

**ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ
КОНТАКТУЮЧИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ПІВПРОСТОРІВ З ВИКОРИСТАННЯМ
ФУНКЦІЙ ГРІНА ДЛЯ ДВОСКЛАДОВОГО ПРОСТОРУ**

Запропоновано аналітично-числову методику визначення нестационарного температурного поля у контактуючих термочутливих півпросторах з джерелами тепла. З використанням перетворення Кірхгофа задачу теплопровідності зведено до інтегрального подання розв'язку за допомогою функції Гріна для двоскладового простору, яка виражається через узагальнені функції і лінійні сплайни, такі ж як для однорідного півпростору. Задачу далі зведено до розв'язання нелінійного алгебричного рівняння відносно значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на поверхні поділу. Досліджено температурне поле за дії в кожному з півпросторів джерела тепла імпульсної інтенсивності, зосередженого на поверхні, паралельній до межі поділу.

Ключові слова: двоскладовий простір, нелінійна нестационарна задача теплопровідності, перетворення Кірхгофа, функція Гріна, узагальнені функції, лінійні сплайни.

Конструктивні елементи у вигляді контактуючих тіл, які перебувають в умовах високих температур, широко використовують у теплоенергетиці, приладобудуванні, авіаційній та космічній техніці. Температурна залежність (термочутливість) теплофізичних характеристик (ТФХ) – один із ключових чинників, який враховують у розрахунках, необхідних для прогнозування теплової поведінки таких елементів під час їхньої експлуатації. Це спричиняє, як відомо, нелінійність задач теплопровідності і відповідно ускладнює визначення температурних полів. Для розв'язання нелінійних задач теплопровідності застосовують, як правило, наближені методи, зокрема аналітично-числові [2, 4, 5, 6, 11, 12, 15, 17]. Серед них методи малого параметра, послідовних наближень, лінеаризуючих множників, інтегральний підхід з апроксимацією поліномами та інші. У [1, 3, 7, 14] викладено методи, які ґрунтуються на використанні функцій Гріна для однорідних областей. Для шаруватих тіл з метою спрощення відшукання розв'язку відповідних задач використано функцію Гріна для трискладового простору у вигляді функціонального ряду [9, 10], для багатошарових тіл у вигляді ряду за відповідними власними функціями [8, 13].

Нижче проілюстровано методику визначення нестационарного температурного поля в контактуючих термочутливих півпросторах з джерелами тепла, що зводиться до відшукання однієї невідомої функції на поверхні поділу у фіксовані моменти часу. При цьому використано функцію Гріна для двоскладового простору, яка виражається через аналогічні, як в однорідному півпросторі, функції.

1. Формулювання задачі та її розв'язання. Розглянемо простір, складений з двох контактуючих півпросторів $\tilde{z} \leq 0$, $\tilde{z} \geq 0$ із залежними від температури коефіцієнтами теплопровідності $\lambda_{ti}(t_i) = \lambda_i^{(i)} \Lambda_i(t_i)$ та об'ємної теплоємності $c_{Vi}(t_i) = c_V^{(i)} C_i(t_i)$, де величини з індексами $i = 1, 2$ належать відповідно півпросторам $\tilde{z} \leq 0$, $\tilde{z} \geq 0$; сталі $\lambda_i^{(i)}$, $c_V^{(i)}$ мають розмірність відповідних ТФХ. Півпростори мають нульову початкову температуру і

[✉] v.shufliak@gmail.com

перебувають під дією джерел тепла із залежною від координати \tilde{z} та часу τ густиною $w_{ti}(\tilde{z}, \tau)$.

Для визначення нестационарного температурного поля використовуємо систему рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[\lambda_{ti}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \tilde{z}} \right] = c_{Vi}(t_i) \frac{\partial t_i}{\partial \tau} - w_{ti}(\tilde{z}, \tau), \quad i = 1, 2; \quad (1)$$

умови контакту

$$\left(\lambda_t^{(1)} \Lambda_1(t_1) \frac{\partial t_1(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tilde{z}} \right) \Big|_{\tilde{z}=0} = \left(\lambda_t^{(2)} \Lambda_2(t_2) \frac{\partial t_2(\tilde{z}, \tau)}{\partial \tilde{z}} \right) \Big|_{\tilde{z}=0}, \quad (2)$$

$$t_1(\tilde{z}, \tau) \Big|_{\tilde{z}=0} = t_2(\tilde{z}, \tau) \Big|_{\tilde{z}=0}; \quad (3)$$

граничні та початкові умови

$$t_i(\tilde{z}, \tau) \rightarrow 0, \quad \tilde{z} \rightarrow \mp \infty, \quad (4)$$

$$t_i(\tilde{z}, \tau) \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (5)$$

Введемо безрозмірні величини

$$\bar{t}_i(z, \text{Fo}) = \frac{t_i(\tilde{z}, \text{Fo})}{t_s}, \quad \bar{\lambda}_t^{(i)} = \frac{\lambda_t^{(i)}}{\lambda_t^*}, \quad \bar{c}_V^{(i)} = \frac{c_V^{(i)}}{c_V^*},$$

$$\text{Fo} = \frac{\lambda_t^* \tau}{c_V^* \ell^2}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{\ell}, \quad \bar{w}_{ti}(z, \text{Fo}) = \frac{\ell^2 w_{ti}(\tilde{z}, \tau)}{\lambda_t^* t_s},$$

де t_s – характерна для задачі температура; ℓ , λ_t^* , c_V^* – параметри, що мають розмірності одиниці довжини, коефіцієнта теплопровідності та об'ємної теплоємності відповідно.

Тоді задача (1)–(5) матиме вигляд

$$\bar{\lambda}_t^{(i)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\Lambda}_i(\bar{t}_i) \frac{\partial \bar{t}_i}{\partial z} \right] = \bar{c}_V^{(i)} \bar{C}_i(\bar{t}_i) \frac{\partial \bar{t}_i}{\partial \text{Fo}} - \bar{w}_{ti}(z, \text{Fo}), \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

$$\bar{\lambda}_t^{(1)} \bar{\Lambda}_1(\bar{t}_1) \frac{\partial \bar{t}_1(z, \text{Fo})}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{\lambda}_t^{(2)} \bar{\Lambda}_2(\bar{t}_2) \frac{\partial \bar{t}_2(z, \text{Fo})}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (7)$$

$$\bar{t}_1(z, \text{Fo}) \Big|_{z=0} = \bar{t}_2(z, \text{Fo}) \Big|_{z=0}, \quad (8)$$

$$\bar{t}_i(z, \text{Fo}) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \mp \infty, \quad (9)$$

$$\bar{t}_1 \Big|_{z=0} = 0, \quad (10)$$

де $[\bar{\Lambda}_i(\bar{t}_i), \bar{C}_i(\bar{t}_i)] = [\Lambda_i(t_i), C_i(t_i)]$.

Застосовуючи перетворення Кірхгофа

$$\Theta_i(z, \text{Fo}) = \Psi_i(\bar{t}_i(z, \text{Fo})), \quad \Psi_i(x) = \int_0^x \bar{\Lambda}_i(\zeta) d\zeta,$$

задачу (6)–(10) зводимо до такої:

$$\bar{\lambda}_t^{(i)} \frac{\partial^2 \Theta_i}{\partial z^2} = \bar{c}_V^{(i)} \frac{\bar{C}_i(\bar{t}_i)}{\bar{\Lambda}_i(\bar{t}_i)} \frac{\partial \Theta_i}{\partial \text{Fo}} - \bar{w}_{ti}(z, \text{Fo}), \quad (11)$$

$$\bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial \Theta_1(z, \text{Fo})}{\partial z} \Big|_{z=0} = \bar{\lambda}_t^{(2)} \frac{\partial \Theta_2(z, \text{Fo})}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (12)$$

$$(\Theta_2(z, \text{Fo}) - \Theta_1(z, \text{Fo}))|_{z=0} = F_2(\text{Fo}), \quad (13)$$

$$\Theta_i(z, \text{Fo}) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \mp\infty, \quad (14)$$

$$\Theta_i(z, \text{Fo})|_{\text{Fo}=0} = 0, \quad (15)$$

де

$$F_2(\text{Fo}) = \Psi_2(\bar{t}_2(0, \text{Fo})) - \Psi_1(\bar{t}_2(0, \text{Fo})). \quad (16)$$

Замінімо систему рівнянь (11) і умови контакту (12), (13) еквівалентним рівнянням з узагальненою по z похідною і використаємо співвідношення

$$\frac{\lambda_{ti}(t_i)}{c_{vi}(t_i)} = a_i(t_i) \approx a_{si},$$

де a_{si} – середньо-інтегральні значення коефіцієнтів температуропровідності $a_i(t_i)$ в інтервалі їхньої зміни.

В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\lambda}_t(z) \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right] &= \bar{c}_N(z) \frac{\partial \Theta}{\partial \text{Fo}} - \bar{w}_t(z, \text{Fo}) + \\ &+ \bar{\lambda}_t^{(2)} F_2(\text{Fo}) \delta'(z) - w^T(z, \text{Fo}). \end{aligned} \quad (17)$$

Тут $\delta'(z)$ – похідна від дельта-функції Дірака, а функції $\Theta(z, \text{Fo})$, $\bar{\lambda}_t(z)$, $\bar{c}_N(z)$, $\bar{w}_t(z, \text{Fo})$, $w^T(z, \text{Fo})$ при $\tilde{z} \leq 0$, $\tilde{z} \geq 0$ збігаються відповідно з

$$\Theta_i(z, \text{Fo}), \quad \bar{\lambda}_t^{(i)}(z), \quad \bar{c}_N^{(i)}(z), \quad \bar{w}_{ti}(z, \text{Fo}), \quad w_i^T(z, \text{Fo}) = \bar{c}_v^{(i)} \left[\frac{a_i}{a_{si}} - \frac{\bar{C}_i(\bar{t}_i)}{\bar{\Lambda}_i(\bar{t}_i)} \right] \frac{\partial \Theta_i}{\partial \text{Fo}},$$

$$\bar{c}_N^{(i)} = \bar{c}_V^{(i)} a_i / a_{si}, \quad a_i = \lambda_t^{(i)} / c_V^{(i)}.$$

Задачу (14), (15), (17) розв'язуємо з використанням функцій Гріна $G(z, \zeta, \text{Fo})$ для двоскладового простору [9]

$$G(z, \zeta, \text{Fo}) = G_1(z, \zeta, \text{Fo}) + (G_2(z, \zeta, \text{Fo}) - G_1(z, \zeta, \text{Fo}))S(z),$$

$$G_i(z, \zeta, \text{Fo}) = G_{i1}(z, \zeta, \text{Fo}) + (G_{i2}(z, \zeta, \text{Fo}) - G_{i1}(z, \zeta, \text{Fo}))S(\zeta),$$

де

$$G_{11}(z, \zeta, \text{Fo}) = \frac{1}{2\delta_1 \sqrt{\pi \text{Fo}}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\zeta - z)^2}{4\bar{a}_{N1} \text{Fo}} \right] + v_1 \exp \left[-\frac{(\zeta + z)^2}{4\bar{a}_{N1} \text{Fo}} \right] \right\},$$

$$G_{12}(z, \zeta, \text{Fo}) = \frac{1}{(\delta_1 + \delta_2) \sqrt{\pi \text{Fo}}} \exp \left[-\frac{(a_{12}\zeta - z)^2}{4\bar{a}_{N1} \text{Fo}} \right],$$

$$G_{21}(z, \zeta, \text{Fo}) = \frac{1}{(\delta_1 + \delta_2) \sqrt{\pi \text{Fo}}} \exp \left[-\frac{(a_{12}z - \zeta)^2}{4\bar{a}_{N1} \text{Fo}} \right],$$

$$G_{22}(z, \zeta, \text{Fo}) = \frac{1}{2\delta_2 \sqrt{\pi \text{Fo}}} \left\{ \exp \left[-\frac{(\zeta - z)^2}{4\bar{a}_{N2} \text{Fo}} \right] - v_1 \exp \left[-\frac{(\zeta + z)^2}{4\bar{a}_{N2} \text{Fo}} \right] \right\}, \quad (18)$$

$$\delta_i = \frac{\bar{\lambda}_t^{(i)}}{\sqrt{\bar{a}_{Ni}}}, \quad v_1 = \frac{\delta_1 - \delta_2}{\delta_1 + \delta_2}, \quad a_{12} = \sqrt{\frac{\bar{a}_{N1}}{\bar{a}_{N2}}}, \quad \bar{a}_{Ni} = \frac{\bar{\lambda}_t^{(i)}}{c_N^{(i)}}; \quad S(z) - \text{функція Гевісайда.}$$

Застосувавши функцію Гріна, отримаємо таке інтегральне подання для змінних Кірхгофа

$$\begin{aligned}\Theta_i(z, \mathbf{Fo}) &= \Theta_{i1}^w(z, \mathbf{Fo}) + \Theta_{i2}^w(z, \mathbf{Fo}) + \Theta_i^F(z, \mathbf{Fo}) + \\ &+ \Theta_{i1}^T(z, \mathbf{Fo}) + \Theta_{i2}^T(z, \mathbf{Fo}).\end{aligned}\quad (19)$$

Тут

$$\begin{aligned}\Theta_{i1}^w(z, \mathbf{Fo}) &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\mathbf{Fo}} \bar{w}_{t1}(\zeta, \xi) G_{i1}(z, \zeta, \mathbf{Fo} - \xi) d\xi d\zeta, \\ \Theta_{i2}^w(z, \mathbf{Fo}) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\mathbf{Fo}} \bar{w}_{t2}(\zeta, \xi) G_{i2}(z, \zeta, \mathbf{Fo} - \xi) d\xi d\zeta, \\ \Theta_i^F(z, \mathbf{Fo}) &= \bar{\lambda}_t^{(2)} \int_0^{\mathbf{Fo}} \left. \frac{\partial G_{i2}(z, \zeta, \mathbf{Fo} - \xi)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} F_2(\xi) d\xi, \\ \Theta_{i1}^T(z, \mathbf{Fo}) &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\mathbf{Fo}} w_1^T(\zeta, \xi) G_{i1}(z, \zeta, \mathbf{Fo} - \xi) d\xi d\zeta, \\ \Theta_{i2}^T(z, \mathbf{Fo}) &= \int_0^{\infty} \int_0^{\mathbf{Fo}} w_2^T(\zeta, \xi) G_{i2}(z, \zeta, \mathbf{Fo} - \xi) d\xi d\zeta.\end{aligned}\quad (20)$$

Якщо для ТФХ можна прийняти, що $\frac{\bar{C}_i(\bar{t}_i)}{\bar{\Lambda}_i(\bar{t}_i)} \approx \frac{a_i}{a_{si}}$, то $w_i^T(z, \mathbf{Fo}) = 0$.

Тоді у поданні (19) невідомою залишається функція $\Theta_2(0, \mathbf{Fo})$, яку містить співмножник $F_2(\mathbf{Fo})$ у доданку $\Theta_i^F(z, \mathbf{Fo})$. Отримаємо рівняння для її знаходження. Для цього апроксимуємо функцію $F_2(\mathbf{Fo})$ лінійним сплайном

$$F_2(\mathbf{Fo}) \approx s_1^{(1)} \mathbf{Fo} + s_1^{(0)} + \sum_{p=1}^{J-1} (s_{p+1}^{(1)} \mathbf{Fo} + s_{p+1}^{(0)} - s_p^{(1)} \mathbf{Fo} - s_p^{(0)}) S(\mathbf{Fo} - \mathbf{Fo}_p), \quad (21)$$

де

$$s_p^{(0)} = \frac{F_2(\mathbf{Fo}_{p-1}) \mathbf{Fo}_p - F_2(\mathbf{Fo}_p) \mathbf{Fo}_{p-1}}{\mathbf{Fo}_1},$$

$$s_p^{(1)} = \frac{F_2(\mathbf{Fo}_p) - F_2(\mathbf{Fo}_{p-1})}{\mathbf{Fo}_1},$$

$$\mathbf{Fo}_p = p \mathbf{Fo}_1,$$

J – кількість вузлів, \mathbf{Fo}_1 – крок сітки.

Обчисливши інтеграл $\Theta_i^F(z, \mathbf{Fo})$ з використанням виразів для G_{i2} з (18) і апроксимації (21), отримаємо співвідношення для визначення $\Theta_i(z, \mathbf{Fo})$:

$$\begin{aligned}\Theta_i(z, \mathbf{Fo}) &= \Theta_{i1}^{(w)}(z, \mathbf{Fo}) + \Theta_{i2}^{(w)}(z, \mathbf{Fo}) + \\ &+ (-1)^i \frac{\delta_{i1} \delta_2 + \delta_{i2} \delta_1}{\delta_1 + \delta_2} \left[F_2(\mathbf{Fo}) - s_1^{(0)} \operatorname{erf} \frac{z}{2\sqrt{a_{Ni}} \mathbf{Fo}} - \right. \\ &\left. - s_1^{(1)} I_i(z, \mathbf{Fo}) + \left(s_1^{(1)} + \sum_{p=1}^{J-1} (s_{p+1}^{(1)} - s_p^{(1)}) S(\mathbf{Fo} - \mathbf{Fo}_p) \right) \frac{z^2}{2a_{Ni}} - \right.\end{aligned}$$

$$- \sum_{p=1}^{J-1} (s_{p+1}^{(1)} - s_p^{(1)}) I_i(z, \text{Fo} - \text{Fo}_p) S(\text{Fo} - \text{Fo}_p) \Big], \quad i = 1, 2, \quad (22)$$

де

$$I_i(z, \text{Fo}) = \left(\sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi \bar{a}_{Ni}}} z \exp\left(-\frac{z^2}{4 \bar{a}_{Ni} \text{Fo}}\right) + \text{Fo} \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2 \sqrt{\bar{a}_{Ni} \text{Fo}}}\right) + \frac{z^2}{2 \bar{a}_{Ni}} \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2 \sqrt{\bar{a}_{Ni} \text{Fo}}}\right) \right).$$

Поклавши $z = 0$ у співвідношенні (22), отримаємо нелінійне рівняння для знаходження $\Theta_2(0, \text{Fo})$:

$$\Theta_2(0, \text{Fo}) = \Theta_{21}^{(w)}(0, \text{Fo}) + \Theta_{22}^{(w)}(0, \text{Fo}) + \frac{\delta_1}{\delta_1 + \delta_2} F_2(\text{Fo}).$$

Тут згідно з (16) у випадку лінійної залежності $\Lambda_i(t_i) = 1 + \beta_i t_i$ функція $F_2(\text{Fo})$ матиме вигляд

$$F_2(\text{Fo}) = \frac{\left(1 - \sqrt{1 + 2\bar{\beta}_2 \Theta_2(0, \text{Fo})} + \bar{\beta}_2 \Theta_2(0, \text{Fo})\right) (\bar{\beta}_2 - \bar{\beta}_1)}{\bar{\beta}_2^2}.$$

У випадку експоненціальної залежності $\Lambda_i(t_i) = \exp(\beta_i t_i)$

$$F_2(\text{Fo}) = \Theta_2(0, \text{Fo}) - \frac{1}{\bar{\beta}_1} (\bar{\beta}_2 \Theta_2(0, \text{Fo}))^{\bar{\beta}_1 / \bar{\beta}_2}.$$

Якщо $\Lambda_1(t_1) = 1 + \beta_1 t_1$, $\Lambda_2(t_2) = \exp(\beta_2 t_2)$, то

$$F_2(\text{Fo}) = \Theta_2(0, \text{Fo}) - \frac{\ln(\Theta_2(0, \text{Fo}) \bar{\beta}_2)}{\bar{\beta}_2} - \frac{\bar{\beta}_1}{2 \bar{\beta}_2^2} (\ln(\Theta_2(0, \text{Fo}) \bar{\beta}_2))^2,$$

де $\bar{\beta}_i = \beta_i t_s$.

Маючи змінні Кірхгофа, температури за зазначених вище залежностей визначаємо відповідно за формулами

$$\bar{t}_i(z, \text{Fo}) = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2\bar{\beta}_i \Theta_i(z, \text{Fo})}}{\bar{\beta}_i}, \quad (23)$$

$$\bar{t}_i(z, \text{Fo}) = \frac{\ln(\bar{\beta}_i \Theta_i(z, \text{Fo}) + 1)}{\bar{\beta}_i}.$$

Зауважимо, що вирази для змінної Кірхгофа (22) можна використати як нульове наближення для розв'язання ітераційними методами задачі теплопровідності з урахуванням температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності.

2. Числові результати. Як приклад, розв'язано задачу, коли на поверхнях $\tilde{z} = -h_1$, $\tilde{z} = h_2$ діють джерела тепла імпульсного характеру

$$w_{i1}(\tilde{z}, \tau) = w_{01}(\tau) \delta(\tilde{z} + h_1), \quad w_{i2}(\tilde{z}, \tau) = w_{02}(\tau) \delta(\tilde{z} - h_2),$$

відповідно, де

$$w_{0i}(\tau) = q_i \sum_{p=0}^{m_i-1} \left[S(\tau - b_{pi}) - S(\tau - b_{pi} - \tau_{ai}) \right],$$

q_i – потужність джерела тепла, $b_{pi} = p(\tau_{ai} + \tau_{bi})$, m_i – кількість імпульсів, τ_{ai} – тривалість імпульсу, τ_{bi} – тривалість паузи.

За такої теплової дії вирази для $\Theta_{ij}^{(w)}(z, Fo)$ з формул (20) мають вигляд:

$$\begin{aligned} \Theta_{11}^{(w)}(z, Fo) = & \bar{q}_1 \left[\sum_{p=0}^{m-1} J_{11}(z, Fo - b_{p1}) S(Fo - b_{p1}) - \right. \\ & \left. - \sum_{p=0}^{m-1} J_{11}(z, Fo - b_{p1} - Fo_{a1}) S(Fo - b_{p1} - Fo_{a1}) \right] - \\ & - \bar{q}_1 v_1^* \left[\sum_{p=0}^{m-1} J_{11}(-z, Fo - b_{p1}) S(Fo - b_{p1}) - \right. \\ & \left. - \sum_{p=0}^{m-1} J_{11}(-z, Fo - b_{p1} - Fo_{a1}) S(Fo - b_{p1} - Fo_{a1}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{11}(z, Fo) = & -\frac{1}{2\sqrt{\bar{a}_{N1}} \delta_1} \left((h_1 + z) \operatorname{erfc} \left(\frac{h_1 + z}{2\sqrt{\bar{a}_{N1}} Fo} \right) - \right. \\ & \left. - 2\sqrt{\frac{Fo}{\pi}} \exp \left(-\frac{(h_1 + z)^2}{4\bar{a}_{N1} Fo} \right) \sqrt{\bar{a}_{N1}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{12}^{(w)}(z, Fo) = & \bar{q}_2 \left[\sum_{p=0}^{m-1} J_{12}(z, Fo - b_{p2}) S(Fo - b_{p2}) - \right. \\ & \left. - \sum_{p=0}^{m-1} J_{12}(z, Fo - b_{p2} - Fo_{a2}) S(Fo - b_{p2} - Fo_{a2}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{12}(z, Fo) = & -\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{N1}} (\delta_1 + \delta_2)} \left((-a_{12} h_2 + z) \operatorname{erfc} \left(\frac{-a_{12} h_2 + z}{2\sqrt{\bar{a}_{N1}} Fo} \right) - \right. \\ & \left. - 2\sqrt{\frac{Fo}{\pi}} \exp \left(-\frac{(-a_{12} h_2 + z)^2}{4\bar{a}_{N1} Fo} \right) \sqrt{\bar{a}_{N1}} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{21}^{(w)}(z, Fo) = & \bar{q}_1 \left[\sum_{p=0}^{m-1} J_{21}(z, Fo - b_{p1}) S(Fo - b_{p1}) - \right. \\ & \left. - \sum_{p=0}^{m-1} J_{21}(z, Fo - b_{p1} - Fo_{a1}) S(Fo - b_{p1} - Fo_{a1}) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{21}(z, Fo) = & -\frac{1}{\sqrt{\bar{a}_{N1}} (\delta_1 + \delta_2)} \left((a_{12} z + h_1) \operatorname{erfc} \left(\frac{a_{12} z + h_1}{2\sqrt{\bar{a}_{N1}} Fo} \right) - \right. \\ & \left. - 2\sqrt{\frac{Fo}{\pi}} \exp \left(-\frac{(a_{12} z + h_1)^2}{4\bar{a}_{N1} Fo} \right) \sqrt{\bar{a}_{N1}} \right), \end{aligned}$$

$$\Theta_{22}^{(w)}(z, Fo) = \bar{q}_2 \left[\sum_{p=0}^{m-1} J_{22}(z, Fo - b_{p2}) S(Fo - b_{p2}) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{p=0}^{m-1} J_{22}(z, \text{Fo} - b_{p2} - \text{Fo}_{a2}) S(\text{Fo} - b_{p2} - \text{Fo}_{a2}) \Big] + \\
& + \bar{q}_2 v_1^* \left[\sum_{p=0}^{m-1} J_{22}(-z, \text{Fo} - b_{p2}) S(\text{Fo} - b_{p2}) - \right. \\
& \left. - \sum_{p=0}^{m-1} J_{22}(-z, \text{Fo} - b_{p2} - \text{Fo}_{a2}) S(\text{Fo} - b_{p2} - \text{Fo}_{a2}) \right], \\
J_{22}(z, \text{Fo}) = & - \frac{1}{2\sqrt{\bar{a}_{N2}} \delta_2} \left((-h_2 + z) \operatorname{erfc} \left(\frac{-h_2 + z}{2\sqrt{\bar{a}_{N2}} \text{Fo}} \right) - \right. \\
& \left. - 2\sqrt{\frac{\text{Fo}}{\pi}} \exp \left(- \frac{(-h_2 + z)^2}{4\bar{a}_{N2} \text{Fo}} \right) \sqrt{\bar{a}_{N2}} \right),
\end{aligned}$$

$$\text{де } \text{Fo}_{ai} = \frac{\lambda_t^* \tau_{ai}}{c_V^* \ell^2}, \quad \text{Fo}_{bi} = \frac{\lambda_t^* \tau_{bi}}{c_V^* \ell^2}, \quad \bar{q}_i = \frac{q_i}{q_1}.$$

Перший півпростір виготовлений з кераміки ZrO_2 , а другий – зі сплаву Ті-6Al-4V [16], характеристики яких є такими:

$$\Lambda_1(t) = 1 + 15.39 \cdot 10^{-5} t + 6.53 \cdot 10^{-8} t^2, \quad \Lambda_2(t) = 1 + 29.61 \cdot 10^{-4} t,$$

$$\lambda_t^{(1)} = 1.78 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), \quad \lambda_t^{(2)} = 5.74 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}),$$

$$c_V^{(1)} = 1.64 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}), \quad c_V^{(2)} = 2.33 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}),$$

$$C_1(t) = \frac{1 + 11.05 \cdot 10^{-4} t - 10.58 \cdot 10^{-7} t^2 + 38.14 \cdot 10^{-11} t^3}{(1 + \alpha_{t1}(t)(t - 27))^3},$$

$$\alpha_{t1} = 90.97 \cdot 10^{-7} - 11.97 \cdot 10^{-9} t + 12.7 \cdot 10^{-12} t^2 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1},$$

$$C_2(t) = \frac{1 + 84.63 \cdot 10^{-5} t - 11.62 \cdot 10^{-7} t^2 + 8.42 \cdot 10^{-10} t^3}{(1 + \alpha_{t2}(t)(t - 27))^3},$$

$$\alpha_{t2} = 8.75 \cdot 10^{-6} + 4.09 \cdot 10^{-9} t - 2.69 \cdot 10^{-12} t^2 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1},$$

$$\lambda^* = 3.76 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), \quad c^* = 1.985 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}),$$

$$\beta_1 = 2.21 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \quad \beta_2 = 29.61 \cdot 10^{-4} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}, \quad h_1 = h_2 = 0.01 \text{ м},$$

$$m_1 = m_2 = 3, \quad q_1 = q_2 = 1.2 \cdot 10^6 \text{ Вт}/\text{м}^2,$$

$$\tau_{ai} = 3 \text{ с}, \quad \tau_{bi} = 3 \text{ с}, \quad t_s = \frac{\ell q_1}{\lambda^*}, \quad a_{s1} = a_1, \quad a_{s2} = 0.513 \text{ м}^2/\text{с}$$

в інтервалі температур $0 - 1100 \text{ } ^\circ\text{C}$. Оскільки кераміка має квадратичну залежність коефіцієнта теплопровідності, з використанням методу найменших квадратів її апроксимували лінійною функцією $\Lambda_1(t) = 1 + 2.216 \cdot 10^{-4} t$. Тепер температури в обох півпросторах можна знаходити з (23).

Результати досліджень подано на рис. 1 – рис. 4, де штрихові лінії побудовані за температурозалежних, а суцільні – за сталих характеристик.

На рис. 1 та рис. 2 наведено графіки залежності температури від часу на поверхнях дії джерел тепла. Бачимо, що з кожним наступним імпульсом

вплив температурної залежності зростає. У першому джерелі (рис. 1) він досягає приблизно 11.8%, а в другому (рис. 2) – 25.2%.

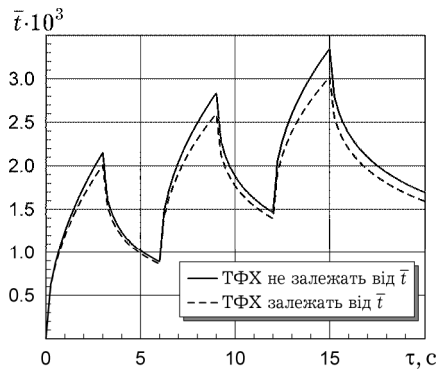


Рис. 1

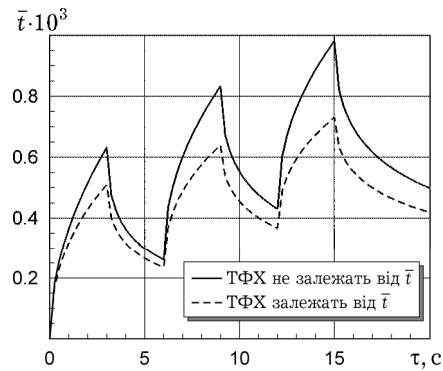


Рис. 2

Рис. 3 ілюструє залежності температури від часу на межі поділу. З аналізу графіків випливає, що при $\tau < 50$ с температура швидко зростає. Максимального значення вона досягає при $\tau \approx 55$ с. Вплив температурної залежності вносить зміни в межах 14%. Після цього спостерігається поступове зниження температури – починається стадія охолодження системи.

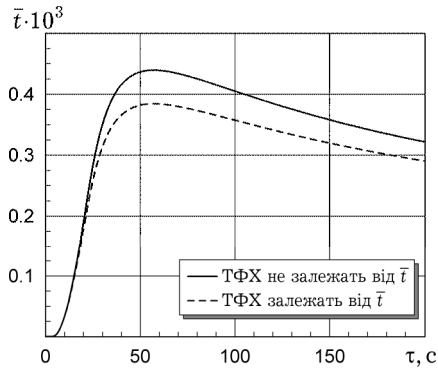


Рис. 3

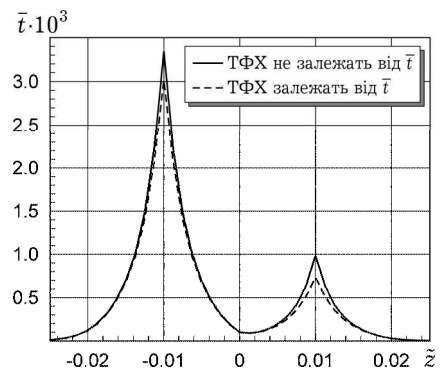


Рис. 4

На рис. 4 зображено розподіл за координатою температури в кінці третього імпульсу. Досліджували також вплив паузи на температурне поле, коли $\tau_{bi} = 1.5$ с. Характер поведінки та вплив температурної залежності виявився подібним до зображеного на рис. 4, а максимальна температура – вищою на ≈ 3.34 %.

Зауважимо, що при зменшенні кроку сітки сплайна в 2, 4, 8 разів температури в одні і ті самі моменти часу на поверхні поділу практично не відрізнялися.

Висновки. З використанням перетворення Кірхгофа, функції Гріна для двоскладового простору і лінійних сплайнів нелінійну нестационарну задачу для контактуючих термочутливих півпросторів з джерелами тепла зведено до розв'язання нелінійного алгебраїчного рівняння відносно значень у вузлах сплайна змінної Кірхгофа на поверхнях поділу. Розглянуто лінійні та експоненціальні залежності коефіцієнтів теплопровідності півпросторів. Числові дослідження виконано за дії імпульсних поверхневих джерел тепла та лінійної залежності коефіцієнтів теплопровідності. Проілюстровано зміну температури залежно від часу і координати та вплив термочутливості.

1. *Белик В. Д., Урюков Б. А., Фролов Г. А., Ткаченко Г. В.* Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 2008. – **81**, № 6. – С. 1058–1062.
Te same: *Belik V. D., Uryukov B. A., Frolov G. A., Tkachenko G. V.* Numerical-analytical method of solution of a nonlinear unsteady heat-conduction equation // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2008. – **81**, No. 6. – P. 1099–1103.
– <https://doi.org/10.1007/s10891-009-0150-8>.
2. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы нестационарной теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1978. – 328 с.
3. *Бреббия К., Теллес Ж., Врубел Л.* Метод граничных элементов. – Москва: Мир, 1987. – 524 с.
4. *Вовк О. М.* Термопружний стан контактуючих термочутливих кусково-однорідних тіл за складного теплообміну // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2023. – **66**, № 3-4. – С. 63–71. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.3-4.63-71>.
5. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
6. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П.* Металургійна термомеханіка. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2002. – 633 с.
7. *Процюк Б. В.* Нестационарні нелінійні задачі теплопровідності для півпростору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 4. – С. 156–167.
Te same: *Protsiuk B. V.* Nonstationary nonlinear problems of heat conduction for a half space // J. Math. Sci. – 2021. – **256**, No. 4. – P. 551–566.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05444-w>.
8. *Процюк Б. В.* Аналітично-числовий метод розв'язування нестационарних нелінійних задач теплопровідності для багатопарових плит // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2023. – **66**, № 3-4. – С. 32–44.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.3-4.32-44>.
9. *Процюк Б., Верба І.* Нестационарне одновимірне температурне поле тришарових тіл з плоско-паралельними межами поділу // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. матем. та інформ. – 1999. – Вип. 1. – С. 200–205.
10. *Процюк Б. В., Горун О. П.* Термопружний стан півбезмежного термочутливого трикомпонентного стрижня за конвективно-променевого теплообміну // Фіз.-хім. мех. матеріалів. – 2016. – **52**, № 3. – С. 15–22.
11. *Adhe A., Ghadle K.* Thermal stress analysis of inhomogeneous infinite solid to 2D elasticity of thermoelastic problems // Mathematics and Computing / Kumar B. R., Ponnusamy S., Giri D., Thuraisingham B., Clifton C. W., Carminati B. (Eds). – Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. – ICMC 2022 (January, 6-8, 2022, Vellore, India). – Vol. 415. – Singapore: Springer, 2022. – P. 509–521.
– https://doi.org/10.1007/978-981-19-9307-7_41.
12. *Bagnall K. R., Muzychka Y. S., Wang E. N.* Application of the Kirchhoff transform to thermal spreading problems with convection boundary conditions // IEEE Trans. Compon. Packag. Manuf. Technol. – 2014. – **4**, No. 3. – P. 408–420.
– <https://doi.org/10.1109/TCPMT.2013.2292584>.
13. *Kushnir R., Protsiuk B.* Determination of the thermal fields and stresses in multi-layer solids by means of the constructed Green functions // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht, etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_608.
14. *Leindl M., Oberaigner E. R., Antretter T.* Solution of a time-dependent heat conduction problem by an integral-equation approach // Computational Materials Science. – 2012. – **52**, No. 1. – P. 178–181.
– <https://doi.org/10.1016/j.commatsci.2011.07.033>.
15. *Sharahy A., Sawlan Z.* Estimation of temperature-dependent thermal conductivity and heat capacity given boundary data // Computation. – 2023. – **11**, No. 9. – Article No. 184. – <https://doi.org/10.3390/computation11090184>.
16. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // J. Therm. Stresses. – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.
– <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>.
17. *Yu J., Yang Y., Campo A.* Approximate solution of the nonlinear heat conduction equation in a semi-infinite domain // Math. Probl. Eng. – 2010. – **2010**, No. 1. – Article ID 421657. – 24 p. – <https://doi.org/10.1155/2010/421657>.

DETERMINATION OF THE NON-STATIONARY TEMPERATURE FIELD OF CONTACTING THERMOSENSITIVE HALF-SPACES USING GREEN'S FUNCTIONS FOR A TWO-COMPONENT MEDIUM

An analytical-numerical technique is proposed for determining the nonstationary temperature field in contacting thermosensitive half-spaces with heat sources. Using the Kirchhoff transform, the heat conduction problem is reduced to an integral representation of its solution by means of Green's function for a two-component space, which is expressed in terms of generalized functions and linear splines analogous to those for a homogeneous half-space. The problem is further reduced to solving a nonlinear algebraic equation with respect to the values of the Kirchhoff variable at the spline nodes on the interface surface. The temperature field under the action in each of the half-spaces of a heat source of pulse intensity concentrated on a surface parallel to the interface was investigated.

Key words: *two-component medium, nonlinear non-stationary heat conduction problem, Kirchhoff transform, Green's function, generalized functions, linear splines.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
18.04.24