

**ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ЦІЛЬОВИХ ПЕРЕМІЩЕНЬ МЕЖІ ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ У СТАЦІОНАРНОМУ ТЕМПЕРАТУРНОМУ ПОЛІ ЗА ДОПОМОГОЮ СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*З використанням аналітичних розв'язків плоских задач теорії пружності та термopружності для півплощини, побудованих у вигляді явних функціональних залежностей від навантажень за допомогою методу безпосереднього інтегрування, встановлено взаємно однозначні відповідності між силовими та тепловими факторами для забезпечення цільових переміщень межі. Зокрема, встановлено співвідношення між профілями розподілу теплового навантаження межі, внаслідок якого відбувається теплове розширення, та розподілу притискового навантаження, яке спричиняє переміщення, що певною мірою компенсують теплові. Проаналізовано приклади таких навантажень.*

**Ключові слова:** півплощина, пружність, термopружність, тепла деформація, притискне навантаження, цільові переміщення, метод безпосереднього інтегрування.

**Вступ.** Одночасний вплив полів різної природи спричинює складну деформативну поведінку твердих тіл внаслідок реалізації різних «механізмів» виникнення деформацій та напружень від кожного з чинників. Наприклад, нерівномірний розподіл температурних полів у тілах з конвенційних матеріалів призводить до об'ємного розширення ділянок, де прогрів є інтенсивнішим [14, 17]. Натомість при стискальському силовому навантаженні на поверхні таких тіл ділянки, які зазнають інтенсивнішого навантаження, вочевидь стискаються. Такі «компенсаційні» властивості можна використовувати для керування напружено-деформованим станом твердих тіл за комплексних термосилових навантажень [1]. Так, якщо на плоску горизонтальну поверхню тіла діє невагомий штамп, у якому підтримується температура, значно вища за ту, яка була спочатку розподілена в тілі (до контакту зі штампом), то внаслідок теплопередачі від штампа прогріта ділянка тіла розшириться (теплова деформація), піднімаючи штамп. Якщо тепер до штампа прикласти силове навантаження, яке втискуватиме його у тіло, то деформація поверхні внаслідок такої дії (силова деформація) буде протилежною до розглянутої вище теплової деформації (штамп заглиблюватиметься у тіло). Незважаючи на те, що локальні профілі сигової та теплової деформації уздовж поверхні є різними [19], можна очікувати, що встановивши зв'язок між прикладеним силовим навантаженням та температурою штампа, можна контролювати прогин поверхні тіла за такого комплексного термосилового навантаження для забезпечення потрібних функціональних властивостей елемента конструкції, який моделюють термopружною системою штамп – тіло [3, 4, 8]. Такі системи є типовими для низки сучасних термоелектроприладів та систем, а також використовуються для вивчення механізмів формування зображень у таких методах, як тепла сканувальна зондова мікроскопія та електрохімічна деформаційна мікроскопія [12, 15].

Задачі про вивчення впливу температурного поля на деформативність поверхні, яка також зазнає зовнішнього силового впливу, розглядалися при дослідженні ковзного контакту з нагріванням внаслідок тертя [6, 10, 11, 16]. Аналогічні задачі розглядалися в контексті п'езомеханіки. Зокрема, метод скінченних елементів було використано в [21] для визначення напруги, яку слід прикласти до п'езоелемента на поверхні багатошарової панелі для

<sup>✉</sup> tokovyy@iapmm.lviv.ua

нівелювання теплової деформації. В [9] побудовано аналітичний розв'язок задачі про втискування у трансверсально ізотропний півпростір штампа, який є нагрітим або зазнає дії хімічної речовини біля його основи. Розв'язок подано через чотири гармонічні потенціальні функції. Такий розв'язок дає змогу пов'язати прикладену силу, хімічну дифузію чи тепловий потік в області контакту з осадкою штампа, температурою або розподілом хімічної речовини. Аналогічний підхід використано у [23] для вивчення сумісної дії ширшого набору факторів впливу.

У статті [2] наведено розв'язок задачі про безфрикційний термопружний контакт охолодженого плоского циліндричного жорсткого штампа та пружного півпростору. Розв'язування зведено до крайової задачі з теорії потенціалу з використанням рівнянь термопружності, записаних для двох гармонічних функцій. Ці функції подано як суми складових, кожна з яких задовольняє двокомпонентні крайові умови. Отримані умови приводять до зв'язаних інтегральних рівнянь Абеля, які зведено до одного рівняння Фредгольма. На цій основі досліджено зв'язок між розподілом контактного тиску, прикладеним навантаженням, різницею температур, тепловим потоком та радіусом області недосконалого контакту.

Вплив теплової деформації на конфігурацію області контакту жорсткого нагрітого (охолодженого) штампа з пружним тілом досліджено в [7]. Виявлено, що залежно від величини та напрямку теплового потоку виникає один із таких станів: порушення контакту на кутових лініях штампа, ідеальний тепловий контакт по всій поверхні основи штампа або область недосконалого контакту в центрі із сусідніми областями ідеального контакту. Аналогічну проблему досліджено в [13] для анізотропних тіл з використанням формалізму Стреха. В [24] досліджено термопружний контакт штампа з півпростором з урахуванням мікроструктури матеріалу останнього. У [18] досліджено прогин поверхні багатопшарового півпростору за дії циліндричного штампа з використанням точного підходу та методики усереднення.

Незважаючи на широкий спектр досліджень контактної взаємодії тіл з урахуванням теплової та силової деформації поверхонь, практично відсутні результати, які дають змогу встановити взаємно однозначну відповідність між тепловими та силовими факторами навантаження для керування профілем прогину поверхні. Це пов'язано насамперед з доволі обмеженим «арсеналом» аналітичних розв'язків задач теорії пружності та термопружності для межових умов, які моделюють контактну взаємодію.

У цій статті з використанням розв'язків плоских задач теорії пружності та термопружності для однорідної ізотропної півплощини [19, 22] встановлено зв'язок між силовим та тепловим навантаженням межі півплощини для забезпечення заданих профілів розподілу її переміщень.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо плоску задачу термопружності для півплощини  $\mathcal{H} = \{x \in (-\infty, +\infty), y \in [0, +\infty)\}$ , яка за відсутності масових сил описується [20] рівняннями рівноваги

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \mathcal{H}, \quad (1)$$

рівняннями Коші

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad (x, y) \in \mathcal{H}, \quad (2)$$

та фізичними співвідношеннями Дюгамеля – Неймана у рамках гіпотези плоскої деформації

$$\begin{aligned} E\varepsilon_{xx} &= \sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \alpha ET, & \sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{xx}) - \alpha ET, \\ E\varepsilon_{yy} &= \sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) + \alpha ET, & G\varepsilon_{xy} &= \sigma_{xy}, \end{aligned} \quad (x, y) \in \mathcal{H}. \quad (3)$$

Тут  $\sigma_{\xi\eta}$ ,  $\varepsilon_{\xi\eta}$  – нормальні ( $\xi = \eta$ ) та дотичні ( $\xi \neq \eta$ ) планарні компоненти симетричних тензорів напружень та деформацій,  $\{\xi, \eta\} = \{x, y\}$ ,  $u_x$  та  $u_y$  – пружні переміщення в напрямках осей  $Ox$  та  $Oy$  відповідно,  $E$  – модуль пружності,  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона,  $G = E / (2 + 2\nu)$  – модуль зсуву,  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного теплового розширення,  $T = T(x, y)$  – температурне поле, яке визначається з відповідної задачі теплопровідності. Наприклад, задача теплопровідності може описуватись класичним рівнянням

$$\Delta T = 0, \quad (x, y) \in H, \quad (4)$$

де  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ , з відповідною крайовою умовою при  $y = 0$  та умовою згасання температури при  $y \rightarrow +\infty$  [19].

На межі  $y = 0$  півплощини задано крайові умови для компонент тензора напружень

$$\sigma_{yy}(x, 0) = -p(x), \quad \sigma_{xy}(x, 0) = q(x), \quad (5)$$

де функції повинні задовольняти необхідні умови статичної рівноваги [19]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) dx = 0. \quad (6)$$

Крім того, вважаємо, що усі функції, залежні від координати  $y$ , згасають при  $y \rightarrow +\infty$ .

Вважаючи, що функції у правих частинах формул (5) є наперед невідомими, визначимо їх з умови забезпечення цільових переміщень на межі області за дії температурного поля  $T$ .

**2. Вирази для термонапружень.** Для встановлення формальних залежностей компонент тензора напружень від температурного поля  $T(x, y)$  та невідомих функцій  $p(x)$  і  $q(x)$  застосуємо інтегральне перетворення Фур'є [5]

$$\bar{f} = \int_{-\infty}^{+\infty} f \exp(-isx) dx, \quad i^2 = -1, \quad (7)$$

де  $f$  – довільна функція. У просторі перетворення (7) залежності, які задовольняють рівняння (1) – (3) та умови (5), знайдено в [19] у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} = & - \left( (1 - |s|y)\bar{p} + i \left( 2 \frac{|s|}{s} - sy \right) \bar{q} \right) \exp(-|s|y) - \\ & - \frac{\alpha E}{1 - \nu} \left( \bar{T}(y) - \frac{|s|}{2} \int_0^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left( (3 - 2|s|y) \exp(-|s|(y + \xi)) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \exp(-|s||y - \xi|) \right) d\xi \right), \\ \bar{\sigma}_{yy} = & - \left( (1 + |s|y)\bar{p} + isy\bar{q} \right) \exp(-|s|y) + \\ & + \frac{\alpha E |s|}{2(1 - \nu)} \int_0^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left( (1 + 2|s|y) \exp(-|s|(y + \xi)) - \right. \\ & \left. - \exp(-|s||y - \xi|) \right) d\xi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xy} &= (isy\bar{p} + (1 - |s|y)\bar{q}) \exp(-|s|y) + \\
&\quad + \frac{\alpha E is}{2(1-\nu)} \int_0^{+\infty} \bar{T}(\xi) \left( (1 - 2|s|y) \exp(-|s|(y + \xi)) + \right. \\
&\quad \left. + \exp(-|s||y - \xi|) \operatorname{sgn}(y - \xi) \right) d\xi, \\
\bar{\sigma} &= -2 \left( \bar{p} + i \frac{|s|}{s} \bar{q} \right) \exp(-|s|y) - \\
&\quad - \frac{\alpha E}{1-\nu} \left( \bar{T} - 2|s| \int_0^{+\infty} \bar{T} \exp(-|s|(y + \xi)) d\xi \right), \tag{8}
\end{aligned}$$

де  $\bar{\sigma}$  – зображення у просторі перетворення (7) сумарних планарних напружень

$$\sigma = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}.$$

Формули (8) дають можливість визначити компоненти тензора напружень через силові навантаження на межі (5) та температурне поле. Якщо визначити останнє на основі рівняння (4) у просторі інтегрального перетворення (7) за умови згасання при  $y \rightarrow +\infty$ , отримуємо вираз

$$\bar{T}(y) = \bar{T}(0) \exp(-|s|y), \tag{9}$$

де  $\bar{T}(0) = \bar{T}(0; s)$  – невідома функція, яку можна визначити з використанням температурної умови на межі  $y = 0$ .

Нескладно переконатися, що температурне поле (9) не спричинює термонапружень, тому вирази (8) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx} &= - \left( (1 - |s|y)\bar{p} + i \left( 2 \frac{|s|}{s} - sy \right) \bar{q} \right) \exp(-|s|y), \\
\bar{\sigma}_{yy} &= - \left( (1 + |s|y)\bar{p} + isy\bar{q} \right) \exp(-|s|y), \\
\bar{\sigma}_{xy} &= (isy\bar{p} + (1 - |s|y)\bar{q}) \exp(-|s|y), \\
\bar{\sigma} &= -2 \left( \bar{p} + i \frac{|s|}{s} \bar{q} \right) \exp(-|s|y). \tag{10}
\end{aligned}$$

**3. Визначення пружних переміщень.** На відміну від термонапружень (10), які не залежать від температурного поля (9), пружні переміщення у півплощині  $\mathcal{H}$  є залежними від цього температурного поля. Для встановлення цих залежностей використаємо методику [22] інтегрування рівнянь Коші (2) у просторі інтегрального перетворення (7). У результаті знаходимо вирази

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x(y) &= -\frac{i}{s} \bar{\varepsilon}_{xx}(y), \\
\bar{u}_y(y) &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \bar{\varepsilon}_{yy}(\eta) (\operatorname{sgn}(y - \eta) - 1) d\eta = - \int_y^{+\infty} \bar{\varepsilon}_{yy}(\eta) d\eta. \tag{11}
\end{aligned}$$

Використаємо фізичні співвідношення (3) у просторі перетворення (7), які з урахуванням виразів (8) та (9) дають змогу визначити деформації через зовнішні зусилля та температурне поле:

$$\bar{\varepsilon}_{xx}(y) = \frac{1}{2G} \left( (2\nu - 1 + |s|y)\bar{p} + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + is \left( y - 2 \frac{1-\nu}{|s|} \right) \bar{q} + \alpha E \bar{T}(0) \Big) \exp(-|s|y), \\
\bar{\varepsilon}_{yy}(y) &= \frac{1}{2G} \left( (2\nu - 1 - |s|y) \bar{p} - is \left( y - \frac{2\nu}{|s|} \right) \bar{q} + \alpha E \bar{T}(0) \right) \exp(-|s|y), \\
\bar{\varepsilon}_{xy}(y) &= \frac{1}{G} (isy \bar{p} + (1 - |s|y) \bar{q}) \exp(-|s|y). \tag{12}
\end{aligned}$$

Підставивши (12) в (11), знайдемо переміщення у вигляді

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x(y) &= \left( i(1 - 2\nu - |s|y) \bar{p} - \right. \\
& \quad \left. - \frac{|s|}{s} (2(1 - \nu) - |s|y) \bar{q} - i\alpha E \bar{T}(0) \right) \frac{\exp(-|s|y)}{2sG}, \\
\bar{u}_y(y) &= \left( (2(1 - \nu) + |s|y) \bar{p} + \right. \\
& \quad \left. + i \frac{|s|}{s} (1 - 2\nu + |s|y) \bar{q} - \alpha E \bar{T}(0) \right) \frac{\exp(-|s|y)}{2|s|G}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Вирази (13) описують залежність пружних переміщень у півплощині  $\mathcal{H}$  від функцій  $p$ ,  $q$  та температурного поля (9).

Зауважимо, що образ третього рівняння (2) у просторі перетворення (7) має вигляд

$$\bar{\varepsilon}_{xy}(y) = is \bar{u}_y(y) + \frac{d\bar{u}_x(y)}{dy}.$$

Нескладно переконатися, що вирази (13) разом із третьою формулою (12) тотожно задовольняють це рівняння.

**4. Забезпечення цільових переміщень на межі півплощини.** Поклавши  $y = 0$  у (13), отримаємо зв'язок між переміщеннями та силовими і тепловими навантаженнями межі пружної півплощини

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x(0) &= \frac{i}{2sG} \left( (1 - 2\nu) \bar{p} + 2i \frac{|s|}{s} (1 - \nu) \bar{q} - \alpha E \bar{T}(0) \right), \\
\bar{u}_y(0) &= \frac{1}{2|s|G} \left( 2(1 - \nu) \bar{p} + i \frac{|s|}{s} (1 - 2\nu) \bar{q} - \alpha E \bar{T}(0) \right). \tag{14}
\end{aligned}$$

Задавши у цих виразах потрібні значення переміщень межі, наприклад  $\bar{u}_x(0) = \bar{u}_y(0) = 0$ , можна виразити значення силових навантажень  $\bar{p}$  та  $\bar{q}$  через температурне поле на межі.

Наприклад, у розглянутому випадку відсутності переміщень на межі півплощини з (14) отримаємо вирази

$$\bar{p} = \frac{\alpha E}{3 - 4\nu} \bar{T}(0), \quad \bar{q} = -i \frac{s}{|s|} \frac{\alpha E}{3 - 4\nu} \bar{T}(0). \tag{15}$$

У цьому випадку маємо такі вирази для переміщень та напружень:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x(y) &= -2\alpha i \frac{1 + \nu}{3 - 4\nu} \bar{T}(0) \frac{|s|}{s} y \exp(-|s|y), \quad u_x^*(x, y) = \frac{3 - 4\nu}{(1 + \nu)\alpha} u_x(x, y), \\
\bar{u}_y(y) &= 2\alpha \frac{1 + \nu}{3 - 4\nu} \bar{T}(0) y \exp(-|s|y),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx} &= -(3 - 2|s|y) \frac{\alpha E}{3 - 4\nu} \bar{T}(0) \exp(-|s|y), \\
\bar{\sigma}_{yy} &= -(1 + 2|s|y) \frac{\alpha E}{3 - 4\nu} \bar{T}(0) \exp(-|s|y), \\
\bar{\sigma}_{xy} &= -i \left( \frac{|s|}{s} - 2sy \right) \frac{\alpha E}{3 - 4\nu} \bar{T}(0) \exp(-|s|y).
\end{aligned} \tag{16}$$

Застосувавши до виразів (15) обернене інтегральне перетворення

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f} \exp(isx) ds, \tag{17}$$

отримаємо профілі розподілу зовнішніх зусиль на поверхні  $y = 0$ , які потрібно прикласти для нівелювання переміщень на цій межі, спричинених розподілом температурного поля (9). Відповідно застосування (17) до виразів (16) дає можливість визначити розподіли переміщень і напружень у фізичній області.

**5. Числові результати.** Розглянемо випадок, коли зовнішні навантаження (5) задано у вигляді

$$p(x) = \begin{cases} p^*, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad q(x) = 0, \quad p^* = \text{const}, \tag{18}$$

а крайова умова для температурної задачі має вигляд

$$T(x, 0) = \begin{cases} T^*, & |x| \leq a, \\ 0, & |x| > a, \end{cases} \quad T^* = \text{const}. \tag{19}$$

Тут  $a$  – безрозмірний параметр. Зауважимо, що силові навантаження (17) не задовольняють інтегральні умови (6) за головним вектором. Це означає, що півплощину слід додатково навантажити у безмежно віддалених точках  $y \rightarrow +\infty$  рівномірно розподіленими зусиллями з результуючим значенням  $2ap^*$ . Аналогічне зауваження можна зробити стосовно температурної крайової умови (19) та умов «теплової рівноваги» [19].

Запишемо вирази (18), (19) у просторі перетворення (7):

$$\bar{p} = p^* \frac{\sin(sa)}{s}, \quad \bar{q} = 0, \quad \bar{T}(0) = T^* \frac{\sin(sa)}{s}. \tag{20}$$

З урахуванням (20) напруження (10) набувають вигляду

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{xx} &= -\frac{1 - |s|y}{s} p^* \sin(sa) \exp(-|s|y), \\
\bar{\sigma}_{yy} &= -\frac{1 + |s|y}{s} p^* \sin(sa) \exp(-|s|y), \\
\bar{\sigma}_{xy} &= iyp^* \sin(sa) \exp(-|s|y),
\end{aligned} \tag{21}$$

а переміщення (13) описуються формулами

$$\begin{aligned}
\bar{u}_x(y) &= \left( i(1 - 2\nu - |s|y)p^* - i\alpha ET^* \right) \frac{\sin(sa)}{2s^2 G} \exp(-|s|y), \\
\bar{u}_y(y) &= \left( (2(1 - \nu) + |s|y)p^* - \alpha ET^* \right) \frac{\sin(sa)}{2s|s|G} \exp(-|s|y).
\end{aligned} \tag{22}$$

Розглянемо можливість забезпечення відсутності вертикальних переміщень на межі області, тобто  $\bar{u}_y(0) = 0$ . У цьому випадку на основі другої рівності (22) отримаємо умову

$$p^* = \frac{\alpha E}{2(1-\nu)} T^* . \quad (23)$$

Отже, якщо силове навантаження (18) визначається формулою (23) за заданими параметрами температурного навантаження (19), то межа півплощини  $y = 0$  не зазнаватиме вертикального переміщення. У цьому випадку компоненти переміщень (22) мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{u}_x(y) &= -i\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T^* \frac{1+|s|y}{2s^2} \sin(sa) \exp(-|s|y), \\ \bar{u}_y(y) &= \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T^* \frac{y}{2s} \sin(sa) \exp(-|s|y). \end{aligned} \quad (24)$$

Нескладно записати й напруження (21) з урахуванням (23).

Цікавим є розподіл горизонтальних переміщень на межі півплощини. З першого виразу (24) отримуємо у просторі перетворення (7)

$$\bar{u}_x(0) = -i \frac{\alpha}{2} \frac{1+\nu}{1-\nu} T^* \frac{\sin(sa)}{s^2},$$

звідки за допомогою оберненого перетворення (17) знаходимо вираз

$$u_x(x, 0) = \frac{\alpha}{4} \frac{1+\nu}{1-\nu} T^* \left( (a+x)H(a+x) - (a-x)H(a-x) - x \right), \quad (25)$$

де  $H(x)$  – функція Гевісайда.

На рис. 1 наведено розподіл безрозмірних горизонтальних переміщень  $u_x^*(x, 0) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{u_x(x, 0)}{\alpha T^*}$ , розрахованих за формулою (25) для різних значень параметра  $a$ . Незважаючи на відсутність дотичних зусиль на межі згідно з умовами (18), ці переміщення описують розтяг межі у протилежних напрямках, який є сталим на проміжках  $|x| > a$  та лінійним при  $|x| \leq a$ .

На рис. 2 наведено розподіли у площині  $\mathcal{H}$  переміщень

$$u_\xi^*(x, y) = \frac{1}{\alpha T^*} \frac{1-\nu}{1+\nu} u_\xi(x, y),$$

температурного поля (9), (20) у фізичному просторі оберненого перетворення (17) та напружень

$$\sigma_{\xi\eta}^*(x, y) = \frac{1-\nu}{\alpha E T^*} \sigma_{\xi\eta}(x, y),$$

де  $\xi, \eta = x, y$ , вирази для  $u_x(x, y)$  та  $u_y(x, y)$  отримано шляхом застосування оберненого перетворення (17) до виразів (22), причому образ вертикальних переміщень у фізичній області знайдено у явному вигляді

$$u_y(x, y) = \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T^* \frac{y}{4\pi} \left( \arctg \frac{x+a}{y} - \arctg \frac{x-a}{y} \right),$$

а напруження  $\sigma_{xx}(x, y)$ ,  $\sigma_{yy}(x, y)$  та  $\sigma_{xy}(x, y)$  є прообразами (17) виразів (21). Горизонтальні переміщення  $u_x(x, y)$  є непарною функцією  $x$  і мають на межі розподіл (25), проілюстрований на рис. 1. Як зазначалося, вертикальне переміщення є нульовим на межі області. Однак з віддаленням від

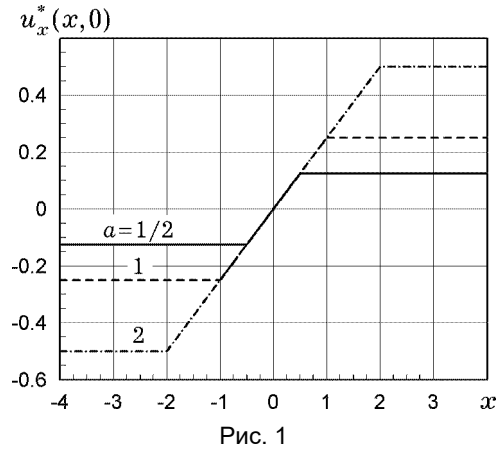


Рис. 1

межі ці переміщення зростають, що проілюстровано окремо на рис. 3. Таке зростання пояснюється неузгодженням (18) з умовами (6).

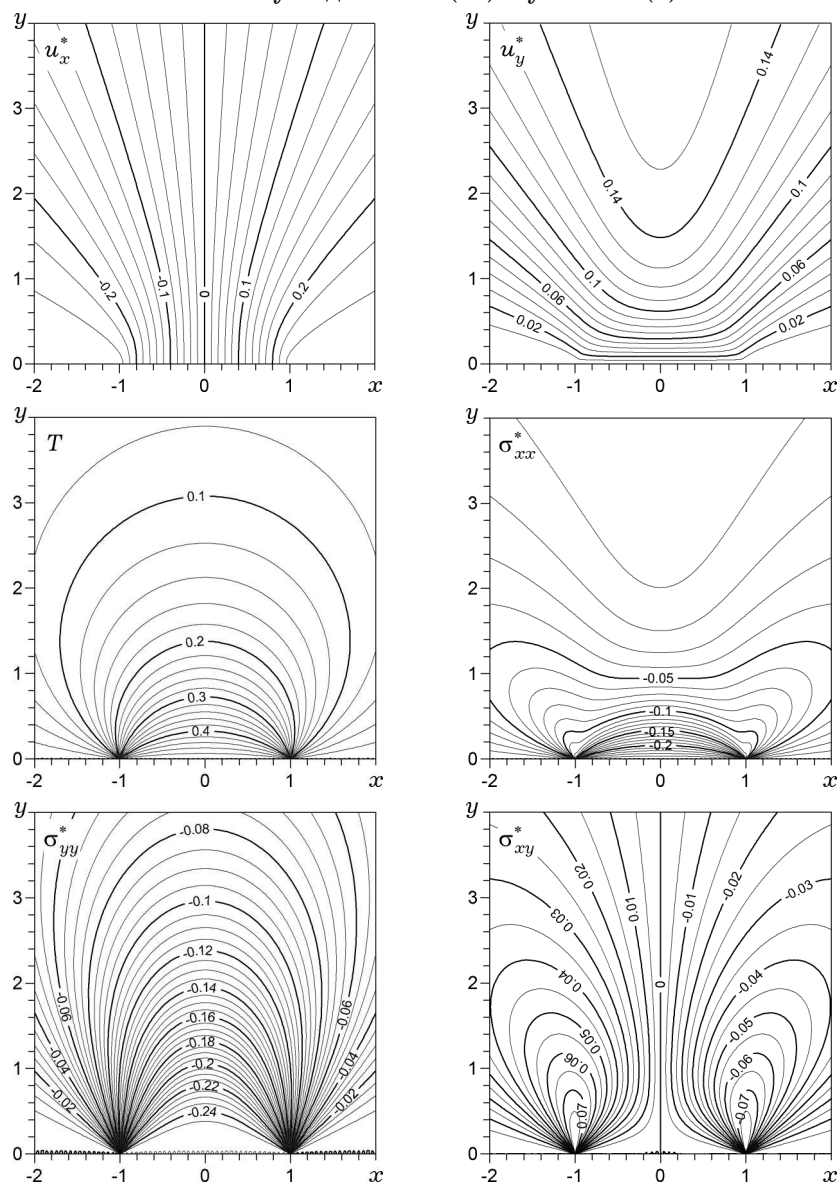


Рис. 2

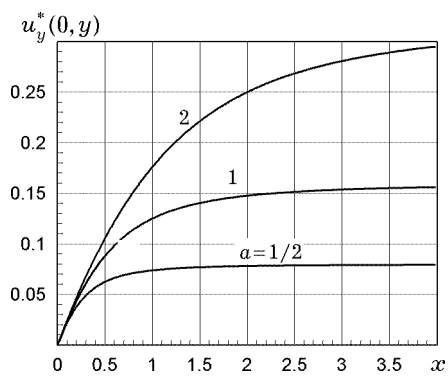


Рис. 3

Зауважимо, що крайові умови (18), (19) є розривними функціями координати  $x$ , що спричинює злами у розподілі горизонтальних переміщень на межі області у точках розриву  $x = \pm a$  (рис. 1). Розглянемо подібні до (18), (19) профілі розподілу крайових умов

$$\{p(x), T(x, 0)\} = \{p^*, T^*\} \exp(-ax^2), \quad q(x) = 0, \quad (26)$$

які є гладкими функціями  $x$ . У просторі перетворення (7) функції (26) набудуть вигляду

$$\{\bar{p}, \bar{T}(0)\} = \{p^*, T^*\} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{s^2}{4a}\right).$$

Відповідно на межі області  $y = 0$  переміщення (13) запишуться у вигляді:

$$\bar{u}_x(0) = \frac{i}{2sG} \left( (1 - 2\nu)p^* - \alpha ET^* \right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{s^2}{4a}\right),$$

$$\bar{u}_y(0) = \frac{1}{2|s|G} \left( 2(1 - \nu)p^* - \alpha ET^* \right) \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{s^2}{4a}\right),$$

звідки на основі вимоги відсутності вертикальних переміщень межі  $\bar{u}_y(0) = 0$  отримаємо виконання рівності (23). Тоді

$$\bar{u}_x(0) = -i \frac{\alpha}{2s} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} T^* \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{s^2}{4a}\right),$$

звідки

$$u_x(x, 0) = \alpha \frac{1 + \nu}{1 - \nu} T^* \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\operatorname{erf}(\sqrt{ax})}{4} \quad (27)$$

у фізичному просторі оберненого перетворення (17). Розподіл переміщень (27) наведено на рис. 4. На відміну від графіків на рис. 1, ці переміщення є гладкими. Поведінка переміщень та напружень у випадку навантажень (26) є якісно такою самою, як на рис. 2, за винятком області поблизу навантаженої ділянки межі.

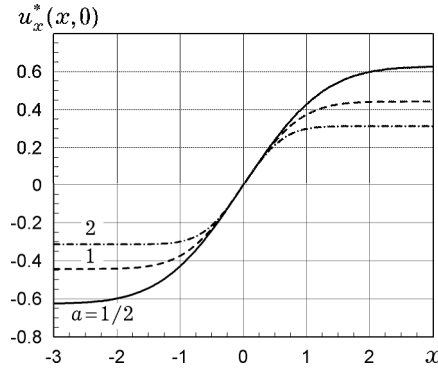


Рис. 4

Розглянемо випадок, коли силові навантаження (5) є невідомими, а крайова умова для температурного поля має вигляд

$$\begin{aligned} T(x, y) = T_1 = \text{const} \quad \text{при} \quad |x| \leq a, \quad y = 0, \\ \lambda \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = \chi T(x, y) \quad \text{при} \quad |x| > a, \quad y = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Тут  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\chi$  – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні  $y = 0$ . Умови (28) описують випадок дії на поверхню  $y = 0$  півплощини

$\mathcal{H}$  нагрітого до температури  $T_1$  штампа, за межами якого на цій поверхні відбувається теплообмін із зовнішнім середовищем. Ставимо за мету визначення таких профілів зовнішніх зусиль  $p$  і  $q$ , щоб переміщення на межі півплощини були нульовими.

На основі умов (28) сформуємо таку крайову умову для температури:

$$T(x, 0) = \begin{cases} T_1, & |x| \leq a, \\ \beta \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} \Big|_{y=0}, & |x| > a. \end{cases} \quad (29)$$

де  $\beta = \lambda/\chi$ .

Застосувавши до виразу (9) обернене перетворення (17) та підставивши в умову (29), запишемо отриману рівність у просторі перетворення (7). У результаті отримаємо таке інтегральне рівняння

$$(1 + \beta |s|) \bar{T}(0) - \frac{\beta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{s}| \bar{T}(0) \frac{\sin((s - \bar{s})a)}{s - \bar{s}} d\bar{s} = 2T_1 \frac{\sin(sa)}{s}. \quad (30)$$

Отримане рівняння розв'яжемо чисельно з використанням квадратурної формули прямокутників, замінивши безмежний проміжок інтегрування скінченним інтервалом  $[-S, S]$ , на якому запроваджено рівномірне розбиття  $s_n = -S + hn$ , де  $h = 2S/N$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  – кількість вузлів. Тоді рівняння (30) зводиться до системи  $N$  лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned} (1 + \beta |s_m|) \bar{T}_m - \frac{\beta h}{\pi} \sum_{n=1}^N |s_n| \bar{T}_n \frac{\sin((s_m - s_n)a)}{s_m - s_n} &= \\ &= 2T_1 \frac{\sin(s_m a)}{s_m}, \quad m = 1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

для відшукування невідомих величин  $\bar{T}_m = \bar{T}(0)|_{s=s_m}$ . Запишемо це рівняння у матричному вигляді

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{L}, \quad (31)$$

де  $\mathbf{Q} = \{Q_{nm}\}_{m,n=1,2,\dots,N}$ ,  $\mathbf{A} = \{\bar{T}_m\}_{m=1,2,\dots,N}$ ,  $\mathbf{L} = \{L_m\}_{m=1,2,\dots,N}$ ,

$$Q_{nm} = \begin{cases} -\frac{\beta h}{\pi} |s_n| \frac{\sin((s_m - s_n)a)}{s_m - s_n}, & n \neq m, \\ 1 + \beta |s_n| (1 - ha/\pi), & n = m, \end{cases}$$

$$L_m = 2T_1 \begin{cases} \frac{\sin(s_m a)}{s_m}, & s_m \neq 0, \\ a, & s_m = 0. \end{cases}$$

У результаті розв'язання системи (31) отримаємо набір значень  $\bar{T}_m = \bar{T}(0)|_{s=s_m}$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ , підстановка яких у (9) дає змогу обчислити дискретні значення образу у просторі перетворення (7) температурного поля, яке задовольняє крайові умови (28). З використанням обчисленого у такий спосіб температурного поля встановимо умови відсутності переміщень на межі  $y = 0$  півплощини  $\mathcal{H}$ . З використанням умов (15) встановимо дискретні значення  $\bar{p}_m$  та  $\bar{q}_m$ , які відповідають знайденим  $\bar{T}_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, N$ , а також на основі (16) обчислимо значення компонент вектора переміщень та тензора напружень. Для визначення відповідних

величин у фізичному просторі застосовуємо до отриманих дискретних значень обернене перетворення (17).

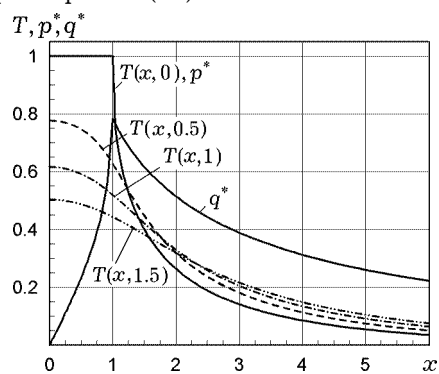


Рис. 5

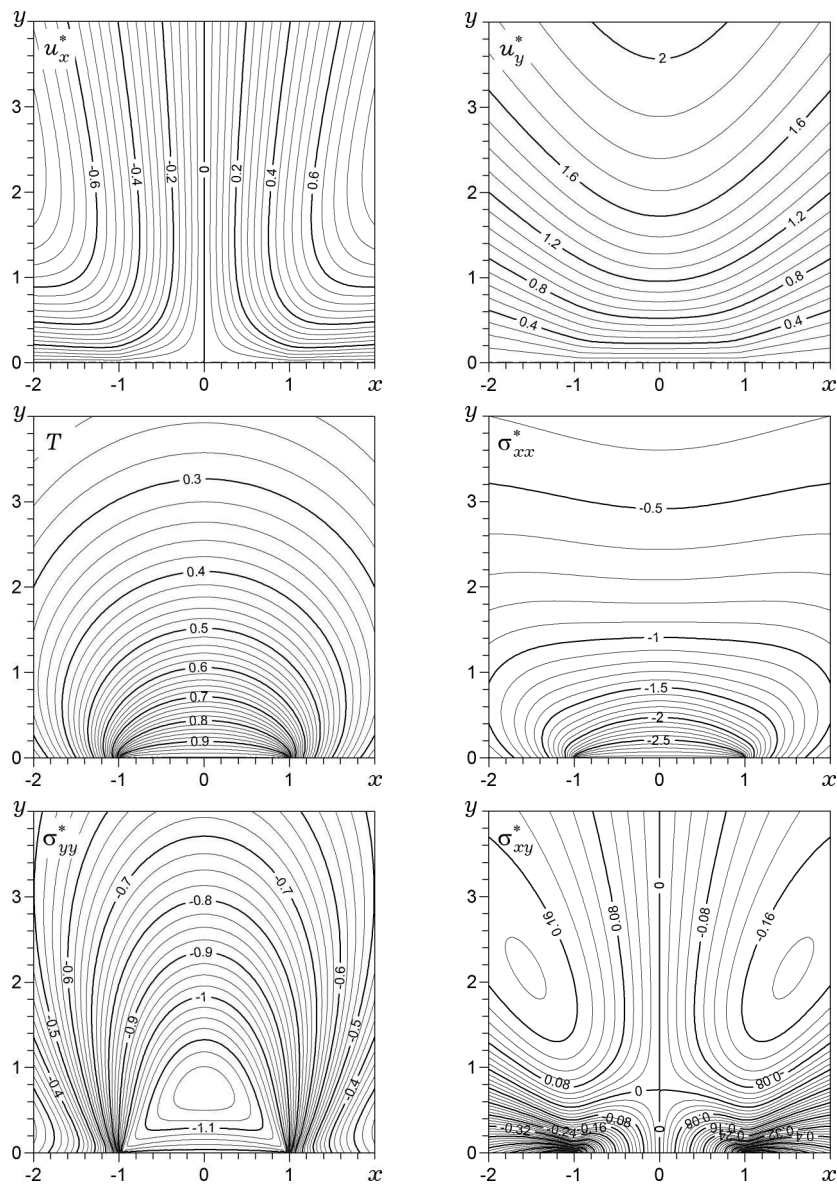


Рис. 6

На рис. 5 наведено обчислені для  $ZrO_2$  ( $\beta = \lambda = 1.71 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{К})$ ) розподіли температури, віднесеної до  $T_1$ , на межі області  $T(x, 0)$  та у перерізах  $y = 0.5, 1.0, 1.5$ , а також зусиль  $\{p^*, q^*\} = \frac{3-4\nu}{\alpha E} \{p, q\}$ , які забезпечують відсутність переміщень на межі області. У проміжку  $|x| \leq a = 1$  температурне поле на межі дорівнює сталому значенню і згасає поза цим інтервалом з віддаленням від нагрітої ділянки межі внаслідок теплообміну із зовнішнім середовищем. Із віддаленням від межі півплощини злам розподілу температури при «перемиканні» крайових умов (28) згладжується, а сама температура поволі згасає. Реактивні зусилля  $p$  повторюють профіль розподілу температури на межі, а зусилля  $q$  є непарною функцією горизонтальної координати, яка згасає з віддаленням від нагрітої ділянки межі. Лінії рівня для переміщень  $u_\xi^* = (3 - 4\nu)u_\xi / (1 + \nu)$ , температури та напружень  $\sigma_{\xi\eta}^* = (3 - 4\nu)\sigma_{\xi\eta} / (\alpha E)$ ,  $\xi, \eta = x, y$ , показано на рис. 6.

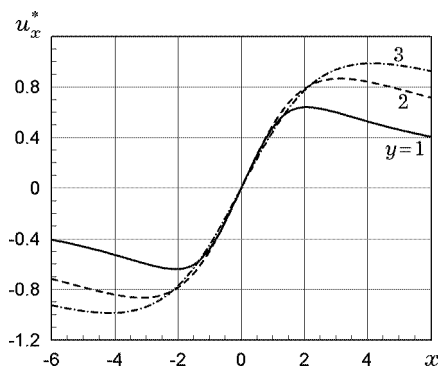


Рис. 7

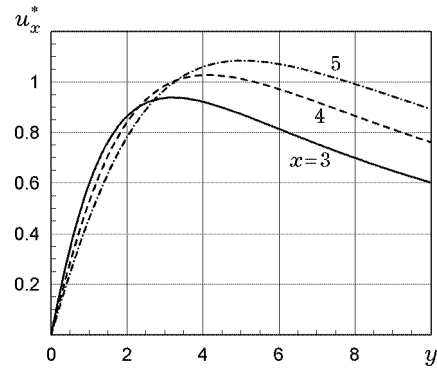


Рис. 8

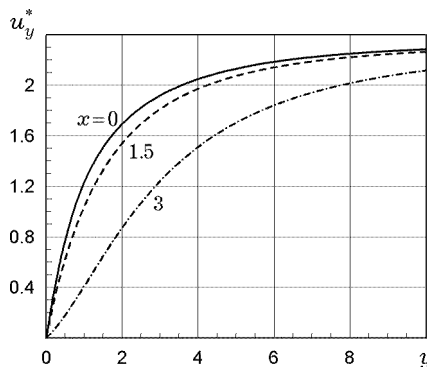


Рис. 9

На рис. 7, рис. 8 наведено розподіли переміщень  $u_x^*$  у деяких поперечних перерізах у глибині півплощини  $\mathcal{H}$  відповідно при  $y = 1, 2, 3$  та  $x = 3, 4, 5$ , а на рис. 9 наведено переміщення  $u_y^*$  у перерізах  $x = 0.0, 1.5, 3.0$ . Незважаючи на те, що на межі області переміщення відсутні, вони мають певні відмінні від нуля розподіли в області внаслідок нагрівання відповідно до умов (28).

**Висновки.** Побудовані з використанням методу безпосереднього інтегрування явні розв'язки плоских задач теорії пружності та термопружності є зручними для встановлення зв'язків між силовими та тепловими факторами навантаження з метою забезпечення цільових розподілів компонент

вектора напружень на межі області. У статті для пружної півплощини встановлено такі зв'язки між заданим на межі температурним полем та притискним і дотичним силовими навантаженнями.

Слід зауважити, що можливості забезпечення розрахованих профілів розподілу зовнішніх силових навантажень є доволі обмеженими, оскільки на практиці мають забезпечуватися з використанням тих самих інденторів, які реалізують нагрівання. Метою подальших досліджень буде встановити співвідношення між силовими та тепловими факторами навантажень із урахуванням конструкційних обмежень на характер їхнього прикладання. Іншим напрямком розвитку досліджень є розв'язання цього підходу для використання у випадку неоднорідних деформівних твердих тіл.

1. Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В. 5 т. – Т. 5.
2. Barber J. R. Indentation of an elastic half-space by a cooled flat punch // Q. J. Mech. Appl. Math. – 1982. – **35**, No. 1. – P. 141–154.  
– <https://doi.org/10.1093/qjmam/35.1.141>.
3. Barber J. R. The effect of thermal distortion on constriction resistance // Int. J. Heat Mass Tran. – 1971. – **14**, No. 6. – P. 751–766.  
– [https://doi.org/10.1016/0017-9310\(71\)90105-0](https://doi.org/10.1016/0017-9310(71)90105-0).
4. Barber J. R. Distortion of the semi-infinite solid due to transient surface heating // Int. J. Mech. Sci. – 1972. – **14**, No. 6. – P. 377–393.  
– [https://doi.org/10.1016/0020-7403\(72\)90080-X](https://doi.org/10.1016/0020-7403(72)90080-X).
5. Brychkov Y. A., Prudnikov A. P. Integral transforms of generalized functions. – New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1989. – 344 p.
6. Burton R. A. Thermal deformation in frictionally heated contact // Wear. – 1980. – **59**, No. 1. – P. 1–20. – [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(80\)90266-5](https://doi.org/10.1016/0043-1648(80)90266-5).
7. Comninou M., Barber J. R., Dundurs J. Heat conduction through a flat punch // ASME. J. Appl. Mech. – 1981. – **48**, No. 4. – P. 871–875.  
– <https://doi.org/10.1115/1.3157748>.
8. Gmelin E., Asen-Palmer M., Reuther M., Villar R. Thermal boundary resistance of mechanical contacts between solids at sub-ambient temperatures // J. Phys. D. Appl. Phys. – 1999. – **32**, No. 6. – R19.  
– <https://doi.org/10.1088/0022-3727/32/6/004>.
9. Karapetian E., Kalinin S. V. Indentation of a punch with chemical or heat distribution at its base into transversely isotropic half-space: Application to local thermal and electrochemical probes // J. Appl. Phys. – 2013. – **113**, No. 18. – Art. No. 187201. – <https://doi.org/10.1063/1.4802097>.
10. Kennedy F. E., Jr. Thermal and thermomechanical effects in dry sliding // Wear. – 1984. – **100**, Nos. 1–3. – P. 453–476.  
– [https://doi.org/10.1016/0043-1648\(84\)90026-7](https://doi.org/10.1016/0043-1648(84)90026-7).
11. Kushnir R., Yasinskyi A., Tokovyy Yu., Hart E. Inverse thermoelastic analysis of a cylindrical tribo-couple // Materials. – 2021. – **14**, No. 10. – Art. No. 2657.  
– <https://doi.org/10.3390/ma14102657>.
12. Li J., Li J.-F., Yu Q., Chen Q. N., Xie S. Strain-based scanning probe microscopies for functional materials, biological structures, and electrochemical systems // J. Materiomics. – 2015. – **1**, No. 1. – P. 3–21.  
– <https://doi.org/10.1016/j.jmat.2015.03.001>.
13. Lin Y., Ovaert T. C. Indentation of an anisotropic half-space by a heated flat punch // ASME. J. Appl. Mech. – 2004. – **71**, No. 2. – P. 266–272.  
– <https://doi.org/10.1115/1.1683732>.
14. Maugin G. A. The thermomechanics of plasticity and fracture. – Cambridge – New York: Cambridge Univ. Press, 1992. – xx+350 p.
15. Meyer E., Bennewitz R., Hug H. J. Scanning probe microscopy: the lab on a tip. – Cham: Springer, 2021. – xiv+322 p. – <https://doi.org/10.1007/978-3-030-37089-3>.
16. Noda H. Thermoelastic instability on a frictional surface and its implication for size effect in friction experiments // Earth Planets Space. – 2023. – **75**. – Art. No. 71.  
– <https://doi.org/10.1186/s40623-023-01820-9>.
17. Parkus H. Thermoelasticity. – Vienna: Springer, 2012. – 120 p.

18. *Perkowski D. M., Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S. J., Tokovyy Y. V.* Thermal surface deflection of a medium with multilayer coatings // *Int. J. Mech. Sci.* – 2025. – **287**. – Art. No. 109984. – <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2025.109984>.
19. *Rychahivskyy A. V., Tokovyy Yu. V.* Correct analytical solutions to the thermoelasticity problems in a semi-plane // *J. Thermal Stresses.* – 2008. – **31**, No. 11. – P. 1125–1145. – <https://doi.org/10.1080/01495730802250854>.
20. *Sadd M. H.* Elasticity. Theory, applications, and numerics. – Amsterdam: Elsevier, 2014. – 600 p.
21. *Shen Y. C., Weng C. I.* Deformation control of laminated composite plates containing piezoelectric layers under thermal loading // *J. Thermal Stresses.* – 1995. – **18**, No. 4. – P. 449–464. – <https://doi.org/10.1080/01495739508946313>.
22. *Tokovyy Yu., Ma C.-C.* Steady-state heat transfer and thermo-elastic analysis of inhomogeneous semi-infinite solids / in *Vikhrenko V. S. (ed.) Heat Conduction – Basic Research.* – Rijeka: InTech, 2011. – P. 249–268. – <https://doi.org/10.5772/28011>.
23. *Yang J., Jin X.* Indentation of a flat circular punch with uniform heat flux at its base into transversely isotropic magneto-electro-thermo-elastic half space // *J. Appl. Phys.* – 2014. – **115**, No. 8. – Art. No. 083516. – <https://doi.org/10.1063/1.4866684>.
24. *Zisis Th., Gourgiotis P. A., Dal Corso F.* A contact problem in couple stress thermoelasticity: the indentation by a hot flat punch // *Int. J. Solids Struct.* – 2015. – **63**. – P. 226–239. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.03.002>.

#### ENSURING TARGETED DISPLACEMENTS OF THE ELASTIC HALF-PLANE BOUNDARY UNDER A STEADY-STATE TEMPERATURE FIELD USING FORCE LOADING

*By using the analytical solutions to the plane elasticity and thermoelasticity problems for a half-plane, which have been constructed in a form of explicit functional dependencies on the loadings through the use of the direct integration method, the one-to-one relationship between the force and thermal loadings are obtained for ensuring the targeted displacements of the boundary. In particular, the interrelation between the distribution profiles of the thermal surface loading inducing thermal expansion, and the compressive loading, which excites displacements that partially compensate the thermal ones, is derived. Some examples of such loadings are analyzed.*

**Key words:** *half-plane, elasticity, thermoelasticity, thermal deformation, compressive loading, targeted displacements, direct integration method.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
15.02.24