УДК 512.64

Б. З. Шаваровський[✉]

ПРО КЛАСИФІКАЦІЮ ОДНОГО ТИПУ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ ПРОСТОЇ СТРУКТУРИ ВІДНОСНО НАПІВСКАЛЯРНОЇ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ

Для одного типу поліноміальних матриць простої структури встановлено таку орієнтовану за характеристичними коренями матрицю, яка значеннями деяких її елементів на частині характеристичних коренів визначається однозначно. Це дає можливість розв'язати задачу класифікації виділеного типу матриць з точністю до напівскалярної еквівалентності.

Ключові слова: *матриця простої структури, напівскалярна еквівалентність матриць, спеціальна трикутна форма матриць, орієнтована за характеристичними коренями матриця.*

Вступ. Згідно з [2] (див. також [3]) поліноміальну матрицю з усіма лінійними елементарними дільниками називають матрицею простої структури. Алгебраїчна та геометрична кратності кожного характеристичного кореня такої матриці збігаються. Тому кратності характеристичних коренів цих матриць не можуть бути більшими, ніж їхні порядки. Матриці простої структури, до класу яких належать, зокрема, матриці з усіма простими (кратності 1) характеристичними коренями, є цікавими через їхню розкладність на лінійні множники [2, 3, 5, 6, 16]. У попередніх працях автора [7, 19–21] досліджуються матриці простої структури з погляду їхньої звідності до простіших форм за допомогою напівскалярно еквівалентних перетворень. Саме поняття напівскалярної еквівалентності введене у праці [4] (див. також [3]), звідки відомо, що кожна матриця повного рангу напівскалярно еквівалентна до матриці нижнього трикутного вигляду з інваріантними множниками на головній діагоналі. Однак матриці вказаного вигляду у класі напівскалярно еквівалентних матриць визначаються неоднозначно. Тому актуальним є питання побудови такої форми матриці, яка була би єдиним представником класу напівскалярно еквівалентних. У праці автора [7] для матриць простої структури відносно напівскалярно еквівалентних перетворень побудовано деяку форму, названу орієнтованою за характеристичними коренями матрицею. Хоч матриця такої форми також не є єдиною у класі напівскалярно еквівалентних матриць, але вона визначається з більшою точністю, ніж довільна трикутна матриця з інваріантними множниками на головній діагоналі. На це вказує той факт, що при напівскалярній еквівалентності матриць, орієнтованих за тими самими характеристичними коренями, ліва перетворювальна матриця має блочно-трикутний вигляд. У цій статті розглянуто ситуацію, коли перетворювальна матриця є трикутною. Для такого випадку доведено однозначність орієнтованої за характеристичними коренями матриці з фіксованими значеннями деяких її елементів на частині її спектру. На цій основі може бути розв'язана задача класифікації виділеного типу матриць відносно напівскалярно еквівалентних перетворень.

Слід зазначити, що подібні до [4] результати пізніше були отримані іншими авторами [9, 14], а еквівалентність матриць над класами кілець, відмінних від кілець поліномів, розглядалася у працях [1, 18]. Інтерес до цієї тематики пояснюється її зв'язком з відомою класичною проблемою про подібність пар матриць, яка розв'язується лише у дуже часткових випадках [15, 17]. Ця проблема хоч, можливо, і не знаходиться у мейнстримі сучасних досліджень, однак постійно привертає увагу дослідників через можливе

✉ bshavarovskii@gmail.com

DOI: 10.15407/mmpmf2024.67.1-2.5-14

застосування у різних класифікаційних задачах, зокрема для оцінки ступеня їхньої складності [11, 12], а також у прикладних задачах. Інші типи еквівалентностей матриць та пов'язані з ними класифікаційні задачі, які часто містять згадану проблему подібності пар матриць, досліджувались у працях [8, 10, 13].

1. Допоміжні твердження. Без обмеження загальності, вважатимемо, що перший інваріантний множник матриці дорівнює 1. Нагадаємо, що, за означенням [3, 4], матриці $A(x), B(x) \in M(n, \mathbb{C}[x])$ називають напівскалярно еквівалентними, якщо існують матриці $P \in GL(n, \mathbb{C})$, $Q(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$ такі, що $PA(x)Q(x) = B(x)$ (позначення: $A(x) \approx B(x)$). Розглянемо матрицю

$$A(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(x) & \varphi_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & \varphi_2(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & a_{n3}(x) & \ldots & \varphi_{n-1}(x) \end{Vmatrix}, \tag{1}$$

орієнтовану за характеристичними коренями $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ (означення див. у [7]). У цій статті припускатимемо, що всі $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ є коренями полінома $\varphi_1(x)$ (який слугує першим неодиничним інваріантним множником). Це означає, що $a_{i+1,1}(\alpha_i) \neq 0$, $a_{i+1,1}(\alpha_{j-1}) = 0$, $i, j = 1, \ldots, n-1$, $i \geq j$.

Зауваження 1. Ненульові значення $a_{i+1,1}(\alpha_i) \neq 0$, про які йдеться вище, насправді можна вважати одиничними, оскільки цього легко досягнути множенням $A(x)$ зліва і справа на відповідні діагональні числові матриці.

Наступні три твердження описують деякі інваріанти матриці $A(x)$ відносно напівскалярної еквівалентності.

Твердження 1. *Для орієнтованої за характеристичними коренями $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ полінома $\varphi_1(x)$ матриці $A(x)$ (1) найбільші спільні дільники $(a_{21}(x), a_{31}(x), \ldots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))$, $(a_{31}(x), a_{41}(x), \ldots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))$, ..., $(a_{n1}(x), \varphi_1(x))$ є інваріантами відносно напівскалярної еквівалентності.*

Д о в е д е н н я. Нехай матриця

$$B(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ b_{21}(x) & \varphi_1(x) & 0 & \ldots & 0 \\ b_{31}(x) & b_{32}(x) & \varphi_2(x) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & b_{n3}(x) & \ldots & \varphi_{n-1}(x) \end{Vmatrix}, \tag{2}$$

є орієнтованою за тими самими, що й $A(x)$, характеристичними коренями $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ і $A(x) \approx B(x)$. Тоді існують матриці $S \in GL(n, \mathbb{C})$, $R(x) \in GL(n, \mathbb{C}[x])$ такі, що

$$SA(x) = B(x)R(x). \tag{3}$$

Відомо [6], що матриця S у співвідношенні (3) має верхній трикутний вигляд. Якщо позначити $S := \left\| s_{ij} \right\|_1^n$, $R(x) := \left\| r_{ij}(x) \right\|_1^n$, то з урахуванням нульових елементів матриці S на основі (3) можемо записати

$$s_{kk} a_{k\ell}(x) + s_{k,k+1} a_{k+1,\ell}(x) + \ldots + s_{kn} a_{n\ell}(x) \equiv$$

$$\equiv b_{k1}(x) r_{1\ell}(x) + b_{k2}(x) r_{2\ell}(x) + \ldots +$$

$$+ b_{k,k-1}(x) r_{k-1,\ell}(x) \ (\mathrm{mod}\, \varphi_{k-1}(x)), \tag{4}$$

де $k = 2, \dots, n$, $\ell = 1, \dots, n-1$, $\ell < k$. З (4) для $\ell = 1$ і $k = 2, \dots, n$ випливає, що $(a_{21}(x), a_{31}(x), \dots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))$ ділить кожен з елементів $b_{k1}(x)$, $k = 2, \dots, n$, оскільки $(r_{11}(x), \varphi_1(x)) = 1$. Це означає, що $(a_{21}(x), a_{31}(x), \dots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))$ ділить $(b_{21}(x), b_{31}(x), \dots, b_{n1}(x), \varphi_1(x))$. І навпаки, з огляду на симетричність напівскалярної еквівалентності маємо, що $(b_{21}(x), b_{31}(x), \dots, b_{n1}(x), \varphi_1(x))$ ділить $(a_{21}(x), a_{31}(x), \dots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))$. Тому

$$(a_{21}(x), a_{31}(x), \dots, a_{n1}(x), \varphi_1(x)) = (b_{21}(x), b_{31}(x), \dots, b_{n1}(x), \varphi_1(x)).$$

Далі, зі співвідношення (4) для $\ell = 1$ і $k = 3, \dots, n$ отримуємо подільність $(b_{31}(x), b_{41}(x), \dots, b_{n1}(x), \varphi_1(x))$ на $(a_{31}(x), a_{41}(x), \dots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))$, а з огляду на симетричність напівскалярної еквівалентності одержимо подільність $(a_{31}(x), a_{41}(x), \dots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))$ на $(b_{31}(x), b_{41}(x), \dots, b_{n1}(x), \varphi_1(x))$. Це означає, що вказані найбільші спільні дільники насправді є однаковими. Цілком аналогічно доводиться інваріантність усіх решти найбільших спільних дільників, зазначених у твердженні 1. ♦

Позначимо через $\psi_i(x)$ поліноми

$$\psi_i(x) := \frac{(a_{i+2,1}(x), \dots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))}{(a_{i+1,1}(x), \dots, a_{n1}(x), \varphi_1(x))}, \quad i = 1, \dots, n-1, \tag{5}$$

а через M_{ψ_i} – множини їхніх коренів. Очевидно, $M_{\psi_i} \neq \varnothing$, оскільки $\alpha_i \in M_{\psi_i}$.

Твердження 2. *Нехай матриця* $A(x)$ (1) *орієнтована за характеристичними коренями полінома* $\varphi_1(x)$ *і* $\psi_1(x)$ *визначений в* (5). *Розбиття множини* M_{ψ_1} *коренів полінома* $\psi_1(x)$ *на підмножини, на яких елемент* $a_{21}(x)$ *матриці* $A(x)$ *набуває однакових значень, є інваріантним відносно напівскалярної еквівалентності.*

Д о в е д е н н я. Нехай $A(x) \approx B(x)$, де матриця $B(x)$ (2) орієнтована за тими самими, що й $A(x)$, характеристичними коренями. Нехай також для $\alpha, \beta \in M_{\psi_1}$ маємо $a_{21}(\alpha) \neq a_{21}(\beta)$. Тоді з (4) для $\ell = 1$ і $k = 2$ підстановками $x = \alpha$ і $x = \beta$ отримаємо

$$s_{22} a_{21}(\alpha) = b_{21}(\alpha)(s_{11} + s_{12} a_{21}(\alpha)), \quad s_{22} a_{21}(\beta) = b_{21}(\beta)(s_{11} + s_{12} a_{21}(\beta)),$$

звідки $b_{21}(\alpha) \neq b_{21}(\beta)$, оскільки $s_{11}, s_{22} \neq 0$. ♦

Отже, з твердження 2 випливає, що ранг кожної 2×2-підматриці матриці $N_{\left\| \begin{smallmatrix} 1 \\ a_{21}(x) \end{smallmatrix} \right\|}(\psi_1(x))$, де $\psi_1(x)$ визначено в (5), є інваріантом. Для $A(x)$ (1) побудуємо матриці вигляду

$$N_{\left\| \begin{smallmatrix} 1 \\ a_{21}(x) \end{smallmatrix} \right\|}(\psi_1(x)), \quad N_{\left\| \begin{smallmatrix} a_{21}(x) \\ \vdots \\ a_{i+1,1}(x) \end{smallmatrix} \right\|}(\psi_i(x)), \quad i = 2, \dots, n-1. \tag{6}$$

Твердження 3. *Нехай матриця* $A(x)$ (1) *орієнтована за характеристичними коренями полінома* $\varphi_1(x)$. *Ранги матриць* (6), *ранги їхніх підматриць з повних (висоти* k*) стовпців та позиції ненульових най-*

нижче розміщених мінорів 2-го порядку у кожній підматриці з двох повних лінійно незалежних стовпців є інваріантними відносно напівскалярної еквівалентності, якщо $\deg \psi_k(x) \geq 2$.

Д о в е д е н н я. Інваріантність рангу першої з матриць (6), як зазначено вище, випливає з твердження 2. Нехай орієнтовані за тими самими характеристичними коренями полінома $\varphi_1(x)$ матриці $A(x)$ (1), $B(x)$ (2) є напівскалярно еквівалентними. Для них виконується рівність (3), в якій матриця S, як уже згадувалося, має верхній трикутний вигляд. Для $B(x)$, за аналогією з (6), побудуємо матриці

$$N_{\left\| \begin{smallmatrix} a_{21}(x) \\ \vdots \\ a_{i+1,1}(x) \end{smallmatrix} \right\|}(\psi_i(x)), \quad i = 2, \ldots, n-1. \tag{7}$$

Якщо для фіксованого k, $3 \leq k \leq n$, позначити через t степінь полінома $\psi_{k\text{-}1}(x)$, а через $\gamma_1, \ldots, \gamma_t$ – його корені, то на основі (3) при переході до рядкових значень матриці на множині коренів $\psi_{k\text{-}1}(x)$ можемо записати рівність

$$\left\| s_{ij} \right\|_2^k N_{\left\| \begin{smallmatrix} a_{21}(x) \\ \vdots \\ a_{k1}(x) \end{smallmatrix} \right\|}(\psi_{k-1}(x)) = N_{\left\| \begin{smallmatrix} b_{21}(x) \\ \vdots \\ b_{k1}(x) \end{smallmatrix} \right\|}(\psi_{k-1}(x)) \operatorname{diag}\left(r_{11}(\gamma_1), \ldots, r_{11}(\gamma_t)\right), \tag{8}$$

де $\left\| s_{ij} \right\|_2^k$ – відповідний діагональний блок матриці S, а $r_{11}(x)$ – елемент в позиції (1, 1) матриці $R(x)$ у співвідношенні (3). Оскільки $\left\| s_{ij} \right\|_2^k$ – неособлива матриця і $r_{11}(\gamma_m) \neq 0$, $m = 1, 2, \ldots, t$, то ранги матриць (6), (7) для $i = k$ збігаються. На цій основі з (8) видно також, що довільна підматриця матриці (6) для $i = k$ з цілих (повних висоти k) стовпців та відповідна підматриця матриці (7) мають однакові ранги.

Нехай $\alpha \in M_{\psi_{k-1}}$ для деякого k, $2 \leq k \leq n$. Тоді $a_{k1}(\alpha) \neq 0$ і $a_{k+1,1}(\alpha) = \ldots = a_{n1}(\alpha) = 0$. Підставляючи $x = \alpha$ в (4) для значень $k, k-1, \ldots, 2$, матимемо систему рівностей

$$s_{kk} a_{k1}(\alpha) = b_{k1}(\alpha) r_{11}(\alpha),$$

$$s_{k-1,k-1} a_{k-1,1}(\alpha) + s_{k-1,k} a_{k1}(\alpha) = b_{k-1,1}(\alpha) r_{11}(\alpha),$$

$$s_{k-2,k-2} a_{k-2,1}(\alpha) + s_{k-2,k-1} a_{k-1,1}(\alpha) + s_{k-2,k} a_{k1}(\alpha) = b_{k-2,1}(\alpha) r_{11}(\alpha),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$s_{22} a_{21}(\alpha) + s_{23} a_{31}(\alpha) + \ldots + s_{2k} a_{k1}(\alpha) = b_{21}(\alpha) r_{11}(\alpha). \tag{9}$$

Вилученням в (9) множників $r_{11}(\alpha) = \dfrac{s_{kk} a_{k1}(\alpha)}{b_{k1}(\alpha)} \neq 0$ приходимо до системи

$$s_{k-1,\,k-1} \frac{a_{k-1,\,1}(\alpha)}{a_{k1}(\alpha)} + s_{k-1,\,k} = s_{kk} \frac{b_{k-1,\,1}(\alpha)}{b_{k1}(\alpha)},$$

$$s_{k-2,\,k-2} \frac{a_{k-2,\,1}(\alpha)}{a_{k1}(\alpha)} + s_{k-2,\,k-1} \frac{a_{k-1,\,1}(\alpha)}{a_{k1}(\alpha)} + s_{k-2,\,k} = s_{kk} \frac{b_{k-2,\,1}(\alpha)}{b_{k1}(\alpha)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$s_{22}\,\frac{a_{21}(\alpha)}{a_{k1}(\alpha)}+s_{23}\,\frac{a_{31}(\alpha)}{a_{k1}(\alpha)}+\ldots+s_{2,\,k-1}\,\frac{a_{k-1,\,1}(\alpha)}{a_{k1}(\alpha)}+s_{2k}\;=s_{kk}\,\frac{b_{21}(\alpha)}{b_{k1}(\alpha)}\,. \qquad (10)$$

Якщо $\beta\in M_{\psi_{k-1}}$ і $\beta\neq\alpha$, то цілком аналогічно можемо записати систему рівностей

$$s_{k-1,\,k-1}\,\frac{a_{k-1,\,1}(\beta)}{a_{k1}(\beta)}+s_{k-1,\,k}\;=s_{kk}\,\frac{b_{k-1,\,1}(\beta)}{b_{k1}(\beta)}\,,$$

$$s_{k-2,\,k-2}\,\frac{a_{k-2,\,1}(\beta)}{a_{k1}(\beta)}+s_{k-2,\,k-1}\,\frac{a_{k-1,\,1}(\beta)}{a_{k1}(\beta)}+s_{k-2,\,k}\;=s_{kk}\,\frac{b_{k-2,\,1}(\beta)}{b_{k1}(\beta)}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$s_{22}\,\frac{a_{21}(\beta)}{a_{k1}(\beta)}+s_{23}\,\frac{a_{31}(\beta)}{a_{k1}(\beta)}+\ldots+s_{2,\,k-1}\,\frac{a_{k-1,\,1}(\beta)}{a_{k1}(\beta)}+s_{2k}\;=s_{kk}\,\frac{b_{21}(\beta)}{b_{k1}(\beta)}\,. \qquad (11)$$

Порівнюючи перші, другі та всі наступні пари відповідних рівностей систем (10) та (11), приходимо до висновку, що у послідовностях

$$\frac{a_{k-1,1}(\alpha)}{a_{k1}(\alpha)}-\frac{a_{k-1,1}(\beta)}{a_{k1}(\beta)},\;\; \frac{a_{k-2,1}(\alpha)}{a_{k1}(\alpha)}-\frac{a_{k-2,1}(\beta)}{a_{k1}(\beta)},\;\; \ldots,\;\; \frac{a_{21}(\alpha)}{a_{k1}(\alpha)}-\frac{a_{21}(\beta)}{a_{k1}(\beta)}\,, \qquad (12)$$

$$\frac{b_{k-1,1}(\alpha)}{b_{k1}(\alpha)}-\frac{b_{k-1,1}(\beta)}{b_{k1}(\beta)},\;\; \frac{b_{k-2,1}(\alpha)}{b_{k1}(\alpha)}-\frac{b_{k-2,1}(\beta)}{b_{k1}(\beta)},\;\; \ldots,\;\; \frac{b_{21}(\alpha)}{b_{k1}(\alpha)}-\frac{b_{21}(\beta)}{b_{k1}(\beta)} \qquad (13)$$

номери перших ненульових членів збігаються. Тому якщо

$$\frac{a_{p1}(\alpha)}{a_{k1}(\alpha)}-\frac{a_{p1}(\beta)}{a_{k1}(\beta)}\neq 0,\qquad \frac{b_{p1}(\alpha)}{b_{k1}(\alpha)}-\frac{b_{p1}(\beta)}{b_{k1}(\beta)}\neq 0\,,$$

а всі попередні члени послідовностей (12), (13) є нульовими, то це означає, що

$$a_{p1}(\alpha)a_{k1}(\beta)-a_{p1}(\beta)a_{k1}(\alpha)\neq 0,\qquad b_{p1}(\alpha)b_{k1}(\beta)-b_{p1}(\beta)b_{k1}(\alpha)\neq 0$$

є найнижче розміщеними ненульовими мінорами підматриць

$$N_{\left\|\begin{smallmatrix}a_{21}(x)\\ \vdots\\ a_{k1}(x)\end{smallmatrix}\right\|}[\alpha,\beta],\qquad N_{\left\|\begin{smallmatrix}b_{21}(x)\\ \vdots\\ b_{k1}(x)\end{smallmatrix}\right\|}[\alpha,\beta]$$

у матрицях

$$N_{\left\|\begin{smallmatrix}a_{21}(x)\\ \vdots\\ a_{k1}(x)\end{smallmatrix}\right\|}\big(\psi_{k-1}(x)\big),\qquad N_{\left\|\begin{smallmatrix}b_{21}(x)\\ \vdots\\ b_{k1}(x)\end{smallmatrix}\right\|}\big(\psi_{k-1}(x)\big)$$

відповідно. ♦

2. Основний результат. Надалі припускатимемо, що степені поліномів $\psi_i(x)$ (5) і ранги матриць (6) не менші ніж 2. За такої умови у множинах M_{ψ_i}, $i=1,\ldots,n-1$, існують корені β_i такі, що разом з коренями α_i орієнтації матриці $A(x)$ задовольняють умови

$$\operatorname{rank} N_{\left\|\begin{smallmatrix}1\\ a_{21}(x)\end{smallmatrix}\right\|}[\alpha_1,\beta_1]=\operatorname{rank} N_{\left\|\begin{smallmatrix}a_{21}(x)\\ \vdots\\ a_{k+1,1}(x)\end{smallmatrix}\right\|}[\alpha_k,\beta_k]=2,\qquad k=2,\ldots,n-1\,.$$

Це означає, що $a_{21}(\alpha_1)\neq a_{21}(\beta_1)$ і кожна з послідовностей

$$\frac{a_{k1}(\alpha_k)}{a_{k+1,1}(\alpha_k)} - \frac{a_{k1}(\beta_k)}{a_{k+1,1}(\beta_k)}, \ldots, \frac{a_{21}(\alpha_k)}{a_{k+1,1}(\alpha_k)} - \frac{a_{21}(\beta_k)}{a_{k+1,1}(\beta_k)}, \quad k = 2, \ldots, n-1, \tag{14}$$

містить ненульові елементи.

Теорема 1. *Нехай задано орієнтовану за характеристичними коренями* α_0, α_i, $i = 1, \ldots, n-1$, *полінома* $\varphi_1(x)$ *матрицю* $A(x)$ (1) *і* $a_{i+1,1}(\alpha_i) = 1$ (*див. зауваження* 1). *Нехай також для набору відмінних від* α_i *коренів* $\beta_i \in M_{\psi_i}$ *маємо* $a_{21}(\beta_1) \neq a_{21}(\alpha_1)$ *для* $i = 1$ *і перший ненульовий елемент* $\frac{a_{t_i 1}(\beta_i)}{a_{i+1,1}(\beta_i)} - \frac{a_{t_i 1}(\alpha_i)}{a_{i+1,1}(\alpha_i)}$ *послідовності* (14) *для* $i = k = 2, \ldots, n-1$. *За таких умов у класі напівскалярно еквівалентних матриць існує єдина матриця* $A(x)$ *з фіксованими значеннями*

$$a_{21}(\beta_1), \quad a_{i1}(\alpha_j), \quad \frac{a_{t_i 1}(\beta_i)}{a_{i+1,1}(\beta_i)}, \quad i, j = 2, \ldots, n-1, \quad i \le j. \tag{15}$$

Д о в е д е н н я. Нехай значення (15) для $A(x)$ збігаються з відповідними значеннями для орієнтованої за тими самими характеристичними коренями матриці $B(x)$ вигляду (2). Нехай також $A(x) \approx B(x)$. Матриці $A(x)$, $B(x)$ пов'язані співвідношенням (3), з якого випливають конґруенції (4). Нагадаємо, що матриця S у (3) має верхній трикутний вигляд. На першому кроці для $k = 2$, $\ell = 1$ в (4) покладаємо $x = \alpha_1$ і $x = \beta_1$. Тоді матимемо $s_{22} = s_{11} + s_{12}$ і $s_{22}a_{21}(\beta_1) = b_{21}(\beta_1)(s_{11} + s_{12}a_{21}(\beta_1))$, звідки $s_{11} = s_{22}$, $s_{12} = 0$, оскільки $a_{21}(\beta_1) = b_{21}(\beta_1) \neq 1$.

На другому кроці для $k = 2$, $\ell = 1$ і $k = 3$, $\ell = 1$, покладаючи в (4) $x = \alpha_2$ і $x = \beta_2$, приходимо до системи рівностей

$$\begin{aligned}
&s_{22}a_{21}(\alpha_2) + s_{23}a_{31}(\alpha_2) = b_{21}(\alpha_2)(s_{11} + s_{13}a_{31}(\alpha_2)), \\
&s_{22}a_{21}(\beta_2) + s_{23}a_{31}(\beta_2) = b_{21}(\beta_2)(s_{11} + s_{13}a_{31}(\beta_2)), \\
&s_{33}a_{31}(\alpha_2) = b_{31}(\alpha_2)(s_{11} + s_{13}a_{31}(\alpha_2)), \\
&s_{33}a_{31}(\beta_2) = b_{31}(\beta_2)(s_{11} + s_{13}a_{31}(\beta_2)).
\end{aligned} \tag{16}$$

Вилученням в (16) множників $s_{11} + s_{13}a_{31}(\alpha_2)$ і $s_{11} + s_{13}a_{31}(\beta_2)$ отримуємо співвідношення

$$s_{22}\frac{a_{21}(\alpha_2)}{a_{31}(\alpha_2)} + s_{23} = s_{33}\frac{b_{21}(\alpha_2)}{b_{31}(\alpha_2)}, \quad s_{22}\frac{a_{21}(\beta_2)}{a_{31}(\beta_2)} + s_{23} = s_{33}\frac{b_{21}(\beta_2)}{b_{31}(\beta_2)}.$$

Звідси випливає, що $s_{22} = s_{33}$, $s_{23} = 0$, оскільки

$$\frac{a_{21}(\alpha_2)}{a_{31}(\alpha_2)} = \frac{b_{21}(\alpha_2)}{b_{31}(\alpha_2)} \neq \frac{a_{21}(\beta_2)}{a_{31}(\beta_2)} = \frac{b_{21}(\beta_2)}{b_{31}(\beta_2)}.$$

Якщо врахувати, що $a_{31}(\alpha_2) = b_{31}(\alpha_2) = 1$, то з третьої рівності системи (16) маємо $s_{13} = 0$. Отже, у матриці $S = \|s_{ij}\|_1^n$ в (3) діагональні елементи s_{11}, s_{22}, s_{33} є однаковими, а відповідні їм недіагональні s_{12}, s_{13}, s_{23} – нульовими.

Припустимо за індукцією, що у матриці S для деякого номера p, $2 < p < n$, маємо $s_{11} = s_{22} = \ldots = s_{pp}$ і $s_{\ell m} = 0$, $\ell = 1, \ldots, p-1$, $m = 2, \ldots, p$, $\ell < m$. Зі співвідношення (4) для значень $k = p+1, \ldots, t_p, \ldots, 2$, поклавши $x = \alpha_p$, отримаємо систему рівностей

$$s_{p+1,p+1} a_{p+1,1}(\alpha_p) = b_{p+1,1}(\alpha_p) r_{11}(\alpha_p),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$s_{t_p t_p} a_{t_p,1}(\alpha_p) + s_{t_p,p+1} a_{p+1,1}(\alpha_p) = b_{t_p 1}(\alpha_p) r_{11}(\alpha_p),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$s_{22} a_{21}(\alpha_p) + s_{2,p+1} a_{p+1,1}(\alpha_p) = b_{21}(\alpha_p) r_{11}(\alpha_p). \tag{17}$$

Від системи (17), вилучивши множник $r_{11}(\alpha_p) \neq 0$ і врахувавши, що $a_{p+1,1}(\alpha_p) \neq 0$, $b_{p+1,1}(\alpha_p) \neq 0$, переходимо до системи

$$s_{pp} \frac{a_{p1}(\alpha_p)}{a_{p+1,1}(\alpha_p)} + s_{p,p+1} = s_{p+1,p+1} \frac{b_{p1}(\alpha_p)}{b_{p+1,1}(\alpha_p)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$s_{t_p t_p} \frac{a_{t_p,1}(\alpha_p)}{a_{p+1,1}(\alpha_p)} + s_{t_p,p+1} = s_{p+1,p+1} \frac{b_{t_p,1}(\alpha_p)}{b_{p+1,1}(\alpha_p)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$s_{22} \frac{a_{21}(\alpha_p)}{a_{p+1,1}(\alpha_p)} + s_{2,p+1} = s_{p+1,p+1} \frac{b_{21}(\alpha_p)}{b_{p+1,1}(\alpha_p)}. \tag{18}$$

Такі самі співвідношення, як у системі (18), можемо отримати і для $x = \beta_p$. Зокрема,

$$s_{t_p t_p} \frac{a_{t_p,1}(\beta_p)}{a_{p+1,1}(\beta_p)} + s_{t_p,p+1} = s_{p+1,p+1} \frac{b_{t_p 1}(\beta_p)}{b_{p+1,1}(\beta_p)}.$$

Якщо порівняти цю рівність з аналогічною рівністю із системи (18) і взяти до уваги, що

$$\frac{a_{t_p 1}(\alpha_p)}{a_{p+1,1}(\alpha_p)} = \frac{b_{t_p 1}(\alpha_p)}{b_{p+1,1}(\alpha_p)} \neq \frac{a_{t_p 1}(\beta_p)}{a_{p+1,1}(\beta_p)} = \frac{b_{t_p 1}(\beta_p)}{b_{p+1,1}(\beta_p)},$$

то матимемо $s_{t_p t_p} = s_{p+1,p+1}$, $s_{t_p,p+1} = 0$. Оскільки обидва дроби, що входять до кожної з решти рівностей (18), є однаковими, то $s_{2,p+1} = \ldots = s_{p,p+1} = 0$. Тепер, якщо вернутися до першої з рівностей в (17) і врахувати, що

$$a_{p+1,1}(\alpha_p) = b_{p+1,1}(\alpha_p) = 1,$$

$$r_{11}(\alpha_p) = s_{11} + s_{1,p+1} a_{p+1,1}(\alpha_p), \quad s_{p+1,p+1} = s_{t_p t_p} = s_{11},$$

то отримаємо $s_{1,p+1} = 0$. Отже, у верхній трикутній матриці $S = \left\| s_{ij} \right\|_1^n$ зі співвідношення (3) перші $p+1$ діагональні елементи є однаковими, а ті, що стоять над ними, є нульовими. Цим індуктивно доведено діагональність матриці S, в якій усі діагональні елементи є однаковими. Це означає, що $A(x) = B(x)$. ♦

Приклад 1. Орієнтована за характеристичними коренями $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ матриця

$$A(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ a_{21}(x) & \varphi(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ x^3 - x^2 + x & x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x \end{Vmatrix}$$

фіксованим значенням $a_{21}(2) = 6$ визначається однозначно. ◄

Приклад 2. Орієнтована за характеристичними коренями $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$ матриця

$$A(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}(x) & \varphi_1(x) & 0 \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & \varphi_2(x) \end{Vmatrix},$$

де

$$\varphi_1(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4), \quad \varphi_2(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9),$$

$$a_{21}(x) = 1/3(2x^3 + x),$$

$$a_{31}(x) = 1/96(x^6 - x^5 - 13x^4 + 37x^3 + 12x^2 - 36x),$$

фіксованими значеннями

$$a_{21}(\alpha_2) = a_{21}(2) = 6,$$

$$a_{21}(\beta_1) = a_{21}(-1) = -1 \neq a_{21}(1) = 1 \qquad \text{для} \quad \beta_1 \in M_{\psi_1}$$

та

$$\frac{a_{21}(\beta_2)}{a_{31}(\beta_2)} = \frac{a_{21}(-2)}{a_{31}(-2)} = 2 \neq \frac{a_{21}(\alpha_2)}{a_{31}(\alpha_2)} = \frac{a_{21}(2)}{a_{31}(2)} = 6 \qquad \text{для} \quad \beta_2 \in M_{\psi_2}$$

визначається однозначно. ◄

Приклад 3. Матриця

$$A(x) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}(x) & \varphi_1(x) & 0 & 0 \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & \varphi_2(x) & 0 \\ a_{41}(x) & a_{42}(x) & a_{43}(x) & \varphi_3(x) \end{Vmatrix},$$

де

$$\varphi_1(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 + 1),$$

$$\varphi_2(x) = \varphi_1(x)(x^2 - 9),$$

$$\varphi_3(x) = \varphi_2(x)(x^2 - 16),$$

$$a_{21}(x) = -0.1x^6 - 2x^5/15 + 0.5x^4 + 0.5x^3 - 0.4x^2 + 19x/30,$$

$$a_{31}(x) = 0.05(1/12 + i)x^8 - 0.25ix^6 - 0.05(1/12 - 4i)x^4,$$

$$a_{41}(x) = i(0.5x^{10} - 1.6x^8 + 0.5x^7 - 2.1x^6 - 2.1x^5 + 1.6x^4 + 1.6x^2 + 1.6x),$$

є орієнтована за характеристичними коренями $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = i$. Фіксованими значеннями

$$a_{21}(\alpha_2) = a_{21}(2) = 1, \quad a_{21}(\alpha_3) = a_{21}(i) = 1, \quad a_{31}(\alpha_3) = a_{31}(i) = 0.5i,$$

$$a_{21}(\beta_1) = a_{21}(-1) = -1 \neq a_{21}(\alpha_1) = a_{21}(1) = 1 \qquad \text{для} \quad \beta_1 \in M_{\psi_1},$$

$$\frac{a_{21}(\beta_2)}{a_{31}(\beta_2)} = \frac{a_{21}(-2)}{a_{31}(-2)} = -1 \neq \frac{a_{21}(\alpha_2)}{a_{31}(\alpha_2)} = \frac{a_{21}(2)}{a_{31}(2)} = 1 \qquad \text{для} \quad \beta_2 \in M_{\psi_2},$$

$$\frac{a_{31}(\beta_3)}{a_{41}(\beta_3)} = \frac{a_{31}(-i)}{a_{41}(-i)} = -0.5i \neq \frac{a_{31}(\alpha_3)}{a_{41}(\alpha_3)} = \frac{a_{31}(i)}{a_{41}(i)} = 0.5i \qquad \text{для} \quad \beta_3 \in M_{\psi_3}$$

матриця $A(x)$ визначається однозначно. ◀

Висновки. Для класифікації поліноміальних матриць простої структури відносно напівскалярної еквівалентності встановлено так звану орієнтовану за характеристичними коренями матрицю. За певних умов така матриця є єдиною, якщо деякі значення елементів першого стовпця на частині коренів її характеристичного полінома є фіксовані.

1. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Еквівалентність матриць у кільці $M(n, R)$ та в його підкільцях // Укр. мат. журн. – 2021. – **73**, № 12. – С. 1612–1618. – https://doi.org/10.37863/umzh.v73i12.6858.
   Те саме: *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* Equivalence of matrices in the ring $M(n, R)$ and its subrings // Ukr. Math. J. – 2022. – **73**, No. 12. – P. 1865–1872. – https://doi.org/10.1007/s11253-022-02034-0.
2. *Казимирский П. С.* Выделение из матричного многочлена регулярного линейного множителя простой структуры // Теорет. и прикл. вопросы алгебры и дифференц. уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1976. – С. 29–40.
3. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
4. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
5. *Маркус А. С., Мереуца И. В.* О некоторых свойствах простых λ-матриц // Мат. исслед. (Кишинев). – 1975. – **10**, № 3. – С. 207–213.
6. *Сахнович Л. А.* О факторизации передаточной оператор-функции // Докл. АН СССР. – 1976. – **226**, № 4. – С. 781–784.
7. *Шаваровський Б. З.* Про трикутну форму поліноміальної матриці простої структури та її інваріанти відносно напівскалярної еквівалентності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2023. – **66**, № 1-2. – С. 16–22. – https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.1-2.16-22.
8. *Alazemi A., Anđelić M., Fonseca C. M., Futorny V., Sergeichuk V. V.* Three representation types for systems of forms and linear maps // Mathematics (MDPI). – 2021. – **9**, No. 5. – Art. 455. – 12 p. – https://doi.org/10.3390/math9050455.
9. *Baratchart L.* Une théorème de factorisation et son application á la representation des systèmes cyclique causaux // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. 1. Math. – 1982. – **295**, No. 3. – P. 223–226.
10. *Belitskii G. R., Futorny V., Muzychuk M., Sergeichuk V. V.* Congruence of matrix spaces, matrix tuples, and multilinear maps // Linear Algebra Appl. – 2021. – **609**, No. 3. – P. 317–331. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.09.018.
11. *Bondarenko V. M., Petravchuk A. P.* Wildness of the problem of classifying nilpotent Lie algebras of vector fields in four variables // Linear Algebra Appl. – 2019. – **568**. – P. 165–172. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2018.07.031.
12. *Bondarenko V. M., Petravchuk A. P., Styopochkina M. V.* Polynomial similarity of pairs of matrices // Linear Algebra Appl. – 2025. – **708**. – P. 150–158. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2024.11.029.
13. *Borges V. S., Kashuba I., Sergeichuk V. V., Sodré E. V., Zaidan A.* Classification of linear operators satisfying $(Au, v) = (u, A^r v)$ or $(Au, A^r v) = (u, v)$ on a vector space with indefinite scalar product // Linear Algebra Appl. – 2021. – **611**. – P. 118–134. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2020.12.005.
14. *Dias da Silva J. A., Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra Appl. – 1999. – **291**, No. 1-3. – P. 167–184. – https://doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10247-1.
15. *Futorny V., Horn R. A., Sergeichuk V. V.* A canonical form for nonderogatory matrices under unitary similarity // Linear Algebra Appl. – 2011. – **435**, No. 4. – P. 830–841. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2011.01.042.

16. *Gohberg I., Lankaster P., Rodman L.* Matrix polynomials. – New York: Acad. Press, Inc., 1982. – 433 p.
17. *Kouchekian S., Shekhtman B.* On simultaneous similarity of families of commuting operators // Proc. Amer. Math. Soc. – 2024. – **152**, No. 1. – P. 129–136. – https://doi.org/10.1090/proc/16594.
18. *Ladzoryshyn N. B., Petrychkovych V. M.* The number of standard forms of matrices over imaginary Euclidean quadratic rings with respect to the (z,k)-equivalence // Мат. студії. – 2022. – **57**, № 2. – С. 115–121. – https://doi.org/10.30970/ms.57.2.115-121.
19. *Shavarovskii B. Z.* Conditions of semiscalar equivalence of one class 3×3 matrices of simple structure // Hindawi J. Math. – 2022. – **2022**, No. 1. – Article ID 8395922. – 13 p. – https://doi.org/10.1155/2022/8395922.
20. *Shavarovskii B. Z.* On the triangular form of 3×3 matrix of simple structure relative to semiscalar equivalence // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65,** № 3-4. – С. 5–28. – https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.3-4.5-28
21. *Shavarovskii B. Z.* Oriented by characteristic roots reduced matrices in the class of semiscalarly equivalent // Hindawi J. Math. – 2021. – **2021**, No. 1. – Article ID 5592756. – 6 p. – https://doi.org/10.1155/2021/5592756.

ON THE CLASSIFICATION OF ONE TYPE OF POLYNOMIAL MATRICES OF SIMPLE STRUCTURE WITH RESPECT TO SEMISCALAR EQUIVALENCE

For one type of polynomial matrices of simple structure, a matrix oriented by characteristic roots is established. Such a matrix is uniquely determined by the values of some of its elements on the part of the characteristic roots. This makes it possible to solve the problem of classifying the selected type of matrices with accuracy up to semiscalar equivalence.

Key words**:** *matrix of simple structure, semiscalar equivalence of matrices, special triangular form of matrices, oriented by characteristic roots matrix.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.02.24