

ВИЗНАЧЕННЯ НЕСТАЦІОНАРНОГО ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ БАГАТОШАРОВОЇ ПЛИТИ ЗА НЕЛІНІЙНИХ МЕЖОВИХ УМОВ

Запропоновано методики визначення одновимірного нестационарного температурного поля багатошарової плити за нелінійних межових умов. Вони передбачають інтегральне подання розв'язку задачі теплопровідності за допомогою функції Гріна для багатошарової плити, використання узагальнених функцій і лінійних сплайнів та відповідний спосіб знаходження інтегральних залежностей від температур на межі. Наведено результати числових досліджень нестационарного температурного поля у п'ятишаровій плиті за нагріву плоским джерелом тепла сталої інтенсивності, зосередженим на одній із поверхонь поділу шарів. Виконано порівняння температур, обчислених з використанням цих методик.

Ключові слова: шарувата плита, теплове випромінювання, нелінійна нестационарна задача теплопровідності, функція Гріна, узагальнені функції, лінійні сплайни.

В інженерній практиці часто виникає потреба у дослідженні теплового стану елементів конструкцій за опису впливу на них навколишнього середовища нелінійними співвідношеннями, наприклад, умовами конвективно-променевого теплообміну. Для розв'язання відповідних задач теплопровідності широко використовують аналітично-числові методики, які для одношарових тіл наведено, зокрема, в працях [1–4, 6, 7, 15]. Вони ґрунтуються на використанні методів функції Гріна, малого параметра, послідовних наближень та ін. Для тіл із багатошаровими тонкими покриттями запропоновано методики [11, 12], які передбачають розв'язання відповідних крайових задач із узагальненими межовими умовами. Методи розв'язання задач теплопровідності з нелінійними межовими умовами для тіл, на товщину шарів яких не накладено обмежень, наведено в [5, 9, 10, 13, 14, 16 та ін.]. Зокрема, у праці [16] для врахування теплового випромінювання розроблено математичну модель із лінеаризованою межевою умовою. У праці [5] умови конвективно-променевого нагрівання замінено умовами конвективного теплообміну, в яких функції, що відіграють роль температур середовищ, залежать від невідомих температур обмежувальних поверхонь і заданих температур середовищ.

Нижче на основі підходів [5, 9] розроблено методики визначення нестационарних температурних полів у багатошарових плитах за врахування внутрішніх джерел тепла, конвективно-променевого охолодження із залежними від температури коефіцієнтами тепловіддачі і ступенями чорноти.

1. Формулювання задачі. Розглянемо плиту, складену з n ідеально контактуючих шарів, кожен з яких займає область $\tilde{z}_{p-1} \leq \tilde{z} \leq \tilde{z}_p$, $p = 1, 2, \dots, n$, $\tilde{z}_0 = 0$, має початкову температуру $t_{p0}(\tilde{z})$ і перебуває під дією джерел тепла із залежною від координати і часу густиною $W_p(\tilde{z}, \tau)$. Через обмежувальні поверхні $\tilde{z} = 0$ і $\tilde{z} = \tilde{z}_n$ відбувається конвективний теплообмін із довкіллям, що має температури $t_{c0}(\tau)$ і $t_{cn}(\tau)$, з коефіцієнтами тепловіддачі $\alpha_0 \alpha_{*0}(t(0, Fo))$ і $\alpha_n \alpha_{*n}(t(\tilde{z}_n, Fo))$ відповідно, а також відведення теплових потоків власного випромінювання згідно із законом Стефана –

[✉] dept19@iapmm.lviv.ua

Больцмана з коефіцієнтами чорноти $\varepsilon_0 \varepsilon_{*0}(t(0, \text{Fo}))$ і $\varepsilon_n \varepsilon_{*n}(t(\tilde{z}_n, \text{Fo}))$. Для знаходження розподілів температур $t_p(\tilde{z}, \tau)$ за сталих коефіцієнтів теплопровідності $\lambda_t^{(p)}$ і об'ємних теплоємностей $c_V^{(p)}$ використовуємо записане у безрозмірних величинах рівняння

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\lambda}_t(z) \frac{\partial \bar{t}}{\partial z} \right] = \bar{c}_V(z) \frac{\partial \bar{t}}{\partial \text{Fo}} - W_t(z, \text{Fo}) \quad (1)$$

і межові та початкову умови

$$\left(\bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial \bar{t}_1}{\partial z} - \text{Bi}_0 \bar{t}_1 \right) \Big|_{z=0} = -\text{Bi}_0 \bar{t}_{c0}(\text{Fo}) + Q_0(\text{Fo}),$$

$$\left(\bar{\lambda}_t^{(n)} \frac{\partial \bar{t}_n}{\partial z} + \text{Bi}_n \bar{t}_n \right) \Big|_{z=z_n} = \text{Bi}_n \bar{t}_{cn}(\text{Fo}) - Q_n(\text{Fo}), \quad (2)$$

$$\bar{t} \Big|_{\text{Fo}=0} = \bar{t}_0(z), \quad (3)$$

де функції $\bar{t}(z, \text{Fo})$, $\bar{t}_0(z)$, $\bar{\lambda}_t(z)$, $\bar{c}_V(z)$ і $\bar{W}_t(z, \text{Fo})$ при $z_{p-1} < z < z_p$ збігаються відповідно з $\bar{t}_p(z, \text{Fo})$, $\bar{t}_{p0}(z)$, $\bar{\lambda}_t^{(p)}$, $\bar{c}_V^{(p)}$ і $\bar{W}_p(z, \text{Fo})$; $\bar{t}_p(z, \text{Fo}) = \frac{t_p(\tilde{z}, \tau)}{t_s}$,

$$\bar{t}_{cj}(\text{Fo}) = \frac{t_{cj}(\tau)}{t_s}, \quad \bar{t}_{p0}(z) = \frac{t_{p0}(\tilde{z})}{t_s}, \quad z = \frac{\tilde{z}}{\ell}, \quad z_p = \frac{\tilde{z}_p}{\ell}, \quad \text{Fo} = \frac{\lambda_t^* \tau}{c_V^* \ell^2}, \quad \bar{\lambda}_t^{(p)} = \frac{\lambda_t^{(p)}}{\lambda_t^*},$$

$$\bar{c}_V^{(p)} = \frac{c_V^{(p)}}{c_V^*}, \quad \bar{W}_p(z, \text{Fo}) = \frac{\ell^2 W_p(\tilde{z}, \tau)}{\lambda_t^* t_s}, \quad T_* = \frac{273}{t_s}, \quad \text{Bi}_j = \frac{\ell \alpha_j}{\lambda_t^*},$$

$$Q_j(\text{Fo}) = \text{Bi}_j (\alpha_{*j} (\bar{t}(z_j, \text{Fo}) - 1) (\bar{t}(z_j, \text{Fo}) - \bar{t}_{cj}(\text{Fo})) + \\ + \text{Sk}_j \varepsilon_{*j} (\bar{t}(z_j, \text{Fo})) (\bar{t}(z_j, \text{Fo}) + T_*)^4),$$

$$\alpha_{*j} (\bar{t}(z_j, \text{Fo})) = \alpha_{*j} (t(\tilde{z}_j, \tau)), \quad \varepsilon_{*j} (\bar{t}(z_j, \text{Fo})) = \varepsilon_{*j} (t(\tilde{z}_j, \tau)),$$

$$\text{Sk}_j = \frac{\ell \varepsilon_j^* \sigma_0}{\lambda_t^*} t_s^3, \quad j = 0, n; \quad z_0 = 0; \quad t_s - \text{характерна для задачі температура}; \quad \ell,$$

λ_t^* і c_V^* - параметри, що мають розмірності одиниці довжини, коефіцієнта теплопровідності і об'ємної теплоємності; σ_0 - стала Стефана - Больцмана.

2. Інтегральне подання розв'язку задачі. З використанням методу функції Гріна подамо розв'язок задачі (1) - (3) у вигляді

$$\bar{t}(z, \text{Fo}) = T_L(z, \text{Fo}) - T_0(z, \text{Fo}) - T_n(z, \text{Fo}). \quad (4)$$

Тут функції $T_L(z, \text{Fo})$ і $T_j(z, \text{Fo})$, $j = 0, n$, виражаються відповідно через інтегральні залежності від заданих теплових чинників (початкової температури, температур середовищ та джерел тепла) і невідомих межових температур:

$$T_L(z, \text{Fo}) = \vartheta_0(z, \text{Fo}) + \text{Bi}_0 t_0^{\text{Bi}}(z, \text{Fo}) + \text{Bi}_n t_n^{\text{Bi}}(z, \text{Fo}) + t_W(z, \text{Fo}),$$

$$\vartheta_0(z, \text{Fo}) = \int_0^{z_n} G(z, \zeta, \text{Fo}) \bar{c}_V(\zeta) t_0(\zeta) d\zeta,$$

$$\begin{aligned}
t_j^{\text{Bi}}(z, \text{Fo}) &= \int_0^{\text{Fo}} G(z, z_j, \text{Fo} - \xi) \bar{t}_{cj}(\xi) d\xi, \\
t_W(z, \text{Fo}) &= \int_0^{\text{Fo}} \int_0^{z_n} G(z, \zeta, \text{Fo} - \xi) w_t(\zeta, \xi) d\zeta d\xi, \\
T_j(z, \text{Fo}) &= \int_0^{\text{Fo}} G(z, z_j, \text{Fo} - \xi) Q_j(\xi) d\xi, \quad j = 0, n.
\end{aligned} \tag{5}$$

Функція Гріна $G(z, \zeta, \text{Fo})$, яка задовольняє рівняння

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{\lambda}_t(z) \frac{\partial G}{\partial z} \right] = \bar{c}_V(z) \frac{\partial G}{\partial \text{Fo}},$$

межові та початкову умови

$$\left(\bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial G}{\partial z} - \text{Bi}_0 G \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \left(\bar{\lambda}_t^{(n)} \frac{\partial G}{\partial z} + \text{Bi}_n G \right) \Big|_{z=z_n} = 0,$$

$$G|_{\text{Fo}=0} = \frac{1}{\bar{c}_V(\zeta)} \delta(z - \zeta),$$

має вигляд

$$G(z, \zeta, \text{Fo}) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(z, \mu_m) \Phi(\zeta, \mu_m)}{N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 \text{Fo}}, \tag{6}$$

де

$$\Phi(z, \mu) = \Phi_1(z, \mu) + \sum_{j=1}^{n-1} (\Phi_{j+1}(z, \mu) - \Phi_j(z, \mu)) S(z - z_j),$$

$$\Phi_1(z, \mu) = \cos \varepsilon_1 z + \frac{\text{Bi}_0}{\bar{\lambda}_t^{(1)} \varepsilon_1} \sin \varepsilon_1 z, \quad \Phi_1'(z, \mu) = -\varepsilon_1 \sin \varepsilon_1 z + \frac{\text{Bi}_0}{\bar{\lambda}_t^{(1)}} \cos \varepsilon_1 z,$$

$$\begin{aligned}
\Phi_p(z, \mu) &= \Phi_{p-1}(z_{p-1}, \mu) \cos \varepsilon_p (z - z_{p-1}) + \\
&+ \frac{K_{\lambda p}}{\varepsilon_p} \Phi_{p-1}'(z_{p-1}, \mu) \sin \varepsilon_p (z - z_{p-1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_p'(z, \mu) &= -\varepsilon_p \Phi_{p-1}(z_{p-1}, \mu) \sin \varepsilon_p (z - z_{p-1}) + \\
&+ K_{\lambda p} \Phi_{p-1}'(z_{p-1}, \mu) \cos \varepsilon_p (z - z_{p-1}),
\end{aligned}$$

$$K_{\lambda p} = \frac{\bar{\lambda}_t^{(p-1)}}{\bar{\lambda}_t^{(p)}}, \quad p = 2, 3, \dots, n,$$

$$N(\mu) = h_1 \bar{c}_V^{(1)} L_1(\mu) + \frac{\text{Bi}_0}{\mu^2} + \frac{\text{Bi}_n L_n(\mu)}{\mu^2 + \frac{\text{Bi}_n^2}{\bar{c}_V^{(n)} \bar{\lambda}_t^{(n)}}} + \sum_{p=2}^n h_p \bar{c}_V^{(p)} L_p(\mu),$$

$$h_p = z_p - z_{p-1}, \quad z_0 = 0, \quad \varepsilon_p = \mu \sqrt{\frac{\bar{c}_V^{(p)}}{\bar{\lambda}_t^{(p)}}}, \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

$$L_1(\mu) = 1 + \frac{\text{Bi}_0^2}{\mu^2 \bar{c}_V^{(1)} \bar{\lambda}_t^{(1)}},$$

$$L_p(\mu) = \Phi_{p-1}^2(z_{p-1}, \mu) + \left(\frac{K_{\lambda p}}{\varepsilon_p} \right)^2 (\Phi'_{p-1}(z_{p-1}, \mu))^2, \quad p = 2, 3, \dots, n,$$

μ_m – корені рівняння $\bar{\lambda}_t^{(n)} \Phi'_n(z_n, \mu) + \text{Bi}_n \Phi_n(z_n, \mu) = 0$, $S(x)$ – функція Гевісайда, $\delta(x)$ – функція Дірака.

3. Знаходження інтегральних залежностей від температур обмежувальних поверхонь. Знайдемо розподіли функцій $T_j(z, \text{Fo})$, які входять у формулу (4), у моменти часу $\text{Fo} = \text{Fo}_q$ двома наведеними нижче способами.

Спосіб 1. Функції $Q_j(\xi)$ на проміжку інтегрування $[0, \text{Fo}_q]$ апроксимуємо лінійним сплайном вигляду

$$Q_j(\text{Fo}) \approx s_{j,1}^{(1)} \text{Fo} + s_{j,1}^{(0)} + \sum_{q=1}^{K_\tau-1} (s_{j,q+1}^{(1)} \text{Fo} + s_{j,q+1}^{(0)} - s_{j,q}^{(1)} \text{Fo} - s_{j,q}^{(0)}) S(\text{Fo} - \text{Fo}_q), \quad (7)$$

де $s_{j,q}^{(1)} = (Q_{j,q} - Q_{j,q-1}) / \text{Fo}_1$, $s_{j,q}^{(0)} = (Q_{j,q-1} \text{Fo}_q - Q_{j,q} \text{Fo}_{q-1}) / \text{Fo}_1$, $Q_{j,q} = Q_j(\text{Fo}_q)$, $\text{Fo}_q = q \text{Fo}_1$, $q = 0, 1, \dots, K_\tau$.

Обчисливши інтеграли (5) з використанням функції Гріна (6) і апроксимацій (7), одержимо

$$T_j(z, \text{Fo}_q) = Q_{j,q}(g_1(z, z_j) - \Psi_0(z, z_j)) + \Psi_{j,q}(z, z_j), \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \Psi_{j,1}(z, z_j) &= Q_{j,0}(\Psi(z, z_j) - H_1(z, z_j, \text{Fo}_1)), \\ \Psi_{j,q}(z, 0) &= Q_{j,q-1} \Psi_0(z, z_j) + s_{j,1}^{(1)} H_2(z, z_j, \text{Fo}_q) - s_{j,q-1}^{(1)} H_2(z, z_j, \text{Fo}_1) + \\ &+ \sum_{q'=1}^{q-2} d_{j,q'} H_2(z, z_j, \text{Fo}_q - \text{Fo}_{q'}) - Q_{j,0} H_1(z, z_j, \text{Fo}_q), \\ &q = 2, 3, \dots, K, \end{aligned}$$

$$\Psi(z, \zeta) = \frac{g_2(z, \zeta) - H_2(z, \zeta, \text{Fo}_1)}{\text{Fo}_1}, \quad d_{j,q'} = \frac{Q_{j,q'+1} - 2Q_{j,q'} + Q_{j,q'-1}}{\text{Fo}_1},$$

вирази для $g_1(z, z_j)$, $g_2(z, z_j)$ і $H_\gamma(z, z_j, \text{Fo})$, $j = 0, n$, $\gamma = 1, 2$, при $z_{p-1} \leq z \leq z_p$, $p = 1, 2, \dots, n$, визначаються такими співвідношеннями:

$$\begin{aligned} g_1^{(p)}(z, z_0) &= \frac{X_0^{(p)}(z)}{D}, \quad g_1^{(p)}(z, z_n) = \frac{X_n^{(p)}(z)}{D}, \\ X_0^{(p)}(z) &= 1 + \text{Bi}_n (f_n(z_n) - f_p(z)), \quad X_n^{(p)}(z) = 1 + \text{Bi}_0 f_p(z), \\ f_p(z) &= \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(p)}} z - \Lambda_p, \\ \Lambda_1 &= 0, \quad \Lambda_p = \Lambda_{p-1} + \left(\frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(p)}} - \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(p-1)}} \right) z_{p-1}, \quad p = 2, 3, \dots, n, \\ D &= \text{Bi}_0 + \text{Bi}_n + \text{Bi}_0 \text{Bi}_n f_n(z_n), \end{aligned}$$

функції $g_2^{(p)}(z, z_j)$ подано в замкненій формі:

$$g_2^{(p)}(z, z_j) = \frac{1}{D} (g_{11}^{(n)}(z_n, z_j) + \text{Bi}_n g_{12}^{(n)}(z_n, z_j)) X_n^{(p)}(z) - g_{12}^{(p)}(z, z_j),$$

$$g_{11}^{(p)}(z, z_0) = \frac{1}{D} Y_{11}^{(p)}(z),$$

$$Y_{11}^{(p)}(z) = Y_{11}^{(p-1)}(z_{p-1}) + \bar{Y}_p(z), \quad Y_{11}^{(0)}(z_0) = 0,$$

$$\bar{Y}_p(z) = \bar{c}_V^{(p)} (X_{0p}^*(z) - X_{0p}^*(z_{p-1})),$$

$$X_{0p}^*(z) = \gamma_{np} z - \frac{\text{Bi}_n}{2\bar{\lambda}_t^{(p)}} z^2, \quad g_{12}^{(p)}(z, z_0) = \frac{1}{D} Y_{12}^{(p)}(z),$$

$$Y_{12}^{(p)}(z) = Y_{12}^{(p-1)}(z_{p-1}) + \bar{Y}_{12}^{(p)}(z), \quad Y_{12}^{(0)}(z_0) = 0,$$

$$\bar{Y}_{12}^{(p)}(z) = \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(p)}} (Y_{11}^{*(p)}(z) - Y_{11}^{*(p)}(z_{p-1})),$$

$$Y_{11}^{*(p)}(z) = (Y_{11}^{(p-1)}(z_{p-1}) - \bar{c}_V^{(p)} X_{0p}^*(z_{p-1}))z + \\ + \frac{1}{2} \bar{c}_V^{(p)} \left(\gamma_{np} - \frac{\text{Bi}_n}{3\bar{\lambda}_t^{(p)}} z \right) z^2,$$

$$g_{11}^{(p)}(z, z_n) = \frac{1}{D} X_{11}^{(p)}(z), \quad X_{11}^{(p)}(z) = X_{11}^{(p-1)}(z_{p-1}) + \bar{X}_p(z),$$

$$X_{11}^{(0)}(z_0) = 0,$$

$$\bar{X}_p(z) = \bar{c}_V^{(p)} (X_{np}^*(z) - X_{np}^*(z_{p-1})), \quad X_{np}^*(z) = \gamma_{0p} z + \frac{\text{Bi}_0}{2\bar{\lambda}_t^{(p)}} z^2,$$

$$g_{12}^{(p)}(z, z_n) = \frac{1}{D} X_{12}^{(p)}(z), \quad X_{12}^{(p)}(z) = X_{12}^{(p-1)}(z_{p-1}) + \bar{X}_{12}^{(p)}(z),$$

$$X_{12}^{(0)}(z_0) = 0, \quad \bar{X}_{12}^{(p)}(z) = \frac{1}{\bar{\lambda}_t^{(p)}} (X_{11}^{*(p)}(z) - X_{11}^{*(p)}(z_{p-1})),$$

$$X_{11}^{*(p)}(z) = (X_{11}^{(p-1)}(z_{p-1}) - \bar{c}_V^{(p)} X_{np}^*(z_{p-1}))z + \\ + \frac{1}{2} \bar{c}_V^{(p)} \left(\gamma_{0p} + \frac{\text{Bi}_0}{3\bar{\lambda}_t^{(p)}} z \right) z^2,$$

$$\gamma_{np} = 1 + \text{Bi}_n (f_n(z_n) + \Lambda_p), \quad \gamma_{0p} = 1 - \text{Bi}_0 \Lambda_p,$$

$$H_\gamma^{(p)}(z, \zeta, \text{Fo}) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(z, \mu_m) \Phi(\zeta, \mu_m)}{\mu_m^{2\gamma} N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 \text{Fo}}.$$

З використанням методу колокацій із інтегрального подання (4) та залежностей (8) отримуємо рекурентну систему нелінійних алгебричних рівнянь для знаходження значень $t(z_j, \text{Fo}_q)$, $j = 0, n$:

$$\bar{t}(0, \text{Fo}_q) + \mathcal{Q}_{0,q}(g_1(0, 0) - \psi(0, 0)) + \Psi_{0q}(0, 0) + \\ + \mathcal{Q}_{n,q}(g_1(0, z_n) - \psi(0, z_n)) + \Psi_{nq}(0, z_n) - T_L(0, \text{Fo}_q) = 0,$$

$$\begin{aligned} \bar{t}(z_n, \text{Fo}_q) + \mathcal{Q}_{0,q}(g_1(z_n, 0) - \psi(z_n, 0)) + \Psi_{0q}(z_n, 0) + \Psi_{nq}(z_n, z_n) + \\ + \mathcal{Q}_{n,q}(g_1(z_n, z_n) - \psi(z_n, z_n)) - T_L(z_n, \text{Fo}_q) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Розв'язавши систему рівнянь (9), знайдемо значення $\bar{t}(0, \text{Fo}_q)$ і $\bar{t}(z_n, \text{Fo}_q)$, а на основі рівностей (8) – розподіли $T_j(z, \text{Fo}_q)$. Після цього, скориставшись формулою (4), знайдемо шукані температури $\bar{t}(z, \text{Fo}_q)$.

Спосіб 2 передбачає використання подання

$$T_j(z, \text{Fo}_q) = \int_0^{\text{Fo}_{q-1}} G(z, z_j, \text{Fo} - \xi) \mathcal{Q}_j(\xi) d\xi + \int_{\text{Fo}_{q-1}}^{\text{Fo}_q} G(z, z_j, \text{Fo} - \xi) \mathcal{Q}_j(\xi) d\xi, \quad (10)$$

в якому підінтегральні функції $\mathcal{Q}_j(\xi)$ у другому доданку на проміжку $[\text{Fo}_{q-1}, \text{Fo}_q]$ апроксимуємо сталою

$$\mathcal{Q}_j(\xi) = \mathcal{Q}_j(\text{Fo}_{q-1}), \quad (11)$$

а в першому доданку на проміжку $[0, \text{Fo}_{q-1}]$ – лінійним сплайном

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_j(\text{Fo}) \approx s_{j,1}^{(1)} \text{Fo} + s_{j,1}^{(0)} + \\ + \sum_{q=1}^{K_t-2} \left(s_{j,q+1}^{(1)} \text{Fo} + s_{j,q+1}^{(0)} - s_{j,q}^{(1)} \text{Fo} - s_{j,q}^{(0)} \right) S(\text{Fo} - \text{Fo}_q), \end{aligned} \quad (12)$$

де $s_{j,q}^{(1)}$, $s_{j,q}^{(0)}$ визначаються аналогічно, як у сплайнах (7).

Обчисливши з використанням формул (6), (11) і (12) інтеграли в поданні (10), одержимо такі рекурентні лінійні залежності:

$$\begin{aligned} T_j(z, \text{Fo}_1) &= \mathcal{Q}_{j,0}(g_1(z, z_j) - H_1(z, z_j, \text{Fo}_1)), \\ T_j(z, \text{Fo}_q) &= \mathcal{Q}_{j,q-1} g_1(z, z_j) + s_{j,1}^{(1)} H_2(z, z_j, \text{Fo}_q) - s_{j,q-1}^{(1)} H_2(z, z_j, \text{Fo}_1) + \\ &+ \sum_{q'=1}^{q-2} d_{j,q'} H_2(z, z_j, \text{Fo}_q - \text{Fo}_{q'}) - \mathcal{Q}_{j,0} H_1(z, z_j, \text{Fo}_q), \\ &q = 2, 3, \dots, K_t. \end{aligned} \quad (13)$$

Маючи вирази (13) для розподілів $T_j(z, \text{Fo}_q)$, температури $\bar{t}(z, \text{Fo}_q)$ знаходимо, як і раніше, за формулою (4).

4. Числові результати. Як приклад розглянемо нагрів п'ятишарової ($n = 5$) плити джерелом тепла $\tilde{W}_2(\tilde{z}, \tau) = q_0 \delta(\tilde{z} - \tilde{z}_2)$, де $q_0 = \text{const}$. Обчислення виконали при: $\tilde{t}_{p0}(\tilde{z}) = 0$ °C, $p = 1, 2, \dots, 5$, $\tilde{t}_{cj}(\tau) = t_{cj}^* (1 - e^{-k_j^* \tau})$, $j = 0, n$, $t_{c0}^* = 30$ °C, $t_{cn}^* = 20$ °C, $k_0^* = 0.2$ c⁻¹, $k_n^* = 2$ c⁻¹, $\text{Bi}_0 = 0.5$, $\text{Bi}_n = 1$, $\varepsilon_0^* = 0.9$, $\varepsilon_n^* = 1.0$, $\alpha_{*j}(t(\tilde{z}_j, \tau)) = 1$, $\varepsilon_{*j}(t(\tilde{z}_j, \tau)) = 1$, $\tilde{q}_0 = 0.6 \cdot 10^6$ Вт/м², $\tilde{z}_1 = 0.06$ мм, $\tilde{z}_2 = 0.08$ мм, $\tilde{z}_3 = 6$ мм, $\tilde{z}_4 = 8$ мм, $\tilde{z}_5 = 12$ мм, $\ell = \tilde{z}_5$, $\lambda_t^* = \frac{1}{5} \sum_{p=1}^5 \lambda_t^{(p)}$, $c_V^* = \frac{1}{5} \sum_{p=1}^5 c_V^{(p)}$, $t_s = \frac{\tilde{z}_n \tilde{q}_0}{\lambda_t^*}$.

За матеріали шарів вибрано склокераміку [1] (*шари 1, 3*), кераміку ZrO₂ [17] (*шар 2*), сплав Ti-6Al-4V [17] (*шар 4*) та сталь 15X1M1Ф [4] (*шар 5*) з такими теплофізичними характеристиками:

$$\begin{aligned} \lambda_t^{(1)} = \lambda_t^{(3)} &= 1.21 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), & c_V^{(1)} = c_V^{(3)} &= 4.1 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}), \\ \lambda_t^{(2)} &= 1.78 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), & c_V^{(2)} &= 1.64 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}), \\ \lambda_t^{(4)} &= 5.74 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), & c_V^{(4)} &= 2.33 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}), \\ \lambda_t^{(5)} &= 42.31 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot ^\circ\text{C}), & c_V^{(5)} &= 31.64 \cdot 10^5 \text{ Вт} \cdot \text{с}/(\text{м}^3 \cdot ^\circ\text{C}). \end{aligned}$$

Таблиця 1

$\Delta\tau, \text{с}$ $\tau, \text{с}$	0.125	0.25	0.5	1	5
0.25	0.118175	0.118176			
	0.118175	0.118176			
0.5	0.164990	0.164993	0.164996		
	0.164990	0.164993	0.165003		
1	0.235476	0.235479	0.235484	0.235489	
	0.235476	0.235480	0.235489	0.235531	
5	0.581172	0.581173	0.581174	0.581170	0.580927
	0.581172	0.581173	0.581184	0.581247	0.582873
10	0.818247	0.818248	0.818248	0.818246	0.818109
	0.818246	0.818246	0.818254	0.818320	0.820794
20	1.079477	1.079478	1.079478	1.079480	1.079479
	1.079475	1.079472	1.079472	1.079512	1.081553
50	1.378479	1.378479	1.378480	1.378482	1.378533
	1.378476	1.378472	1.378463	1.378458	1.379026
100	1.502887	1.502887	1.502887	1.502888	1.502907
	1.502885	1.502883	1.502879	1.502871	1.502919
200	1.536641	1.536641	1.536641	1.536641	1.536643
	1.536641	1.536641	1.536640	1.536639	1.536634
300	1.538468	1.538468	1.538468	1.538468	1.538562
	1.538468	1.538468	1.538468	1.538468	1.538561
375	1.538561	1.538562	1.538562	1.538562	1.538558
	1.538562	1.538562	1.538562	1.538562	1.538557

Вирази для $t_j^{\text{Bi}}(z, \text{Fo})$ і $t_W(z, \text{Fo})$ при $z_{p-1} < z < z_p$ визначено зі співвідношень

$$\begin{aligned} t_j^{\text{Bi}}(z, \text{Fo}) = t_{jp}^{\text{Bi}}(z, \text{Fo}) &= \bar{t}_{cj}^* (g_1^{(p)}(z, z_j) - H_1^{(p)}(z, z_j, \text{Fo})) - \\ &- \bar{t}_{cj}^* e^{-k_v \text{Fo}} \left(g_1^{(p)}(z, z_j) + k_j g_2^{(p)}(z, z_j) + \right. \\ &+ \left. 2k_j^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(z, \mu_m) \Phi(z_j, \mu_m)}{\mu_m^4 (\mu_m^2 - k_j) N(\mu_m)} \right) + \\ &+ \bar{t}_{cj}^* \left(H_1^{(p)}(z, z_j, \text{Fo}) + k_j H_2^{(p)}(z, z_j, \text{Fo}) + \right. \\ &+ \left. 2k_j^2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi_p(z, \mu_m) \Phi(z_j, \mu_m)}{\mu_m^4 (\mu_m^2 - k_j) N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 \text{Fo}} \right), \end{aligned}$$

$$t_w(z, Fo) = t_{wp}(z, Fo) = Ki J^{(p)}(z, Fo),$$

де

$$J^{(p)}(z, Fo) = \frac{1}{D} X_n^{(p)}(z) X_0^{(2)}(z_2) + (f(z_2) - f(z)) S(z - z_2) - H_1^{(p)}(z, z_2, Fo),$$

$$Ki = \frac{\ell q_0}{\lambda_t^* t_s}, \quad k_j = \frac{k_j^* \ell^2 c_V^*}{\lambda_t^*}, \quad j = 0, n.$$

У табл. 1 наведено значення безрозмірних температур на поверхні $z = z_2$, обчислені у вибрані моменти часу за різних кроків сітки Δt , а у табл. 2 – на обмежувальних поверхнях $z = z_0, z_5$ і поверхнях поділу шарів $z = z_1, z_2, z_3, z_4$ при $\Delta t = 0.25$ с. У верхніх і нижніх рядках таблиць ці значення відповідають розв'язкам, в яких інтегральні залежності від температур обмежувальних поверхонь знайдено відповідно за першою і другою методами.

Таблиця 2

τ, c \ z	z_0	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5
0.25	0.006897	0.076054	0.118176	0.000024	0.000068	0.000117
	0.006967	0.076056	0.118177	0.000025	0.000071	0.000123
1	0.095514	0.192943	0.235479	0.000545	0.000739	0.000862
	0.095549	0.192944	0.235480	0.000546	0.000739	0.000862
5	0.419975	0.543684	0.581173	0.004675	0.004940	0.005068
	0.420052	0.543685	0.581173	0.004675	0.004940	0.005068
10	0.622549	0.777662	0.818248	0.012482	0.011775	0.011794
	0.622630	0.777662	0.818246	0.012482	0.011775	0.011794
20	0.832593	1.031676	1.079478	0.049705	0.045767	0.045373
	0.832657	1.031672	1.079472	0.049705	0.045767	0.045373
50	1.059898	1.319046	1.378479	0.200655	0.191120	0.189608
	1.059920	1.319939	1.378472	0.200655	0.191120	0.189608
100	1.150771	1.437721	1.502887	0.317023	0.304802	0.302546
	1.150776	1.437718	1.502883	0.317023	0.304802	0.302546
200	1.175080	1.469842	1.536641	0.352608	0.339629	0.337150
	1.175080	1.469842	1.536641	0.352608	0.339629	0.337150
300	1.176391	1.471581	1.538468	0.354553	0.341534	0.339042
	1.176392	1.471581	1.538468	0.354553	0.341534	0.339042
375	1.176458	1.471669	1.538562	0.354653	0.341631	0.339139
	1.176458	1.471669	1.538562	0.354653	0.341631	0.339139
∞	1.176467	1.471680	1.538573	0.354665	0.341643	0.339151

У табл. 2 також наведено значення температур, обчислених на основі розв'язку відповідної стаціонарної задачі ($\tau = \infty$). Для його знаходження використано методику [8], згідно з якою розглянуто допоміжну задачу для відшукання розподілу температури $\tilde{t}(z)$ у багатошаровій плиті, який задовольняє рівняння

$$\frac{d}{dz} \left[\bar{\lambda}_t(z) \frac{d\tilde{t}}{dz} \right] = -Ki_2 \delta(z - z_2) \quad (14)$$

і межові умови

$$\bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial \tilde{t}_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\text{Ki}_0, \quad \tilde{t}|_{z=z_5} = \tilde{t}_c, \quad (15)$$

де Ki_0 і \tilde{t}_c – невідомі значення безрозмірного теплового потоку і температури поверхні.

Розв'язок задачі (14), (15) подано у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{t}(z) = & \tilde{t}_c + \text{Ki}_0(f_n(z_n) - f(z)) + \\ & + \text{Ki}_2(f_n(z_n) - f(z) + (f_2(z_2) - f(z))S(z - z_2)). \end{aligned}$$

Значення Ki_0 обчислювали за формулою $\text{Ki}_0 = \varphi(\tilde{t}_c)$, де

$$\varphi(\tilde{t}_c) = \text{Bi}_n(\tilde{t}_c - \bar{t}_{cn}) + \text{Sk}_n(\tilde{t}_c + T_*)^4,$$

а \tilde{t}_c знайдено з рівняння

$$\left(\text{Ki}_0 + \text{Bi}_0(\tilde{t}_1(0, \text{Ki}_0, \tilde{t}_c) - \bar{t}_{c0}) + \text{Sk}_0(\tilde{t}_1(0, \text{Ki}_0, \tilde{t}_c) + T_*)^4 \right) \Big|_{\text{Ki}_0 = \varphi(\tilde{t}_c)} = 0,$$

Із даних табл. 1 випливає, що за мінімального і вдвічі більшого кроку сітки відповідні температури відрізняються п'ятим-шостим знаками після крапки. Зі збільшенням кроку сітки точнішими є значення, коли інтегральні залежності від температур обмежувальних поверхонь обчислено за методикою 1 (верхні рядки). Різниця між температурами, обчисленими за максимального і мінімального кроків сітки, не перевищує відповідно 0.00025 (методика 1) і 0.0026 (методика 2).

З аналізу даних, наведених у табл. 2, випливає, що відповідні температури, підраховані за двома методиками, відрізняються щонайбільше на $3 \cdot 10^{-5}$. Із плином часу вони наближаються до обчислених на основі розв'язку стаціонарної задачі.

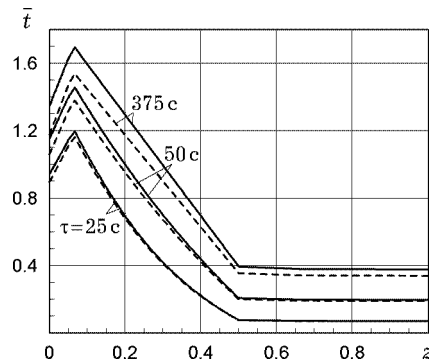


Рис. 1

Рис. 1 ілюструє вплив теплового випромінювання на розподіл температури по товщині плити для різних моментів часу. Штрихові і суцільні лінії побудовано відповідно за врахування і без врахування теплового випромінювання. Числові дослідження засвідчили, що при малих значеннях часу впливом теплового випромінювання можна знехтувати, а при великих значеннях його неврахування призводить до завищення температур, максимальне значення якого досягається на поверхні $\tilde{z} = 0$ і становить 118.5°C .

Висновки. Визначення нестационарного температурного поля багатошарової плити з внутрішніми джерелами тепла і нелінійними межовими умо-

вами зведено до відшукування значень інтегральних залежностей від температур обмежувальних поверхонь. Розглянуто два способи їхнього знаходження. Один з них потребує попереднього розв'язання відповідних рекурентних систем нелінійних алгебричних рівнянь. Другий спосіб полягає у знаходженні цих значень безпосередньо з рекурентної послідовності лінійних співвідношень. На прикладі задачі теплопровідності для п'ятишарової плити, яка нагрівається джерелом тепла, зосередженим на поверхні поділу другої і третьої складових, і охолоджується шляхом конвективно-променевого теплообміну, виконано порівняльний аналіз значень температур, обчислених на основі розв'язків, отриманих за запропонованими методиками. Числові дослідження засвідчили стійкість отриманих розв'язків до зміни кроків часової сітки. За малих кроків відповідні температури відрізняються на величини, порядок яких становить 10^{-5} . Зі збільшенням кроку сітки з 0.125 до 5 с точнішими є результати, отримані з використанням першої методики. За найбільшого кроку точність визначення температур з використанням другої методики є достатньою для практичних потреб. Проаналізовано вплив теплового випромінювання на розподіл температури.

1. *Белик В. Д., Урюков Б. А., Фролов Г. А., Ткаченко Г. В.* Численно-аналитический метод решения нелинейного нестационарного уравнения теплопроводности // Инж.-физ. журн. – 2008. – **81**, № 6. – С. 1058–1062.
Te same: *Belik V. D., Uryukov B. A., Frolov G. A., Tkachenko G. V.* Numerical-analytical method of solution of a nonlinear unsteady heat-conduction equation // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2008. – **81**, No. 6. – P. 1099–1103.
– <https://doi.org/10.1007/s10891-009-0150-8>.
2. *Беляев Н. М., Рядно А. А.* Методы нестационарной теплопроводности. – Москва: Высш. шк., 1978. – 328 с.
3. *Березовський А. А.* Нелинейные краевые задачи теплоизлучающего тела. – Киев: Наук. думка, 1968. – 165 с.
4. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: Споллом, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
5. *Кушнір Р. М., Процюк Б. В., Синюта В. М.* Температурні напруження та переміщення в багатошаровій пластині з нелінійними умовами теплообміну // Фіз. хім. механіка матеріалів. – 2002. – **38**, № 6. – С. 31–38.
Te same: *Kushnir R. M., Protsyuk B. V., Synyuta V. M.* Temperature stresses and displacements in a multilayer plate with nonlinear conditions of heat exchange // Mater. Sci. – 2002. – **38**, No. 6. – P. 798–808.
– <https://doi.org/10.1023/A:1024251515874>.
6. *Постольник Ю. С., Огурцов А. П.* Металургійна термомеханіка. – Дніпропетровськ: Системні технології, 2002. – 633 с.
7. *Процюк Б. В.* Нестационарні нелінійні задачі теплопровідності для півпростору // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 4. – С. 156–167.
Te same: *Protsyuk B. V.* Nonstationary nonlinear problems of heat conduction for a half space. // J. Math. Sci. – 2021. – **256**, No. 4. – P. 551–566.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05444-w>.
8. *Процюк Б. В.* Визначення статичного термопружного стану шаруватих термочутливих плити, циліндра і кулі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 1. – С. 87–106. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2021.64.1.87-106>.
Te same: *Protsyuk B. V.* Determination of the static thermoelastic state of layered thermosensitive plate, cylinder and sphere // J. Math. Sci. – 2023. – **274**, No. 5. – P. 678–707. – <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06630-8>.
9. *Процюк Б. В.* Квазістатичний термопружний стан шаруватого функціонально-градієнтного циліндра за врахування теплового випромінювання // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, № 1-2. – С. 146–157.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.1-2.146-157>.
Te same: *Protsyuk B. V.* Quasistatic thermoelastic state of a layered functionally graded cylinder with regard for thermal radiation // J. Math. Sci. – 2024. – **282**, No. 5. – P. 780–797. – <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07216-8>.

10. *Процюк Б. В., Горун О. П.* Квазістатичний термопружний стан термочутливого трискладового шару за конвективно-променевого теплообміну // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2015. – **58**, № 2. – С. 98–108.
Te same: *Protsyuk B. V., Horun O. P.* Quasistatic thermoelastic state of a heat-sensitive three-component layer under the conditions of convective-radiative heat exchange // *J. Math. Sci.* – 2017. – **223**, No. 2. – P. 117–131.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-017-3342-3>.
11. *Шевчук В. А.* Узагальнені граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через багатошарові неплоскі покриття // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 2. – С. 82–97.
Te same: *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions of radiant-convection heat exchange of bodies with ambient medium through multilayer nonplanar coatings // *J. Math. Sci.* – 2022. – **261**, No. 1. – P. 95–114.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05741-y>
12. *Шевчук В. А., Гавриць О. П.* Термонапружений стан півпростору з багатошаровим покритвом за променево-конвективного теплообміну // *Прикл. проблеми мех. і мат.* – 2017. – Вип. 15. – С. 171–179.
13. *An C., Su J.* Improved lumped models for transient combined convective and radiative cooling of multi-layer composite slabs // *Appl. Therm. Eng.* – 2011. – **31**, No. 14-15 – P. 2508–2517. – <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2011.04.016>.
14. *Kushnir R., Protsiuk B.* Determination of the thermal fields and stresses in multi-layer solids by means of the constructed Green functions // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931. – https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_608.
15. *Oguntala G. A., Abd-Alhameed R. A., Sobamowo G. M., Eya N.* Effects of particles deposition on thermal performance of a convective-radiative heat sink porous fin of an electronic component // *Therm. Sci. Eng. Prog.* – 2018. – **6**. – P. 177–185.
– <https://doi.org/10.1016/j.tsep.2017.10.019>.
16. *Miller J. R., Weaver P. M.* Temperature profiles in composite plates subject to time-dependent complex boundary conditions // *Compos. Struct.* – 2003. – **59**, No. 2. – P. 267–278. – [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00054-5](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00054-5).
17. *Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N.* Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // *J. Therm. Stresses.* – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102.
– <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>.

DETERMINATION OF THE NONSTATIONARY TEMPERATURE FIELD OF A MULTILAYER PLATE UNDER NONLINEAR BOUNDARY CONDITIONS

Techniques for determining the one-dimensional non-stationary temperature field of a multilayer plate under nonlinear boundary conditions are proposed. They provide an integral presentation of the solution of the heat conduction problem using the Green's function for a multilayer plate, the use of generalized functions and linear splines, and the corresponding method of finding integral dependences on boundary temperatures. The results of numerical studies of the non-stationary temperature field in a five-layer plate under heating by a flat heat source of constant intensity, concentrated on one of the interfaces, are presented. A comparison of the temperatures obtained by these methods is performed.

Key words: *multilayer plate, thermal radiation, nonlinear nonstationary heat conduction problem, Green's function, generalized functions, linear splines.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.02.24