УДК 519.614

П. О. Савенко[✉]

ПРО НЕЄДИНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ НЕЛІНІЙНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ТИПУ УРИСОНА З ТРЬОМА ЧИСЛОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ

Продовжено дослідження проблеми неєдиності розв'язків нелінійного інтегрального рівняння типу Урисона шляхом введення в підінтегральну функцію трьох числових параметрів. Застосування методів розв'язування дво- і трипараметричних нелінійних спектральних задач дає змогу знайти в заданій області множину точок можливого розгалуження (біфуркації) розв'язків у вигляді спектральних ліній або поверхонь. Наведено числовий приклад.

***Ключові слова**: узагальнене рівняння Урисона, нелінійна трипараметрична спектральна задача, галуження розв'язків, числовий приклад.*

Вступ. Лінійні інтегральні рівняння виникають у низці задач сучасної математики, фізики й техніки. Питанням розвитку теорії нелінійних інтегральних рівнянь присвячено оглядові роботи [3, 4]. Нелінійним інтегральним рівнянням типу Урисона та Гаммерштейна присвячено дослідження Ф. Б. Ляпунова, Е. Шмідта, Л. Ліхтенштейна, М. А. Красносельського, П. П. Забрейка, В. Я. Стеценка [6, 7, 16, 22−24], H. Brezis, F. E. Browder [18], А. Х. Хачатряна [17], П. Г. Айзенгендлера [1] та багатьох інших авторів.

У зв'язку з розвитком сучасної математичної фізики зріс інтерес до дослідження нелінійних інтегральних рівнянь типу Урисона в прикладних застосуваннях. Зокрема, нелінійні інтегральні рівняння з використанням функції Ґріна застосовуються при дослідженні крайових задач для систем диференціальних рівнянь, залежних від декількох числових параметрів [25]. Огляд основних результатів та фундаментальну теорію галуження розв'язків різних типів нелінійних рівнянь подано в монографії М. М. Вайнберга та В. А. Треногіна [27]. Зокрема, автори досліджують нелінійне інтегральне рівняння Урисона

$$u(x) \equiv \int_G F(x, y, u(y), \mu)\, dy\,, \tag{1}$$

яке залежить від одного дійсного числового параметра μ, у припущенні, що при деякому значенні μ_0 цього параметра рівняння (1) має неперервний розв'язок $u_0(x)$. Розглянуто задачу про знаходження всіх неперервних розв'язків $u_\mu(x)$ рівняння (1) для значень μ, близьких до μ_0, які задовольняють умову

$$\max_{x\in G}\left|u_\mu(x) - u_0(x)\right| \to 0 \qquad \text{при} \qquad \mu \to \mu_0\,.$$

У цій роботі розглянемо більш загальне рівняння типу Урисона

$$u(x) \equiv \int_G F(x, y, u(y), \alpha, c_1, c_2)\, dy\,, \tag{2}$$

яке, на відміну від (1), залежить не від одного, а від трьох числових параметрів [27]. Значення α при $0 \le \alpha \ll c_0$ можна розглядати як параметр регуляризації в задачах середньоквадратичної апроксимації функцій [14], а два додаткових дійсних параметри $c_1, c_2 \in \Lambda_c = \{|c_1| \le a_1, |c_2| \le a_2\}$ описують структуру або властивості математичної моделі задачі.

✉ posavenko@gmail.com

DOI: 10.15407/mmpmf2024.67.1-2.57-68

1. Формулювання задачі, основні співвідношення. Нехай G – обмежена замкнена множина скінченновимірного евклідового простору, I та I_1, I_2, I_3 – проміжки дійсної осі або випуклі області комплексної площини і $F(x, y, u(y), \alpha, c_1, c_2)$ – дійсна або комплекснозначна функція, задана на $G \times G \times I \times I_1 \times I_2 \times I_3$ і неперервна за сукупністю своїх аргументів.

Нехай при деяких значеннях α_0, $c_1^{(0)}$, $c_2^{(0)}$ рівняння (2) має неперервний розв'язок $u_0(x)$:

$$u_0(x) \equiv \int_G F(x, y, u_0(y), \alpha_0, c_1^{(0)}, c_2^{(0)})\, dy\,, \tag{3}$$

який надалі називатимемо *первинним.* Розглянемо при фіксованому значенні параметра α_0 задачу про знаходження такої множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ і всіх відмінних від $u_0(x, \mathbf{c}^{(0)})$ розв'язків $u_c(x, c_1, c_2)$ рівняння (2), які при $\left|\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}\right| \to 0$ задовольняють умову

$$\max_{x \in G} \left| u_c(x, c_1, c_2) - u_0(x, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) \right| \to 0\,. \tag{4}$$

Умова (4) означає, що необхідно знайти такі малі неперервні на $\bar{G}$ розв'язки

$$w(x, c_1, c_2) = u_c(x, c_1, c_2) - u_0(x, c_1^{(0)}, c_2^{(0)})\,, \tag{5}$$

які рівномірно збігаються до нуля при $c_1, c_2 \to c_1^{(0)}, c_2^{(0)}$.

Розглянемо частковий випадок рівняння (2), покладаючи параметр α фіксованим, параметри c_1, c_2 подамо як

$$c_1 = c_1^{(0)} + \mu, \quad c_2 = c_2^{(0)} + \nu, \quad \mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)})\,, \tag{6}$$

а шукані розв'язки знаходитимемо у вигляді

$$u_c(x, \mathbf{c}) = u_0(x, \mathbf{c}^{(0)}) + w(x, \mu, \nu)\,. \tag{7}$$

Підставимо вирази (6), (7) у рівняння (2) і приймемо, що підінтегральна функція в околі точки $(\mathbf{c}^{(0)}, u_0(x, \mathbf{c}^{(0)}))$ при $|w| \le \rho_1$, $|\mu| \le \rho_\mu$ і $|\nu| \le \rho_\nu$ розвивається у рівномірно збіжний степеневий ряд за функціональним аргументом w і числовими параметрами μ, ν. Тоді отримаємо

$$F(x, y, u_0(y), \alpha, \mathbf{c}^{(0)}) = \sum_{m+n+k \ge 0} A_{mnk}(x, y, \alpha, \mathbf{c}^{(0)}) w^m(y)\, \mu^n \nu^k\,, \tag{8}$$

де $A_{mnk}(x, y, \alpha, \mathbf{c}^{(0)})$ – коефіцієнти, неперервні за сукупністю аргументів.

Одержану рівність з урахуванням (3) підставимо в (2). У результаті отримаємо

$$u(x) = \sum_{m+n+k \ge 1} \mu^n \nu^k \int_G A_{mnk}(x, y, \alpha, \mathbf{c}^{(0)}) w^m(y)\, dy\,, \tag{9}$$

оскільки $A_{000}(x, y, \alpha, \mathbf{c}^{(0)}) \equiv F(x, y, \alpha, c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$.

Покладаючи, що $A_{100}(x, y, c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) = \mathcal{K}(x, y, u_0(y), c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ – фредгольмове ядро, $a_{010}(x, \alpha, \mathbf{c}^{(0)}) = \int_G A_{010}(x, y, \alpha, c_1^{(0)}, c_2^{(0)})\, dy$, $a_{001}(x, \alpha, \mathbf{c}^{(0)}) = \int_G A_{001}(x, y, \alpha, \mathbf{c}^{(0)})\, dy$, одержимо рівняння типу Ляпунова – Шмідта [27]

$$\omega(x) - \int\limits_G \mathcal{K}(x,y,\alpha,\mathbf{c}^{(0)})\omega(y)\,dy = a_{010}(x,\alpha,\mathbf{c}^{(0)})\mu + a_{001}(x,\alpha,\mathbf{c}^{(0)})\nu +$$

$$+ \sum_{m+n+k\geq 2}^{\infty} \mu^n \nu^k \int\limits_G B_{mnk}(x,y,\alpha) w^m(y)\,dy\,. \tag{10}$$

Таким чином, сформульована задача зводиться до знаходження усіх малих неперервних розв'язків $\omega(y)$ рівняння (10), які рівномірно збігаються до нуля (у сенсі метрики простору $C(G)$) при $\mu \leftrightarrow 0$ і $\nu \leftrightarrow 0$.

При подальшому вивченні розв'язків рівняння (10) ключову роль відіграє рівняння

$$\varphi(x) = T(c_1,c_2)\varphi \equiv \int\limits_G \mathcal{K}(x,y,u_0(y),\alpha,c_1,c_2)\varphi(y)\,dy\,, \tag{11}$$

яке отримуємо з лівої частини рівняння (10). Залежно від типу розв'язків цього рівняння, аналогічно, як у [27], розглядають два випадки. У випадку, коли множина значень параметрів $c_1, c_2 \in \mathbf{\Lambda}_c$, при яких одиниця не є власним значенням рівняння (11), нелінійне рівняння (10) має єдиний розв'язок. В іншому випадку, коли одиниця є власним значенням рівняння (11), то відповідна множина значень параметрів $c_1^{(0)}, c_2^{(0)} \in \mathbf{\Lambda}_c$ є точками можливого галуження або біфуркації розв'язків рівняння (10) і, відповідно, рівняння (2).

Зазначимо, що рівняння (11) у загальному випадку є нелінійною двопараметричною спектральною задачею [10].

2. Алгоритм розв'язування нелінійної спектральної задачі.

2.1. *Випадок комплексних параметрів.* Нелінійну двопараметричну задачу (11) розглянемо для більш загального випадку, приймаючи, що параметри c_1, c_2 та власні функції належать до відповідних комплексних просторів. З цією метою для спрощення подальших викладок введемо позначення

$$c_i = \lambda_i \in \Lambda_i \subset \mathbb{C}, \quad i = 1,2\,. \tag{12}$$

Нехай E і V – комплексні банахові простори, а спектральний параметр $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2)$ належить до області (відкритої зв'язної множини) $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_1 \times \Lambda_2$ комплексного простору $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, де $\lambda_i \in \Lambda_i \subset \mathbb{C}$, $\Lambda_i = \{\lambda_i \in \Lambda_i : 0 < |\lambda_i| < r_i\}$, $i = 1,2$, r_i – деякі дійсні константи.

Нехай $\mathcal{A}(\cdot,\cdot) : \mathbf{\Lambda} \to \mathcal{L}(E,V)$ – оператор-функція, де кожному $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}$ ставиться у відповідність оператор $\mathcal{A}(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathcal{L}(E,V)$. Будемо розглядати нелінійну двопараметричну спектральну проблему $\mathcal{A}(\lambda_1,\lambda_2)x = 0$, в якій необхідно знайти власні значення $\boldsymbol{\lambda}^{(0)} = (\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)}) \in \mathbf{\Lambda}$ і відповідні їм власні вектори $x^{(0)} \in E$, $x^{(0)} \neq 0$, такі, що $\mathcal{A}(\lambda_1^{(0)},\lambda_2^{(0)})x^{(0)} = 0$.

Нехай E, V, $\bar{E}_n$, $\bar{V}_n$, $n \in \mathbb{N}$, – банахові простори, а $\mathcal{P} = (P_n)$ і $\mathcal{Q} = (Q_n)$ – системи лінійних зв'язуючих операторів $P_n : E \to E_n$ і $Q_n \in \mathcal{L}(V,\bar{V}_n)$ таких, що [28]:

$$\forall x \in E, \quad \forall y \in V: \quad \|P_n x\| \to \|x\| \quad \text{і} \quad \|Q_n y\| \to \|y\|, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Вибираючи відповідним чином системи лінійних зв'язуючих операторів $\mathcal{P} = (P_n)$ та $\mathcal{Q} = (Q_n)$, оператор-функцію $\mathcal{A}(\lambda_1,\lambda_2)$ апроксимуємо відповідно наближеними оператор-функціями $\mathcal{A}_n(\lambda_1,\lambda_2)$, $n \in \mathbb{N}$. Внаслідок цього для кожного значення $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}$ одержуємо послідовність операторів $\mathcal{A}_n \in \in \mathcal{L}(E_n, V_n)$, яка при виконанні відповідних умов [28] збігається до оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(E, V)$.

Таким чином, проблема власних значень (11) апроксимується проблемою вигляду

$$\mathcal{A}_n(\lambda_1, \lambda_2)\overline{x}_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{14}$$

Приймемо, що дискретизовану задачу одержуємо у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь, коефіцієнти якої аналітично залежать від параметрів λ_1, λ_2. При цьому задача про знаходження власних значень зводиться до знаходження коренів визначника n-го порядку

$$\Psi_n(\boldsymbol{\lambda}) \equiv \det\left(t_{jk}(\boldsymbol{\lambda})\right)_{j,k=1}^{n} = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Зауважимо, що якщо коефіцієнти $t_{ij}(\lambda_1, \lambda_2)$ є неперервно диференційовними функціями своїх аргументів, то частинні похідні $\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2) / \partial\lambda_i$, $i = 1, 2$, визначаються за правилами диференціювання визначника [8].

Таким чином, внаслідок дискретизації задачі при $n \in \mathbb{N}$ одержуємо функціональну послідовність визначників $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)\}_{n \in \mathbb{N}}$ від двох змінних, причому приймаємо, що елементи $a_{ij}^n(\lambda_1, \lambda_2)$, відповідно до умов задачі (11) і умов побудови дискретного аналога (14) цієї задачі, є голоморфними функціями від λ_1, λ_2.

Надалі для обґрунтування існування зв'язних компонент спектра та збіжності наближених розв'язків задачі (14) до точних розв'язків задачі (11) припускаємо, що для послідовності $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)\}$ виконуються такі умови:

Умова I. При $n \to \infty$ визначник нескінченного порядку $\Psi(\lambda_1, \lambda_2)$ є збіжним для будь-яких $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{\Lambda}$, тобто виконуються умови теореми Пуанкаре [2].

Умова II. Функціональна послідовність $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)\}$ рівномірно збігається на кожній компактній підмножині області $\mathbf{\Lambda}$.

Отже, з голоморфності послідовності $\{\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)\}$ та ***умов I, II*** випливає виконання умов теореми Веєрштрасса [19], яка стверджує, що гранична функція $\Psi(\lambda_1, \lambda_2)$ є голоморфною на $\mathbf{\Lambda}$, а послідовності $\left\{\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_1}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_2}\right\}$ збігаються до $\dfrac{\partial\Psi(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_1}$ і $\dfrac{\partial\Psi(\lambda_1, \lambda_2)}{\partial\lambda_2}$ відповідно. Ця збіжність є рівномірною на кожній компактній підмножині області $\mathbf{\Lambda}$.

Припустимо, що змінні λ_1 і λ_2 у рівнянні (15) пов'язані функціональною залежністю $\lambda_2 = \lambda_2(\lambda_1)$. Оскільки рівність $\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1)) = 0$ є тотожністю, то її похідні, згідно з теоремою Гурса [5, с. 88], будуть задовольняти співвідношення, яке отримуємо, якщо прирівняти до нуля похідну від лівої частини цієї рівності як від складної функції. Таким чином, диференціюючи рівність $\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1)) = 0$ за λ_1, знаходимо

$$\frac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1))}{\partial\lambda_1} + \frac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1))}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = 0 \tag{16}$$

або

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = -\frac{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1)) \,/\, \partial\lambda_1}{\partial\Psi_n(\lambda_1, \lambda_2(\lambda_1)) \,/\, \partial\lambda_2}. \tag{17}$$

Аналогічно, вважаючи, що λ_1 і λ_2 у рівнянні (15) пов'язані функціональною залежністю $\lambda_1 = \lambda_1(\lambda_2)$, знаходимо

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_2} = -\frac{\partial\Psi_n(\lambda_1(\lambda_2), \lambda_2) \,/\, \partial\lambda_2}{\partial\Psi_n(\lambda_1(\lambda_2), \lambda_2) \,/\, \partial\lambda_1}. \tag{18}$$

Розглянемо необхідну надалі допоміжну однопараметричну нелінійну спектральну задачу типу

$$\tilde{\mathcal{A}}(\lambda_1, z(\lambda_1))\varphi = 0 \tag{19}$$

як частковий випадок задачі (11). Припускаємо, що змінна λ_2 в оператор-функції $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$ виражається деякою однозначною (однолистною) диференційовною функцією $\lambda_2 = z(\lambda_1)$, яка відображає деяку область $\Lambda_{1,\beta} \subset \Lambda_1$ у підобласть $\Lambda_{2,\beta} \subset \Lambda_2$. У найпростішому випадку покладатимемо $\lambda_2 = \beta\lambda_1$, де β − деякий дійсний числовий параметр. При $\lambda_1 \in \Lambda_{1,\beta}$ введемо в розгляд оператор-функцію $\mathcal{A}_\beta(\lambda_1) \equiv \mathcal{A}(\lambda_1, \beta\lambda_1)$ (звуження оператор-функції $\mathcal{A}(\lambda_1, \lambda_2)$), з якою зв'язана нелінійна однопараметрична спектральна задача (19), де кожному значенню $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \beta\lambda_1) \in \boldsymbol{\Lambda}$ ставиться у відповідність оператор $\mathcal{A}_\beta(\lambda_1, \beta\lambda_1) \in \mathcal{L}(E, V)$.

Аналогічно до (14), розглядатимемо при $n \in \mathbb{N}$ її дискретизовану апроксимуючу послідовність

$$\mathcal{A}_{\beta,n}(\lambda_1, z(\lambda_1))\overline{x}_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Надалі, не обмежуючи загальності, для спрощення прийматимемо, що $z(\lambda_1) = \beta\lambda_1$, а через $\boldsymbol{\Lambda}_\beta$ позначимо область

$$\boldsymbol{\Lambda}_\beta = \{(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1, \beta\lambda_1) : \lambda_1 \in \Lambda_{1,\beta},\, \beta\lambda_1 \in \Lambda_{2,\beta}\}.$$

Існування зв'язних компонент спектра задачі (11) при непорожній множині розв'язків допоміжної однопараметричної задачі (19) та збіжність наближених розв'язків дискретизованої задачі (14) до точних розв'язків задачі (11) доведено в [10].

2.2. Випадок дійсних спектральних параметрів. Перейдемо до побудови алгоритмів для чисельного знаходження власних значень рівняння (11), використовуючи методи дискретизації [12, 28], тобто перейдемо від знаходження розв'язків нелінійної двопараметричної спектральної задачі (11) у нескінченновимірних банахових функціональних просторах до знаходження наближених розв'язків цієї задачі у скінченновимірних банахових просторах.

Нехай задано деякий збіжний квадратурний (кубатурний) процес [5]

$$\int_D z(t)\,dt = \sum_{j=1}^{n} a_{jn} z(t_{jn}) + \phi_n(z), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{21}$$

з $a_{jn} \in \mathbb{R}$, $t_{jn} \in D$, $j = 1, \ldots, n$.

Замінивши інтеграл в рівнянні (11) за формулою (21), в якій відкидаємо залишковий член ϕ_n, приходимо до такої системи лінійних рівнянь відносно вектора $\{\varphi_{1n}, \ldots, \varphi_{nn}\}^\top$:

$$\varphi_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{jn} \mathcal{K}(x_{in}, u_0(t_{jn}), c_1, c_2)\, \varphi_{jn}, \qquad i = 1, \dots, n. \tag{22}$$

Спочатку розглянемо дискретизацію однопараметричної задачі (19) при дійсному числовому параметрі c_1:

$$\varphi(x) = T(c_1, \beta c_1)\varphi \equiv \int_G \mathcal{K}(x, u_0(y), c_1, \beta c_1)\varphi(y)\, dy, \tag{23}$$

Замінюючи у рівнянні (23) інтеграл за формулою (22) і надаючи змінним x, y відповідно значень x_i, y_j, $i, j = 1, \dots, n$, одержуємо однорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{\mathcal{K}}(x_i, u_0(y_j), \alpha, \beta c_1)\varphi_j - \varphi_i = 0, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{24}$$

відносно вектора $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}^\top$.

Застосовуючи кубатурний процес (21) до двопараметричної спектральної задачі (22), одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$u_{k\ell} = \tilde{T}_{M_n}(c_1, c_2)\mathbf{u} \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{\mathcal{K}}(Q_{k\ell}, Q_{ij}, \alpha, c_1, \beta c_1) u_{ij}, \quad k, \ell = 1, \dots, n. \tag{25}$$

Задача про знаходження власних значень рівняння (25) зводиться до знаходження спектральних ліній рівняння

$$\Psi_n(c_1, c_2) = \det \begin{pmatrix} t_{11}(\alpha, c_1, c_2) - 1 & t_{12}(\alpha, c_1, c_2) & \cdots & t_{1n}(\alpha, c_1, c_2) \\ t_{21}(\alpha, c_1, c_2) & t_{22}(\alpha, c_1, c_2) - 1 & \cdots & t_{2n}(\alpha, c_1, c_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}(\alpha, c_1, c_2) & t_{n2}(\alpha, c_1, c_2) & \cdots & t_{nn}(\alpha, c_1, c_2) - 1 \end{pmatrix} = 0. \tag{26}$$

Рівняння $\Psi_n(c_1, c_2) = 0$ розглядаємо як рівність для визначення неявної функції. Для визначеності покладемо $c_2 = c_2(c_1)$. Припустимо, що існує точка $(c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ така, що $\Psi_n(c_1^{(0)}, c_2^{(0)}) = 0$. Тоді якщо коефіцієнти $t_{nm}(c_1, c_2)$ є неперервно диференційовними функціями від c_1, c_2, то задача визначення неявно заданої функції $c_2 = c_2(c_1)$ у деякому околі точки $\{c_1^{(0)}, c_2^{(0)}\}$ на підставі рівняння (25) зводиться до задачі Коші [10]:

$$\frac{dc_2}{dc_1} = -\frac{\partial \Psi_n(c_1, c_2) / \partial c_1}{\partial \Psi_n(c_1, c_2) / \partial c_2}, \quad c_2(c_1^{(0)}) = c_2^{(0)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{27}$$

У деяких випадках зручніше розглядати еквівалентну до (26) задачу про визначення функції $c_1 = c_1(c_2)$:

$$\frac{dc_1}{dc_2} = -\frac{\partial \Psi_n(c_1, c_2) / \partial c_2}{\partial \Psi_n(c_1, c_2) / \partial c_1}, \quad c_1(c_2^{(0)}) = c_1^{(0)}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{27'}$$

Вибір тієї чи іншої задачі Коші залежить від швидкості зростання похідної у правих частинах рівнянь (27), (27′). Зокрема, якщо похідна у правій частині рівняння (27) швидко зростає, то переходимо до розв’язування задачі (27′).

3. Числовий приклад. Розглянемо приклад застосування запропонованої вище методики до дослідження проблеми неєдиності розв’язків нелінійного рівняння типу Урисона вигляду [12]

$$f(Q) = \frac{1}{\alpha} \iint\limits_{\bar{G}} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) \{ \tilde{F}(Q') - |f(Q')| \} e^{i \arg f(Q')} \, dQ', \tag{28}$$

яке виникає в задачі синтезу випромінюючої системи з плоским розкривом [9, 11, 26]. Тут і надалі для скорочення записів використовуємо такі позначення:

$$Q = (s_1, s_2), \quad Q' = (s_1', s_2'), \quad dQ = ds_1 ds_2, \quad dQ' = ds_1' ds_2'. \tag{29}$$

Якщо область розкриву $\bar{S}$ має дві осі симетрії, а її верхня й нижня межі описуються відповідно функціями $y = \pm\eta(x)$ при $x \in [-1, 1]$, то ядро $\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})$ є дійсним і набуває вигляду

$$\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) = \frac{c_1}{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \cos\left(c_1 x (s_1' - s_1)\right) \frac{\sin\left(c_2 (s_2' - s_2) \eta(x)\right)}{\pi (s_2' - s_2)} \, dx. \tag{30}$$

У випадку прямокутного розкриву ядро $\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})$ записується так:

$$\mathcal{K}(s_1, s_2, s_1', s_2', c_1, c_2) = \frac{\sin c_1 (s_1 - s_1')}{\pi (s_1 - s_1')} \cdot \frac{\sin c_2 (s_2 - s_2')}{\pi (s_2 - s_2')}. \tag{31}$$

Приймемо, що поле збудження у розкриві S лінійно поляризоване, а діаграма напрямленості (ДН) випромінюючої системи описується лінійним інтегральним оператором

$$f(s_1, s_2) = AU \equiv \iint\limits_{\bar{S}} U(x, y) \exp\left(i (c_1 x s_1 + c_2 y s_2)\right) dx \, dy, \tag{32}$$

який діє з простору $L_2(\bar{S})$, до якого належать функції розподілу поля $U(x, y)$ в розкриві, у простір $L_2(\bar{G})$, де $\bar{G} \subset \mathbb{R}^2$ – деяка обмежена замкнена область, у якій задана необхідна амплітудна ДН $\tilde{F}(s_1, s_2)$. Перетворення (32) залежить від двох дійсних фізичних параметрів c_1, c_2, що описують геометрію розкриву.

Задачу синтезу сформулюємо як задачу мінімізації згладжуючого функціонала [9]

$$\sigma_{F_\alpha}(U) = \left\| \tilde{F} - |AU| \right\|^2_{L_2(\bar{G})} + \alpha \|U\|^2_{L_2(\bar{S})} \equiv \left\| \tilde{F} - |f| \right\|^2_{L_2(\bar{G})} + \alpha \|U\|^2_{L_2(\bar{S})}. \tag{33}$$

Прирівнюючи диференціал Гато функціонала (33) до нуля і враховуючи рівність (32), одержуємо рівняння відносно функції U, яке описує стаціонарні точки функціонала $\sigma_{F_\alpha}(U)$ у просторі $L_2(\bar{G})$:

$$\alpha U = -A^* A U + A^* \left(\tilde{F} e^{i \arg AU} \right), \tag{34}$$

де $A^* f = \frac{c_1 c_2}{(2\pi)^2} \iint\limits_{\bar{G}} f(s_1, s_2) e^{-i(c_1 x s_1 + c_2 y s_2)} \, ds_1 \, ds_2$ – спряжений до A оператор, рівняння Ейлера – Лаґранжа якого відносно функції $f(s_1, s_2)$ в операторній формі має вигляд

$$\alpha f = -A A^* f + A A^* \left(\tilde{F} e^{i \arg f} \right). \tag{35}$$

З урахуванням введених вище позначень (29) та означення операторів одержуємо рівняння у розгорнутій формі:

$$\alpha f(Q) = -\iint\limits_{\bar{G}} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) f(Q') \, dQ' + \iint\limits_{\bar{G}} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) \tilde{F}(Q') e^{i \arg f(Q')} \, dQ', \tag{36}$$

де ядро $\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})$ визначається за формулами (30), (31).

Лема 1 [9]. *Між розв'язками рівнянь* (34) *і* (35) *існує взаємно однозначна відповідність: якщо* U_* *− розв'язок рівняння* (34), *то* $f_* = AU_*$ *− розв'язок рівняння* (35), *і навпаки, якщо* f_* *− розв'язок рівняння* (35), *то* $U_* = \alpha^{-1}A^*\{-f_* + \tilde{F}\exp(i\arg(f_*))\}$ *− розв'язок рівняння* (34).

Оскільки множина значень оператора A є множиною неперервних функцій, що належать до простору $L_2(\bar{G})$, а множина функцій, неперервних в області $\bar{G}$, є щільною у просторі $L_2(\bar{G})$ [21], то розв'язки рівняння (35) будемо досліджувати у просторі $\mathcal{C}(\bar{G})$.

Використовуючи декомплексифікацію простору $\mathcal{C}(\bar{G})$ [15, 20], розглядатимемо його як пряму суму двох дійсних просторів: $\mathcal{C}(\bar{G}) = C(\bar{G}) \oplus C(\bar{G})$, елементи якого подаються у вигляді: $f = (u, v)^\top \in \mathcal{C}(\bar{G})$, $u = \mathrm{Re}(f) \in C(\bar{G})$, $v = \mathrm{Im}(f) \in C(\bar{G})$.

Рівняння (36) в декомплексифікованому просторі $\mathcal{C}(\bar{G})$ зводиться до еквівалентної йому системи рівнянь

$$u = B_1(u, v) \equiv -\alpha^{-1}B_{11}u + \alpha^{-1}B_{12}(u, v),$$

$$v = B_2(u, v) \equiv -\alpha^{-1}B_{21}v + \alpha^{-1}B_{22}(u, v), \qquad (37)$$

де

$$B_{11} = \iint\limits_{\bar{G}} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})u(Q')\,dQ',$$

$$B_{12} = \iint\limits_{\bar{G}} \tilde{F}(Q')\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})\frac{u(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}}\,dQ', \qquad (38)$$

$$B_{21} = \iint\limits_{\bar{G}} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})v(Q')\,dQ',$$

$$B_{22} = \iint\limits_{\bar{G}} \tilde{F}(Q')\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})\frac{v(Q')}{\sqrt{u^2(Q') + v^2(Q')}}\,dQ'. \qquad (39)$$

Зазначимо, що B_{11}, B_{21} − лінійні інтегральні оператори і $B_{11} = B_{21}$.

Позначимо через $S_M \subset \mathcal{C}(\bar{G})$ замкнену опуклу множину неперервних функцій, покладаючи

$$S_M = S_{M_u} \oplus S_{M_v}, \qquad S_{M_u} = \{u \in S_{M_u} : \|u\|_{C(\bar{\Omega})} \le qM\},$$

$$S_{M_v} = \{v \in S_{M_v} : \|v\|_{C(\bar{G})} \le qM\},$$

де

$$M = \max_{Q \in \bar{G}} \iint\limits_{\bar{G}} \tilde{F}(Q')\left|\mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})\right|dQ', \qquad (40)$$

Теорема 1 [9]. *Оператор* $\boldsymbol{\mathcal{B}} = (B_1, B_2)^\top$, *визначений за формулами* (37), *відображає замкнену опуклу множину* S_M *банахового простору* $\mathcal{C}(\bar{G})$ *саму в себе і є цілком неперервним.*

Як **наслідок** із теореми 1 випливає виконання умов принципу Шаудера [20], згідно з яким оператор $\boldsymbol{\mathcal{B}} = (B_1, B_2)^\top$ має нерухому точку $f_* = (u_*, v_*)^\top$, яка належить до множини S_M. Ця точка є розв'язком системи рівнянь (37) і, відповідно, рівняння (35) і є стаціонарною точкою функціонала (33).

3.1. Визначення множини точок галуження розв'язків. Запишемо розгорнуту форму рівняння (11) відносно множини точок галуження для рівняння (28) у випадку, коли ядро рівняння (36), визначене за формулою (30), є дійсним. Таким чином, рівняння (36) у просторі дійсних неперервних функцій $C(\bar{G})$ набуває вигляду

$$\alpha f(Q) + \iint_{\bar{G}} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) f(Q')\, dQ' = \iint_{\bar{G}} \tilde{F}(Q') \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) \operatorname{sgn} f(Q')\, dQ'. \tag{41}$$

Поклавши в (41) $\operatorname{sgn} f(Q') \equiv 1$, одержуємо лінійне інтегральне рівняння Фредгольма другого роду із симетричним і додатним ядром:

$$f(Q) + \alpha^{-1} \iint_{\bar{G}} \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c}) f(Q')\, dQ' = H(Q), \tag{42}$$

у якому права частина $H(Q) = \alpha^{-1} \iint_{\bar{G}} \tilde{F}(Q') \mathcal{K}(Q, Q', \mathbf{c})\, dQ'$ є невід'ємною функцією. Оскільки однорідне рівняння, яке відповідає (42), має лише нульовий розв'язок, то звідси випливає, що рівняння (42) має єдиний розв'язок $f_0(Q')$, що належить до простору $C(\bar{G})$, причому $\operatorname{sgn} f_0(Q') \equiv 1$, тобто розв'язок $f_0(Q')$ є невід'ємним.

У подальшому розв'язок $f_0(Q, \mathbf{c})$ називатимемо *первинним розв'язком рівняння* (36), який можна подати у формі

$$u_0(Q, \mathbf{c}) = f_0(Q, \mathbf{c}), \qquad v_0(Q, \mathbf{c}) = 0,$$

а також назвемо *первинним розв'язком системи рівнянь* (37).

Теорема 2 [9]. *Оператор* $\boldsymbol{\mathcal{B}} = (B_1, B_2)^\top$, *визначений за формулами* (37), *відображає замкнену опуклу множину* S_M *банахового простору* $\boldsymbol{\mathcal{C}}(\bar{G})$ *саму в себе і є цілком неперервним.*

Для знаходження ліній галуження і комплексних розв'язків рівняння (36), що відгалужуються від дійсного розв'язку $f_0(Q, \mathbf{c})$, розглянемо задачу про знаходження такої множини значень параметрів $\mathbf{c}^{(0)} = (c_1^{(0)}, c_2^{(0)})$ і всіх відмінних від $f_0(Q, \mathbf{c})$ розв'язків системи (37), які при $\left|\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(0)}\right| \to 0$ задовольняють умови

$$\max_{Q \in \bar{G}} \left| u(Q, \mathbf{c}) - f(Q, \mathbf{c}^{(0)}) \right| \to 0, \qquad \max_{Q \in \bar{G}} |v(Q, \mathbf{c})| \to 0. \tag{43}$$

Умови (43) означають, що необхідно знайти такі малі неперервні на $\bar{G}$ розв'язки

$$w(Q, \mathbf{c}) = u(Q, \mathbf{c}) - f_0(Q, \mathbf{c}^{(0)}), \qquad \omega(Q, \mathbf{c}) = v(Q, \mathbf{c}),$$

які рівномірно збігаються до нуля при $\mathbf{c} \to \mathbf{c}^{(0)}$.

Покладемо

$$c_1 = c_1^{(0)} + \mu, \qquad c_2 = c_2^{(0)} + \nu, \tag{44}$$

а шукані розв'язки знаходитимемо у вигляді

$$u(Q, \mathbf{c}) = f_0(Q, \mathbf{c}^{(0)}) + w(Q, \mu, \nu), \qquad v(Q, \mathbf{c}) = 0 + \omega(Q, \mu, \nu). \tag{45}$$

Підставимо вирази (44), (45) у рівності (37) і приймемо, що підінтегральні функції в околі точки $(\mathbf{c}^{(0)}, u_0(x, \mathbf{c}^{(0)}))$ при $|w| \le \rho_1$, $|\mu| \le \rho_\mu$ і $|\nu| \le \rho_\nu$ можна розвинути в рівномірно збіжні степеневі ряди за функціональним аргументом w і числовими параметрами μ, ν. Виконавши відповідні перетворення, одержуємо рівняння для знаходження множини точок галуження розв'язку $f_0(Q',\mathbf{c})$:

$$\varphi(Q) = T(\mathbf{c})\varphi \equiv \alpha^{-1}\iint\limits_{G} \left(\tilde F(Q') - f_0(Q',\mathbf{c})\right)\mathcal{K}(Q,Q',\mathbf{c})\,\frac{\varphi(Q')}{f_0(Q',\mathbf{c})}\,dQ' . \qquad (46)$$

Це рівняння є нелінійною двопараметричною спектральною задачею, де дійсними спектральними параметрами є c_1, c_2 [10].

Застосовуючи кубатурний процес [28] до рівняння (46), одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$u_{k\ell} = \tilde T_{M_n}(c_1,c_2)\mathbf{u} \equiv \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} a_j \tilde{\mathcal{K}}(Q_{k\ell},Q_{ij},c_1,c_2)u_{ij}, \quad k,\ell = 1,\ldots,n . \quad (47)$$

Задача про знаходження власних значень рівняння (47) зводиться до знаходження спектральних ліній рівняння

$$\Psi_n(c_1,c_2) = \det\left(T_{M_n}(c_1,c_2) - I_n\right) = 0 , \qquad (48)$$

яке розглядаємо як задачу про знаходження неявно заданої функції $c_2 = c_2(c_1)$, зводячи її до задачі Коші (27) або (27′). За початкові умови задачі (27) використовуємо розв'язки відповідної однопараметричної спектральної задачі типу (19).

На рис. 1 наведено результат знаходження ліній можливого галуження розв'язків рівняння (46) при $\tilde F(s_1,s_2) = |\sin(\pi s_1)||\sin(\pi s_2)|$. Таким чином, рівняння типу Урисона (28), що залежить від трьох параметрів, має неєдиний розв'язок, якщо точка $\mathbf{c}^{(0)} = \left(c_1^{(0)},c_2^{(0)}\right)$ належить до спектральної лінії рівняння (46).

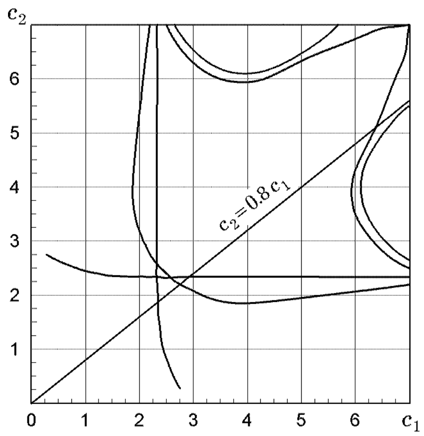

Рис. 1. Лінії можливого галуження розв'язків рівняння (46).

Для чисельного знаходження розв'язків рівняння (34) використовуємо ітераційний процес, побудований за неявною схемою послідовних наближень

$$(E + \alpha^{-1}A^*A)U_{n+1} = \alpha^{-1}A^*\left(\tilde F \exp\left(i\arg\left(A(U_n)\right)\right)\right), \quad n = 0,1,2,\ldots .$$

На рис. 2 в логарифмічному масштабі наведено значення функціонала $\sigma_{F_\alpha}(U)$, яких він набуває на двох різних типах розв'язків системи рівнянь (36) при зміні параметрів c_1, c_2 на промені $c_2 = 0.8\,c_1$. Крива ***1*** відповідає первинному розв'язку $f_0(s_1,s_2,c_1,0.8c_1)$. Крива ***2*** відповідає відгалуженому у точці $(c_1^{(1)}, c_2^{(1)}) = (2.345, 1.876)$ розв'язку з властивістю $\arg f(s_1, -s_2) = = -\arg f(s_1, s_2)$. Із аналізу рисунка випливає, що відгалужені в точці $(c_1^{(1)}, c_2^{(1)})$ розв'язки є ефективнішими порівняно з первинним розв'язком f_0, оскільки функціонал $\sigma_{F_\alpha}(U)$ набуває на відгалужених розв'язках менших значень, ніж на первинному.

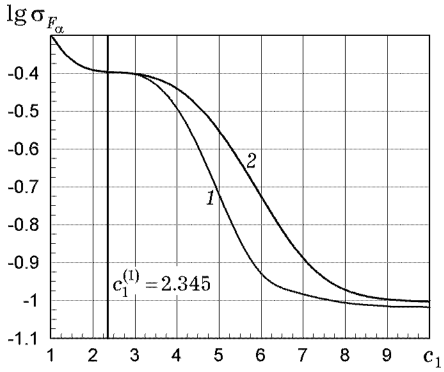

Рис. 2. Значення функціонала на двох різних типах розв'язків рівняння (36).

Висновки. Введення в інтегральний оператор Урисона додаткових числових параметрів дає можливість у практичних застосуваннях дослідити проблему неєдиності існуючих розв'язків та їхні властивості при зміні величини параметрів у заданій області.

Всі особливості наведеного алгоритму наближеного знаходження зв'язних компонент спектра при $m = 3$ без особливих труднощів з використанням результатів [21] переносяться на випадок багатопараметричних спектральних задач при $m > 3$.

1. *Айзенгендлер П. Г.* Некоторые вопросы теории ветвления решений нелинейных уравнений // Успехи мат. наук. – 1966. – **21**, № 1 (127). – С. 182–183.
2. *Архипов Г. И., Садовничий В. А., Чубариков В. Н.* Лекции по математическому анализу. – Москва: Высш. шк., 1999. – 695 с.
3. *Богатов Е. М.* Об истории развития нелинейных интегральных уравнений в СССР. Сильные нелинейности // Научн. ведомости. Сер. Математика. Физика. – 2017. – № 6 (255). – Вып. 46. – С. 93–106.
4. *Богатов Е. М., Мухин Р. Р.* Из истории нелинейных интегральных уравнений // Изв. вузов. Сер. Прикл. нелинейная динамика. – 2016. – **24**, № 2. – С. 77–114.
5. *Гурса Э.* Курс математического анализа. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1933. – Т. 1., Ч. 1. – 368 с.
6. *Забрейко П. П.* О непрерывности и полной непрерывности операторов П. С. Урысона // Докл. АН СССР. – 1965. – **161**, № 5. – С. 1007–1010.
7. *Красносельский М. А.* Признаки непрерывности некоторых нелинейных операторов // Укр. мат. журн. – 1950. – **2**, № 3. – С. 70–86.
8. *Петровский И. Г.* Лекции по теории интегральных уравнений. – Москва: Физматлит, 2009. – 136 с.
9. *Савенко П. А.* Ветвление решений задач синтеза антенн по заданной амплитудной диаграмме направленности при использовании регуляризирующих функционалов // Изв. вуз. Радиоэлектроника. – 1996. – **39**, № 2. – С. 35–50.
10. *Савенко П. О.* Метод неявних функцій при розв'язуванні багатопараметричних нелінійних спектральних задач // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63,** № 2. – С. 36–50. – https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.2.36-50.

    Те саме: *Savenko P. O.* Method of implicit functions in the solution of multiparameter nonlinear spectral problems // J. Math. Sci. – 2023. – **272**, No. 1. – P. 38–54. – https://doi.org/10.1007/s10958-023-06398-x.
11. *Савенко П. О.* Нелінійні задачі синтезу випромінюючих систем з плоским розкривом. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2014. – 314 с.
12. *Савенко П. О.* Синтез випромінюючих систем з плоским розкривом за заданою діаграмою напрямленості за потужністю. I. Знаходження множини точок біфуркації розв'язків // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 83–95.

    Те саме: *Savenko P. O.* Synthesis of radiating systems with flat aperture according to a prescribed power directivity pattern. I. Finding the set of bifurcation points of the solutions // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 366–381. – https://doi.org/10.1007/s10958-015-2452-z.

13. *Савенко П. О.* Синтез випромінюючих систем з плоским розкривом за заданою діаграмою напрямленості за потужністю. II. Знаходження розв'язків у точках біфуркації // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2014. – **57,** № 2. – С. 32–42.
Те саме: *Savenko P. O.* Synthesis of radiating systems with flat aperture according to a given power directivity pattern. II. Finding solutions at the bifurcation points // J. Math. Sci. – 2016. – **215**, No. 1. – P. 36–49.
– https://doi.org/10.1007/s10958-016-2820-3.
14. *Савенко П. О., Соляр Т. Я.* Перетворення Фур'є й Лапласа в задачах апроксимації. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2019. – 380 с.
15. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – Москва: Наука, 1980. – 496 с.
16. *Урысон П. С.* Труды по топологии и другим областям математики. – Т. 1. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1951. – 512 с.
17. *Хачатрян А. Х., Хачатрян Х. А.* Об одном нелинейном интегральном уравнении типа уравнения Гаммерштейна с некомпактным оператором // Мат. сб. – 2010. – **201**, № 4. – С. 125–136. – https://doi.org/10.4213/sm7310.
Те саме: *Khachatryan A. Kh., Khachatryan Kh. A.* "A nonlinear integral equation of Hammershtein type with a noncompact operator // Sb. Math. – 2010. – **201**, No. 4. – P. 595–606.
– https://doi.org/10.1070/sm2010v201n04abeh004083.
18. *Brezis H., Browder F. E.* Existence theorems for nonlinear integral equations of Hammerstein type // Bull. Am. Math. Soc. – 1975. – 81, No. 1. – P. 73–78.
– https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1975-13641-X.
19. *Hörmander L.* An introduction to complex analysis in several variables. – Amsterdam, etc.: North-Holland Publ. Co., 1973. – 213 p.
20. *Kantorovich L. V., Akilov G. P.* Functional analysis. – Oxford, etc.: Pergamon Press, 2014. – 604 p.
21. *Kolmogorov A. N., Fomin S. V.* Elements of the theory of functions and functional analysis. – Vol. 1, 2. – Mineola, NY: Dover Publ., 1999. – 272 p.
22. *Krasnosel'skii M. A.* Positive solutions of operator equations. – Gröningen: Noordhoff, 1964. – 381 p.
23. *Krasnosel'skii M. A.* Topological methods in the theory of nonlinear integral equations. – Oxford, etc.: Pergamon Press, 1964. – xii+395 p.
24. *Krasnosel'skii M. A., Vainikko G. M., Zabreiko P. P., Rutitskii Ya. B., Stetsenko V. Ya.* Approximate solution of operator equations. – Gröningen: Wolters-Noordhoff, 1972. – 484 p. – https://doi.org/10.1007/978-94-010-2715-1.
25. *Naimark M. A.* Linear differential operators. – Part I, II. – New York: Frederick Ungar Publ. Co., 1967; 1968. – xiii+144 p.; xv+352 p.
26. *Savenko P., Klakovych L., Tkach M.* Theory of nonlinear synthesis of radiating systems. – Saarbrücken: LAMBERT Acad. Publ., 2016. – 357 p.
27. *Vainberg M. M., Trenogin V. A.* Theory of branching of solutions of non-linear equations. – Leyden: Noordhoff Int. Pub., Co., 1974. – 485 p.
28. *Vainikko G.* Multidimensional weakly singular integral equations. – Berlin, etc.: Springer-Verlag, 1993. – xii+168 p. – https://doi.org/10.1007/BFb0088979.

ON NONUNIQUENESS OF SOLUTIONS OF THE NONLINEAR URYSOHN TYPE INTEGRAL EQUATION WITH THREE NUMERICAL PARAMETERS

The study of the problem of nonuniqueness of solutions of a nonlinear Urysohn integral equation by introducing the three numerical parameters into the integrand function is continued. The use of methods for solving two- and three parametric nonlinear spectral problems allows to find a set of points of possible branching (bifurcation) of solutions in the form of spectral lines or surfaces in a given region. A numerical example is presented.

Keywords: *generalized Urysohn equation, nonlinear three-parameter spectral problem, branching of solutions, numerical example.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.10.23