УДК 519.6

А. В. Кунинець[1], М. В. Кутнів[2,3✉], Н. В. Хоменко[2,4]

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ШТУРМА – ЛІУВІЛЛЯ НА ОСНОВІ ТРИТОЧКОВИХ РІЗНИЦЕВИХ СХЕМ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ТОЧНОСТІ

Для знаходження власних значень та власних функцій задачі Штурма – Ліувілля використано триточкові різницеві схеми високого порядку точності, побудовані на довільній нерівномірній сітці. Для розв'язування таких триточкових різницевих схем розроблено ітераційний метод Ньютона. Виконано чисельні експерименти, зокрема порівняння результатів, отриманих за допомогою різницевої схеми шостого порядку точності та класичної різницевої схеми другого порядку точності, які підтверджують ефективність запропонованого підходу.

Ключові слова: *задача Штурма – Ліувілля, точна триточкова різницева схема, триточкова різницева схема довільного порядку точності, ітераційний метод Ньютона.*

Вступ. Найбільш вживаними чисельними методами розв'язування задачі Штурма – Ліувілля є метод стрільби, різницевий метод та варіаційні методи (Рітца, Гальоркіна та ін.). Метод стрільби для задачі Штурма – Ліувілля зводиться до розв'язування послідовності задач Коші. Якщо такі задачі не є стійкими, то застосування цього методу є ускладненим, тому натомість використовують різницевий метод. За допомогою найпростіших лінійних різницевих апроксимацій похідних для цієї задачі можна побудувати різницеву схему другого порядку точності. Тоді отримують алгебраїчну задачу на власні значення та власні вектори. Оскільки в загальному випадку матриця алгебраїчної задачі на власні значення хоч і є тридіагональною, але занадто великою для того, щоб можна було обчислити всі її власні значення, то зазвичай розв'язують часткову задачу на власні значення, тобто обчислюють кілька перших (найменших) власних значень. Крім цього, власні значення великого номера матриці погано апроксимують відповідні власні значення диференціального оператора. У разі використання варіаційних методів вихідна задача також зводиться до алгебраїчної задачі на власні значення відносно невідомих коефіцієнтів розвинення наближеного розв'язку за деякою системою базисних функцій. У загальному випадку ці методи мають такі самі недоліки, як і різницеві.

Для задачі Штурма – Ліувілля в [4, 6] розроблено та обґрунтовано триточкові різницеві схеми та точні триточкові різницеві схеми довільного порядку точності. Однак коефіцієнти таких різницевих схем виражаються через багатократні інтеграли від коефіцієнтів диференціального рівняння, а тому виникають труднощі при їхній практичній реалізації. У праці [1] для задачі Штурма – Ліувілля розроблено та обґрунтовано нову алгоритмічну реалізацію точної триточкової різницевої схеми (ТТРС) на нерівномірній сітці. Показано, що коефіцієнти ТТРС для задачі Штурма – Ліувілля в довільному вузлі сітки можна виразити через розв'язки двох допоміжних задач Коші для лінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку, кожна з яких чисельно розв'язується за один крок будь-яким однокроковим методом. У роботі [2] побудовано та обґрунтовано триточкові різницеві схеми (ТРС) довільного порядку точності, дано оцінку точності цих схем. Зауважимо, що такий підхід знайшов широке застосування для розв'язування крайових задач для нелінійних звичайних диференціальних рівнянь [3, 10].

✉ kutniv@yahoo.com

DOI: 10.15407/mmpmf2024.67.1-2.69-77

У цій статті досліджено ТРС високого порядку точності, коефіцієнти яких виражаються через розв'язки допоміжних задач Коші для систем трьох лінійних звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) першого порядку, кожну з яких чисельно розв'язано за один крок із використанням будь-якого однокрокового методу. Розроблено ітераційний метод Ньютона для знаходження розв'язку ТРС порядку точності $\overline{n} = 2[(n+1)/2]$, де n − ціле додатне число, $[\cdot]$ − ціла частина числа, який на кожній ітерації вимагає розв'язування відповідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь з матрицею, близькою до тридіагональної. При цьому для досягнення певної точності матриця цієї системи є меншою, ніж у випадку різницевих схем нижчого порядку точності. Крім того, таку різницеву схему побудовано на довільній нерівномірній сітці, що дає змогу точніше обчислювати власні значення та власні функції для великих порядкових номерів. Наведені чисельні приклади підтверджують ці висновки.

1. Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для задачі Штурма − Ліувілля. Розглянемо задачу Штурма − Ліувілля

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{du}{dx}\right] - q(x)u(x) = -\lambda r(x)u(x), \qquad x \in (0,1),$$

$$u(0) = u(1) = 0, \tag{1}$$

де коефіцієнти $k(x)$, $q(x)$, $r(x) \in Q[0,1]$ − кусково-неперервні функції, які задовольняють умови

$$0 < C_1 \le k(x) \le C_2, \quad 0 \le q(x) \le C_3, \quad 0 < C_4 \le r(x) \le C_5,$$

де C_ℓ − сталі, $\ell = 1,2,\ldots,5$.

Виберемо нерівномірну сітку

$$\hat{\omega}_h = \left\{x_j \in (0,1),\ j = 1,2,\ldots,N-1,\ x_j - x_{j-1} = h_j > 0,\ \sum_{j=1}^{N} h_j = 1\right\},$$

$$\hbar_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2}, \qquad h = \max_{1\le j\le N} h_j,$$

так, щоб точки розриву функцій $k(x)$, $q(x)$, $r(x)$ збігалися з вузлами сітки $\hat{\omega}_h$. Множину всіх точок розриву позначимо через σ і припустимо, що N таке, що $\sigma \subset \hat{\omega}_h$. Будемо вважати, що в точках розриву розв'язок задачі (1) задовольняє умови неперервності

$$u(x_j - 0) = u(x_j + 0), \qquad k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_j-0} = k(x)\frac{du}{dx}\bigg|_{x=x_j+0}. \tag{2}$$

Введемо шаблонні функції $v_\alpha^j(x,\lambda)$, $\alpha = 1,2$, як розв'язки задач Коші

$$\frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dv_\alpha^j}{dx}\right] - q(x)v_\alpha^j(x,\lambda) + \lambda r(x)v_\alpha^j(x,\lambda) = 0, \qquad x \in (x_{j-1}, x_{j+1}), \tag{3}$$

$$v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda) = 0, \qquad k(x)\frac{dv_\alpha^j(x,\lambda)}{dx}\bigg|_{x=x_j+(-1)^\alpha} = (-1)^{\alpha+1}, \tag{4}$$

$$\alpha = 1,2, \qquad j = 1,2,\ldots,N-1,$$

для яких також будемо вимагати виконання умов (2).

Зауважимо, що задача Коші (3), (4) є еквівалентною до задачі Коші для системи ЗДР першого порядку.

$$\frac{dv_\alpha^j(x,\lambda)}{dx}=\frac{w_\alpha^j(x,\lambda)-\lambda z_\alpha^j(x,\lambda)}{k(x)},$$

$$\frac{dw_\alpha^j(x,\lambda)}{dx}=q(x)v_\alpha^j(x,\lambda),$$

$$\frac{dz_\alpha^j(x,\lambda)}{dx}=r(x)v_\alpha^j(x,\lambda),\quad x\in\left(x_{j-2+\alpha},x_{j-1+\alpha}\right),\tag{5}$$

$$v_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda)=0,\quad w_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda)=(-1)^{\alpha+1},\quad z_\alpha^j(x_{j+(-1)^\alpha},\lambda)=0,\tag{6}$$

$$j=1,2,\ldots,N-1,\quad \alpha=1,2.$$

Дійсно, якщо перше рівняння системи (5) помножити на $k(x)$ та продиференціювати ліву і праву частини отриманої рівності, то з урахуванням другого і третього рівняння системи отримаємо рівняння (3). З першого рівняння (5) та початкових умов (6) випливає друга початкова умова (4).

Тоді ТТРС можна записати [1] у вигляді

$$(ay_{\bar{x}})_{\hat{x}}-(d-\lambda\rho)y=0,\quad x\in\hat{\omega}_h,\quad y_0=y_N=0,$$

де

$$y_{\bar{x},j}=\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j},\quad y_{x,j}=\frac{y_{j+1}-y_j}{\hbar_j},\quad \hbar_j=\frac{h_j+h_{j+1}}{2},$$

$$a_j=a(x_j,\lambda)=\left[\frac{1}{h_j}v_1^j(x_j,\lambda)\right]^{-1},$$

$$d_j=d(x_j,\lambda)=\hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left[v_\alpha^j(x_j,\lambda)\right]^{-1}\left[w_\alpha^j(x_j,\lambda)+(-1)^\alpha\right],$$

$$\rho_j=\rho(x_j,\lambda)=\hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left[v_\alpha^j(x_j,\lambda)\right]^{-1}z_\alpha^j(x_j,\lambda).$$

Отже, для обчислення коефіцієнтів a_j, d_j, ρ_j ТТРС для будь-якого вузла x_j сітки $\hat{\omega}_h$ потрібно розв’язати дві задачі Коші (5), (6) з гладкими коефіцієнтами: при $\alpha=1$ на інтервалі $[x_{j-1},x_j]$ (вперед) і при $\alpha=2$ на інтервалі $[x_j,x_{j+1}]$ (назад).

Якщо кожну із задач Коші (5), (6) розв’язувати чисельно за один крок будь-яким однокроковим методом (розвинення в ряд Тейлора або Рунге – Кутта) порядку точності $\bar{n}$, то отримаємо ТРС порядку точності $\bar{n}$ (див. [2], теорема 1) на довільній нерівномірній сітці $\hat{\omega}_h$

$$(a^{(\bar{n})}y_{\bar{x}}^{(\bar{n})})_{x,j}-\left(d_j^{(\bar{n})}-\lambda^{(\bar{n})}\rho_j^{(\bar{n})}\right)y_j^{(\bar{n})}=0,\quad j=1,\ldots,N-1,$$

$$y_0^{(\bar{n})}=y_N^{(\bar{n})}=0,\tag{7}$$

де

$$a_j^{(\bar{n})}=a^{(\bar{n})}\left(x_j,\lambda^{(\bar{n})}\right)=\left[\frac{1}{h_j}v_1^{(\bar{n})j}\left(x_j,\lambda^{(\bar{n})}\right)\right]^{-1},\tag{8}$$

$$d_j^{(\bar{n})}=d^{(\bar{n})}\left(x_j,\lambda^{(\bar{n})}\right)=\hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\times$$

$$\times\left[v_{\alpha}^{(\bar{n})j}(x_j,\lambda^{(\bar{n})})\right]^{-1}\left[w_{\alpha}^{(\bar{n})j}(x_j,\lambda^{(\bar{n})})+(-1)^{\alpha}\right], \tag{9}$$

$$\rho_j^{(\bar{n})}=\rho^{(\bar{n})}(x_j,\lambda^{(\bar{n})})=\hbar_j^{-1}\sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1}\left[v_{\alpha}^{(\bar{n})j}(x_j,\lambda^{(\bar{n})})\right]^{-1}z_{\alpha}^{(\bar{n})j}(x_j,\lambda^{(\bar{n})}), \tag{10}$$

$y_j^{(\bar{n})}\approx y_j$, $v_{\alpha}^{(\bar{n})j}(x_j,\lambda^{(\bar{n})})$, $w_{\alpha}^{(\bar{n})j}(x_j,\lambda^{(\bar{n})})$, $z_{\alpha}^{(\bar{n})j}(x_j,\lambda^{(\bar{n})})$ – чисельні розв'язки задач Коші (5), (6), отримані за один крок будь-яким однокроковим методом порядку точності $\bar{n}$.

2. Ітераційний метод Ньютона знаходження власних векторів та власних чисел. Задачу (7)–(10) можна розглядати як систему рівнянь з N невідомими $y_j^{(\bar{n})}$, $j=1,\ldots,N-1$, $\lambda^{(\bar{n})}$. Ця система є нелінійною завдяки величинам $\lambda^{(\bar{n})}y_j^{(\bar{n})}\rho_j^{(\bar{n})}$. Для знаходження розв'язку ТРС (7)–(10) застосуємо ітераційний метод Ньютона. Лінеаризувавши (7), ітераційний метод Ньютона запишемо у вигляді

$$\begin{aligned}&(a^{(\bar{n},k-1)}\nabla y_{\bar{x}}^{(\bar{n},k)})_{\hat{x},j}-(d_j^{(\bar{n},k-1)}-\lambda^{(\bar{n},k-1)}\rho_j^{(\bar{n},k-1)})\nabla y_j^{(\bar{n},k)}+\\&+\nabla\lambda^{(\bar{n},k)}\rho_j^{(\bar{n},k-1)}y_j^{(\bar{n},k-1)}=-(a^{(\bar{n},k-1)}y_{\bar{x}}^{(\bar{n},k-1)})_{\hat{x},j}+\\&+(d_j^{(\bar{n},k-1)}-\lambda^{(\bar{n},k-1)}\rho_j^{(\bar{n},k-1)})y_j^{(\bar{n},k-1)},\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}&\nabla y_0^{(\bar{n},k)}=\nabla y_N^{(\bar{n},k)}=0,\quad \lambda^{(\bar{n},k)}=\lambda^{(\bar{n},k-1)}+\nabla\lambda^{(\bar{n},k)},\\&y_j^{(\bar{n},k)}=y_j^{(\bar{n},k-1)}+\nabla y_j^{(\bar{n},k)},\quad j=1,2,\ldots,N-1,\quad k=1,2,\ldots,\end{aligned} \tag{12}$$

де

$$a_j^{(\bar{n},k-1)}=a^{(\bar{n})}(x_j,\lambda^{(\bar{n},k-1)}),\quad d_j^{(\bar{n},k-1)}=d^{(\bar{n})}(x_j,\lambda^{(\bar{n},k-1)}),$$

$$\rho_j^{(\bar{n},k-1)}=\rho^{(\bar{n})}(x_j,\lambda^{(\bar{n},k-1)}).$$

Початкове наближення $\lambda^{(\bar{n},0)}$, $y_j^{(\bar{n},0)}$, $j=1,\ldots,N-1$, можна знайти за допомогою наближених методів, наприклад методу Гальоркіна, а в прикладних задачах його часто можна отримати з фізичних міркувань.

Система (11), (12) містить $N-1$ рівнянь, лінійних відносно N невідомих $\nabla y_j^{(\bar{n},k)}$, $j=1,\ldots,N-1$, $\nabla\lambda^{(\bar{n},k)}$. Оскільки власний вектор визначений з точністю до множника, то для того щоб існував єдиний розв'язок системи (11), (12), можна покласти, наприклад, $\nabla y_1^{(\bar{n})}=0$ або $\nabla y_{N-1}^{(\bar{n})}=0$.

Якщо кожну компоненту знайденого розв'язку $y_j^{(\bar{n})}$, $j=1,\ldots,N$, поділити на величину

$$\pm(\rho^{(\bar{n})},(y^{(\bar{n})})^2)^{1/2}=\left[\sum_{i=1}^{N-1}\hbar_j\rho_j^{(\bar{n})}(y_j^{(\bar{n})})^2\right]^{1/2},$$

то отримаємо нормовані власні функції задачі (7)–(10). Умова нормування $(\rho^{(\bar{n})},(y^{(\bar{n})})^2)=1$ визначає власну функцію з точністю до знаку. Для однозначного визначення власних функцій введемо додаткову умову вибору знаку, наприклад $y_{x,0}^{(\bar{n})}>0$.

Запропонований ітераційний процес (11), (12) є особливо ефективним для триточкових різницевих схем, оскільки матриця системи (11), (12) відрізняється за структурою від тридіагональної матриці додаванням тільки одного ненульового стовпця. Розв'язування цієї системи лінійних рівнянь методом виключення вимагає $15N-19$ арифметичних дій. Ітераційний процес (11), (12) є ефективним для диференціальних рівнянь, задачі Коші для яких є нестійкими, оскільки він коригує цю нестійкість.

3. Чисельні приклади. Розв'яжемо задачу Штурма − Ліувілля (див. [5])

$$u'' + \lambda x u = 0, \quad u(0) = u(1) = 0\,. \tag{13}$$

Зауважимо, що для цієї задачі $k(x) = 1$, $q(x) = 0$, $r(x) = x$. Точним розв'язком задачі є власні значення

$$\lambda_m = \left(\frac{3}{2} j_{1/3,m}\right)^2, \quad m = 1,2,\ldots,$$

та відповідні їм власні функції

$$u_m(x) = \sqrt{x}\, I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\lambda_m}\, x^{3/2}\right), \quad m = 1,2,\ldots,$$

де $I_v(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (x/2)^{v+2k}}{k!\,\Gamma(v+k+1)}$ − функції Бесселя першого роду, $j_{v,m}$ − нулі функції Бесселя $I_v(x)$ (див., наприклад, [9]).

Для порівняння у табл. 2 наведено результати розв'язування задачі (13) за допомогою різницевої схеми 2-го порядку точності (див., напр., [7]). Зауважимо, що для $m = 6$ за допомогою цієї схеми не вдалося розв'язати задачу для таких значень N.

Таблиця 1

m	N	err_h	p	m	N	err_h	p
1	16	$4.8824\cdot10^{-7}$		2	16	$2.4637\cdot10^{-5}$	
	32	$6.9167\cdot10^{-9}$	6.1		32	$1.4728\cdot10^{-7}$	7.4
	64	$1.0370\cdot10^{-10}$	6.1		64	$1.6297\cdot10^{-9}$	6.5
	128	$1.5916\cdot10^{-12}$	6.0		128	$2.5508\cdot10^{-11}$	6.0
	256	$2.4869\cdot10^{-14}$	6.0		256	$4.0012\cdot10^{-13}$	6.0
3	16	$1.0389\cdot10^{-4}$		4	16	$2.5579\cdot10^{-3}$	
	32	$6.9760\cdot10^{-6}$	3.9		32	$1.1550\cdot10^{-4}$	4.5
	64	$1.4648\cdot10^{-7}$	6.0		64	$2.1712\cdot10^{-6}$	5.7
	128	$2.5444\cdot10^{-9}$	6.0		128	$3.6459\cdot10^{-8}$	6.0
	256	$4.1638\cdot10^{-11}$	6.0		256	$5.8878\cdot10^{-10}$	6.0
5	16	$2.1478\cdot10^{-2}$		6	16	$9.5322\cdot10^{-2}$	
	32	$8.4246\cdot10^{-4}$	4.7		32	$4.0781\cdot10^{-3}$	5.0
	64	$1.5196\cdot10^{-5}$	5.8		64	$7.1418\cdot10^{-5}$	6.0
	128	$2.5183\cdot10^{-7}$	6.0		128	$1.1726\cdot10^{-6}$	6.0
	256	$4.0470\cdot10^{-9}$	6.0		256	$1.8787\cdot10^{-8}$	6.0

Для чисельного розв'язування задачі (13) використаємо ТРС 6-го порядку точності $(n = \bar{n} = 6)$ на рівномірній сітці $\omega_h = \{x_j = jh,$ $j = 1,2,\ldots,N-1,\ h = 1/N\}$. Допоміжні задачі Коші (5), (6) будемо розв'язувати методом Рунґе − Кутта 6-го порядку точності (див., наприклад, [8, с. 202]). Результати розв'язання задачі Штурма − Ліувілля (13) наведено в табл. 1. Для практичної оцінки швидкості збіжності використано величини

$$err_h = \max\left\{ \left\| y^{(6)} - u \right\|_{C(\omega_h)}, \left| \lambda_h^{(6)} - \lambda \right| \right\}, \quad p = \log_2 \frac{err_h}{err_{h/2}},$$

$$\left\| y \right\|_{C(\omega_h)} = \max_{1 \le j \le N-1} \left| y_j \right|.$$

Таблиця 2

m	N	err_h	p	m	N	err_h	p
1	16	$7.0072 \cdot 10^{-2}$		2	16	1.3050	
	32	$1.7539 \cdot 10^{-2}$	2.0		32	$3.2713 \cdot 10^{-1}$	2.0
	64	$4.3860 \cdot 10^{-3}$	2.0		64	$8.1835 \cdot 10^{-2}$	2.0
	128	$1.0966 \cdot 10^{-3}$	2.0		128	$2.0462 \cdot 10^{-2}$	2.0
	256	$2.7415 \cdot 10^{-4}$	2.0		256	$5.1158 \cdot 10^{-3}$	2.0
3	16	6.9476		4	16	$2.2474 \cdot 10^{1}$	
	32	1.7454	2.0		32	5.6616	2.0
	64	$4.3689 \cdot 10^{-1}$	2.0		64	1.4182	2.0
	128	$1.0926 \cdot 10^{-1}$	2.0		128	$3.5473 \cdot 10^{-1}$	2.0
					256	$8.8694 \cdot 10^{-2}$	2.0
5	16	$5.5537 \cdot 10^{1}$					
	32	$1.4031 \cdot 10^{1}$	2.0				
	64	3.5182	2.0				
	128	$8.8022 \cdot 10^{-1}$	2.0				
	256	$2.2010 \cdot 10^{-1}$	2.0				

Таблиця 3

m	N	$\left\|\lambda^{(6)h} - \lambda\right\|$	p	m	N	$\left\|\lambda^{(6)h} - \lambda\right\|$	p
1	16	$1.1087 \cdot 10^{-6}$		2	16	$8.3139 \cdot 10^{-6}$	
	32	$1.7785 \cdot 10^{-8}$	6.0		32	$1.1961 \cdot 10^{-7}$	6.1
	64	$2.7588 \cdot 10^{-10}$	6.0		64	$1.7790 \cdot 10^{-9}$	6.1
	128	$4.3121 \cdot 10^{-12}$	6.0		128	$2.7072 \cdot 10^{-11}$	6.0
	256	$2.3981 \cdot 10^{-14}$	7.5		256	$3.8725 \cdot 10^{-13}$	6.1
3	16	$6.0496 \cdot 10^{-5}$		4	16	$3.8078 \cdot 10^{-4}$	
	32	$8.2670 \cdot 10^{-7}$	6.2		32	$5.0835 \cdot 10^{-6}$	6.2
	64	$1.2191 \cdot 10^{-8}$	6.1		64	$7.4984 \cdot 10^{-8}$	6.1
	128	$1.8546 \cdot 10^{-10}$	6.0		128	$1.1439 \cdot 10^{-9}$	6.0
					256	$1.7689 \cdot 10^{-11}$	6.0
5	16	$1.9359 \cdot 10^{-3}$		6	16	$7.9775 \cdot 10^{-3}$	
	32	$2.4832 \cdot 10^{-5}$	6.3		32	$9.7052 \cdot 10^{-5}$	6.4
	64	$3.6397 \cdot 10^{-7}$	6.1		64	$1.4093 \cdot 10^{-6}$	6.1
	128	$5.5511 \cdot 10^{-9}$	6.0		128	$2.1472 \cdot 10^{-8}$	6.0
	256	$8.5961 \cdot 10^{-11}$	6.0		256	$3.3219 \cdot 10^{-10}$	6.0

Для порівняння у табл. 2 наведено результати розв'язування задачі (13) за допомогою різницевої схеми 2-го порядку точності (див., напр., [7]). Зауважимо, що для $m = 6$ за допомогою цієї схеми не вдалося розв'язати задачу для таких значень N.

Розглянемо задачу Штурма – Ліувілля (див. [11, с. 278])

$$u'' - e^x u + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0 \tag{14}$$

з відомими власними значеннями: $\lambda_1 = 4.896669380$, $\lambda_2 = 10.045189893$, $\lambda_3 = 16.019267250$, $\lambda_4 = 23.266270940$, $\lambda_5 = 32.263707046$, $\lambda_6 = 43.220019641$, ... Для чисельного розв'язування задачі використаємо ТРС 6-го порядку точності на рівномірній сітці ω_h. Результати розв'язування задачі (14) різницевою схемою 6-го порядку точності наведено в табл. 3.

Розглянемо задачу Штурма – Ліувілля (див. [11, с. 278])

$$u'' - \frac{1}{(x + 0.1)^2} u + \lambda u = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0 \tag{15}$$

з відомими власними значеннями: $\lambda_1 = 1.5198658211$, $\lambda_2 = 4.9433098221$, $\lambda_3 = 10.284662645$, $\lambda_4 = 17.559957746$, $\lambda_5 = 26.782863158$, $\lambda_6 = 37.964425862$, ... Для чисельного розв'язування задачі з заданою точністю ε використаємо ТРС 6-го порядку точності на рівномірній сітці $\omega_h = \{x_j = jh,\ j = 1, 2, \ldots, N - 1,\ h = 1 / N\}$. Для практичної оцінки точності застосуємо правило Рунге (екстраполяція Річардсона), тобто, якщо виконується умова

$$\max\left\{\left\| y_N^{(6)} - y_{2N}^{(6)} \right\|_{C(\omega_h)}, \frac{\left|\lambda_N^{(6)} - \lambda_{2N}^{(6)}\right|}{\lambda_{2N}^{(6)}}\right\} \le 63\varepsilon,$$

то точність ε, з якою необхідно розв'язати задачу, вважається досягнутою, інакше збільшуємо кількість точок сітки N в два рази. Тут $y_N^{(6)}$, $\lambda_N^{(6)}$ – розв'язок різницевої схеми 6-го порядку точності на сітці $\{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$, а $y_{2N}^{(6)}$, $\lambda_{2N}^{(6)}$ – розв'язок різницевої схеми 6-го порядку точності на сітці $\{x_0, x_1, \ldots, x_{2N}\}$. Якщо точність досягнуто, то можна уточнити розв'язок $y_{2N}^{(6)}$, $\lambda_{2N}^{(6)}$, використовуючи екстраполяцію Річардсона

$$\hat{y}_N(x_j) = y_{2N}^{(6)}(x_{2j}) + \frac{y_{2N}^{(6)}(x_{2j}) - y_N^{(6)}(x_j)}{63}, \quad j = 1, 2, \ldots, N - 1,$$

$$\hat{\lambda}_N = \lambda_{2N}^{(6)} + \frac{\lambda_{2N}^{(6)} - \lambda_N^{(6)}}{63}.$$

Таблиця 4

n	ε	N	$\left\|\lambda_h^{(6)} - \lambda\right\|$
2	10^{-4}	16	$0.190 \cdot 10^{-6}$
	10^{-6}	32	$0.154 \cdot 10^{-7}$
	10^{-8}	64	$0.112 \cdot 10^{-10}$

Ітерації в методі Ньютона припиняємо, якщо

$$\max\left\{\left\| y^{(6,k)} - y^{(6,k-1)} \right\|_{C(\omega_h)}, \frac{\left|\lambda^{(6,k)} - \lambda^{(6,k-1)}\right|}{\lambda^{(6,k)}}\right\} \le 0.5\varepsilon,$$

де $k = 1, 2, \ldots, 7$ – номер ітерації. Результати розв'язування задачі (15) із заданою точністю ε різницевою схемою 6-го порядку точності наведено в табл. 4.

Висновки. Чисельні результати при достатньо малому h підтверджують теоретичні висновки про шостий порядок точності різницевої схеми для задачі Штурма – Ліувілля, а також показують ефективність запропонованого підходу порівняно з класичною різницевою схемою 2-го порядку точності.

1. *Кунинець А. В., Кутнів М. В., Хоменко Н. В.* Алгоритмічна реалізація точної триточкової різницевої схеми для задачі Штурма – Ліувілля // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63,** № 1. – С. 37–51.
   – https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.1.37-51
   Те саме: *Kunynets A. V., Kutniv M. V., Khomenko N. V.* Algorithmic realization of an exact three-point difference scheme for the Sturm – Liouville problem // J. Math. Sci. – 2023. – **270**, No. 1. – P. 39–58.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-023-06331-2.
2. *Кунинець А. В., Кутнів М. В., Хоменко Н. В.* Триточкові різницеві схеми високого порядку точності для задачі Штурма – Ліувілля // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63,** № 4. – С. 54–62.
   – https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.4.54-62.
   Те саме: *Kunynets A. V., Kutniv M. V., Khomenko N. V.* Three-point difference schemes of high order of accuracy for the Sturm – Liouville problem // J. Math. Sci. – 2023. – **273**, No. 6. – P. 948–959.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-023-06556-1.
3. *Кутнів М. В., Круль М.* Нова алгоритмічна реалізація точних триточкових різницевих схем для систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 2022. – **74**, № 2. – С. 204–219.
   – https://doi.org/10.37863/umzh.v74i2.6935.
   Те саме: *Kutniv M. V., Krol M.* New algorithmic implementation of exact three-point difference schemes for systems of nonlinear ordinary differential equations of the second order // Ukr. Math. J. – 2022. – **74**, No. 2. – P. 232–250.
   – https://doi.org/10.1007/s11253-022-02060-y.
4. *Макаров В. Л., Гаврилюк И. П., Лужных В. М.* Точная и усеченные разностные схемы для одного класса задач Штурма – Лиувилля с вырождением // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 7. – С. 1265–1275.
5. *Макаров В. Л., Гураль М. М., Кутнів М. В.* Вагові оцінки точності різницевих схем для задачі Штурма – Ліувілля // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 1. – С. 7–22.
   Те саме: *Makarov V. L., Gural' M. M., Kutniv M. V.* Weight estimates of the accuracy of difference schemes for the Sturm – Liouville problem // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, No. 1. – P. 1–25.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3278-7.
6. *Приказчиков В. Г.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности для задачи Штурма – Лиувилля // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1969. – **9**, № 2. – С. 315–336.
   Те саме: *Prikazchikov V. G.* High-accuracy homogeneous difference schemes for the Sturm – Liouville problem // USSR Comput. Math. & Math. Phys. – 1969. – **9**, No. 2. – P. 76–106. – https://doi.org/10.1016/0041-5553(69)90095-0.
7. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. – Москва: Наука, 1971. – 553 с.
8. *Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. – Москва: Мир, 1990. – 512 с.
   Те саме: *Hairer E., Nørsett S. P., Wanner G.* Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1987. – xii+482 p.
9. *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции (формулы, графики, таблицы). – Москва: Наука, 1964. – 344 с.
10. *Gavrilyuk I. P., Hermann M., Makarov V. L., Kutniv M. V.* Exact and truncated difference schemes for boundary value ODEs. – Basel: Birkhäuser, 2011. – xi+247 p. – International Series of Numerical Mathematics. – Vol. 159.
    – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0107-2.

11. *Pryce J.* Numerical solution of Sturm – Liouville problems. – Oxford: Oxford University Press, 1993. – 322 p.

ALGORITHM FOR SOLVING THE STURM – LIOUVILLE PROBLEM ON THE BASIS OF THE THREE-POINT DIFFERENCE SCHEMES OF A HIGH ORDER OF ACCURACY

To find the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm – Liouville problem, three-point difference schemes of a high order of accuracy on an arbitrary irregular grid are used. Newton's iterative method was developed to solve such three-point difference schemes. Numerical experiments (particularly, a comparison of the results obtained using the difference scheme of the sixth order of accuracy and the classical difference scheme of the second order of accuracy) have been conducted that confirm the efficiency of the proposed approach.

Key words: *Sturm – Liouville problem, exact three-point difference scheme, three-point difference scheme of arbitrary order of accuracy, Newton's iterative method.*

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

[3] Жешув. технолог. ун-т, Жешув, Польща

[4] Трієрський Університет, Трієр, Німеччина

Одержано
18.04.24