

DETERMINATION OF THE THREE-DIMENSIONAL THERMOELASTIC STATE OF PLATES BY MEANS OF HARMONIC FUNCTIONS

A three-dimensional steady-state thermoelastic problem for a plate subjected to a harmonically distributed temperature field depending on two variables is considered. The purely thermal displacements and stresses (partial solutions of the thermoelasticity equations that are independent of elastic displacements) are obtained analytically. To satisfy the boundary conditions on the plane surfaces of the plate, a system of equations is derived, the general solution of which is expressed in terms of three harmonic functions depending on two variables, without invoking any assumptions regarding vanishing tangential stresses.

Key words: *stationary thermoelasticity, boundary conditions, displacements, elastic plate, temperature state.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.08.24