

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ – НЕЙМАНА ДЛЯ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ ЗА ЧАСОМ

У багатовимірному безмежному шарі досліджено задачу з умовами Діріхле – Неймана за часовою змінною та умовами майже періодичності за просторовими координатами для неоднорідних рівнянь із частинними похідними високого порядку, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. Встановлено умови однозначної розв'язності цієї задачі та побудовано її розв'язок. Дослідження питання існування розв'язку задачі пов'язане з проблемою малих знаменників, для яких отримано оцінки знизу з використанням метричного підходу.

Ключові слова: диференціальні рівняння із частинними похідними, не розв'язані відносно похідної, умови Діріхле – Неймана, майже періодичні функції, однозначна розв'язність, малі знаменники, міра Лебега.

1. Формулювання задачі. Вступ. Розглянемо таку задачу Діріхле – Неймана для рівнянь із частинними похідними високого порядку, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n} L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x) + \sum_{r=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2r} \sum_{|s| \leq \omega} a_s^r \frac{\partial^{|s|} u(t, x)}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}} = f(t, x),$$

$$(t, x) \in \Theta_T^p, \quad (1)$$

$$\left(\frac{\partial^{2j-2} u(t, x)}{\partial t^{2j-2}}\right)\Big|_{t=0} = \varphi_j(x),$$

$$\left(\frac{\partial^{2j-1} u(t, x)}{\partial t^{2j-1}}\right)\Big|_{t=T} = \varphi_{n+j}(x), \quad j \in \{1, \dots, n\}, \quad x \in \mathbb{R}^p, \quad (2)$$

де $\Theta_T^p = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{p+1} : 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^p\}$, $T > 0$, $p \in \mathbb{N}$;

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|s| \leq 2\ell} b_s \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_p^{s_p}}$$

– еліптичний оператор, $a_s^r, b_s \in \mathbb{C}$, $a_0^1 \neq 0$, $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|s| = s_1 + \dots + s_p$. Дослідимо питання про однозначну розв'язність задачі (1), (2) у класі функцій, майже періодичних за змінними x_1, \dots, x_p , із заданим спектром

$$M := \{\mu_k \in \mathbb{R}^p : \mu_{-k} = -\mu_k, \mu_0 = 0, d_1 |k|^{\sigma_1} \leq |\mu_k| \leq d_2 |k|^{\sigma_2}, k \in \mathbb{Z}^p\}, \quad (3)$$

де $d_2 \geq d_1 > 0$, $\sigma_2 \geq \sigma_1 > 0$.

Задачі з крайовими та нелокальними умовами для диференціальних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної, виникають при математичному моделюванні задач гідродинаміки, вологопереносу тощо. Різним аспектам досліджень таких задач присвячено низку праць [1, 2, 5, 6, 11–13]. Для

✉ repetylosofiya@gmail.com

випадку звичайних диференціальних рівнянь крайові задачі вивчено, зокрема, в [2, 12]. У випадку рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часовою змінною, двоточкові крайові задачі за часовою змінною розглянуто у [1, 5, 11], де встановлено умови їхньої коректності у класах функцій, 2π -періодичних за просторовими координатами. Праці [1, 5, 11] використовують однакову методичку досліджень, що полягає у застосуванні методу відокремлення змінних для знаходження розв'язків крайових задач. Значний інтерес викликає вивчення майже періодичних розв'язків крайових задач для диференціальних рівнянь. Властивості майже періодичних розв'язків окремих класів диференціальних рівнянь описані у працях [3, 4, 6, 9, 13, 15–19]. Однак задачі з умовами Діріхле – Неймана за часовою змінною та умовами майже періодичності за просторовими координатами для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом, слабо досліджені.

Метою цієї праці, яка є дотичною до роботи [12], є встановлення умов коректної розв'язності у багатовимірному безмежному шарі задачі (1), (2) у класі функцій зі степеневою поведінкою спектра за просторовими координатами.

2. Основні позначення. Надалі використовуємо такі позначення: \mathbb{Z}_+^p – множина точок \mathbb{R}^p з цілими невід'ємними координатами; $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $|k| = |k_1| + \dots + |k_p|$, $\mu_k = (\mu_{k_1}, \dots, \mu_{k_p}) \in \mathbb{R}^p$, $|\mu_k| = |\mu_{k_1}| + \dots + |\mu_{k_p}|$, $(\mu_k, x) = \mu_{k_1} x_1 + \dots + \mu_{k_p} x_p$; \mathcal{T}_M – простір усіх тригонометричних поліномів скінченного степеня вигляду

$$v(x) = \sum_{|k| \leq N} v_k \exp(i\mu_k, x), \quad N \in \mathbb{Z}_+, \quad \mu_k \in M,$$

\mathcal{T}'_M – простір антилінійних неперервних функціоналів над \mathcal{T}_M ; послідовність $g_q \in \mathcal{T}'_M$ збігається до $g \in \mathcal{T}'_M$, якщо $\langle g_q, v \rangle \xrightarrow{q \rightarrow \infty} \langle g, v \rangle$ для довільного $v \in \mathcal{T}_M$, де $\langle g, v \rangle$ позначає дію функціонала $g \in \mathcal{T}'_M$ на елемент $v \in \mathcal{T}_M$; простір \mathcal{T}_M неперервно вкладається у \mathcal{T}'_M таким чином: якщо $v \in \mathcal{T}_M$, то елемент $g_v \in \mathcal{T}'_M$, який відповідає елементу v , визначається як

$$\langle g_v, z \rangle = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_0^h v(x) \overline{z(x)} dx \quad \text{для довільного } z \in \mathcal{T}_M; \text{ для довільної функції}$$

$g \in \mathcal{T}'_M$ нерівність $\langle g, \exp(i\mu_k, x) \rangle \neq 0$ справджується не більше ніж для зліченної кількості значень $\mu_k \in M$; ряд $\sum_{|k| \geq 0} g_k \exp(i\mu_k, x)$, де

$$g_k = \langle g, \exp(i\mu_k, x) \rangle, \quad \text{називається рядом Фур'є функції } g \in \mathcal{T}'_M;$$

$C^r([0, T], \mathcal{T}'_M)$ – простір функцій $v(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} v_k(t) \exp(i\mu_k, x)$, $\mu_k \in M$,

$v_k(t) \in C^r([0, T])$, таких, що $\frac{\partial^j v}{\partial t^j} \in \mathcal{T}'_M$, $j \in \{0, 1, \dots, r\}$, при кожному фіксованому $t \in [0, T]$; $W_{\beta, \gamma}^{M, \alpha}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, – простір, отриманий шляхом поповнення

простору \mathcal{T}_M за нормою $\|v; W_{\beta, \gamma}^{M, \alpha}\| := \sqrt{\sum_{|k| \geq 0} |v_k|^2 (1 + |\mu_k|^2)^\alpha \exp(\beta |\mu_k|^\gamma)}$;

$C^r([0, T], W_{\beta, \gamma}^{M, \alpha})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, – простір функцій $v(t, x)$ таких, що для

кожного $t \in [0, T]$ функції $\partial^j v(t, x) / \partial t^j$, $j \in \{0, 1, \dots, r\}$, належать до простору $W_{\beta, \gamma}^{M, \alpha}$ і є неперервними за t у нормі $W_{\beta, \gamma}^{M, \alpha}$,

$$\|v; C^r([0, T], W_{\beta, \gamma}^{M, \alpha})\| := \sum_{j=0}^r \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{\partial^j v}{\partial t^j}; W_{\beta, \gamma}^{M, \alpha} \right\|;$$

$W_{0, \gamma}^{M, \alpha} \equiv H_{\alpha}^M$ – простір Соболева майже періодичних функцій з показником гладкості α ; $C^n([0, T], W_{0, \gamma}^{M, \alpha}) \equiv C^n([0, T], H_{\alpha}^M)$; $\delta_{r, j} = \begin{cases} 1, & r = j, \\ 0, & r \neq j, \end{cases}$ $r, j \in \mathbb{N}$; c_j , $j = 0, 1, \dots$, – додатні сталі, які не залежать від k та μ_k .

3. Єдиність розв'язку. Надалі вважатимемо, що

$$f(t, x) \in C([0, T], \mathcal{T}'_M), \quad \varphi_j(x) \in \mathcal{T}'_M,$$

$$f(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} f_k(t) \exp(i\mu_k, x),$$

$$\varphi_j(x) = \sum_{|k| \geq 0} \varphi_{jk} \exp(i\mu_k, x), \quad j \in \{1, \dots, 2n\},$$

де

$$f_k(t) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h^p} \int_{[0, h]^p} f(t, x) \exp(-i\mu_k, x) dx,$$

$$\varphi_{jk} = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h^p} \int_{[0, h]^p} \varphi_j(x) \exp(-i\mu_k, x) dx, \quad j \in \{1, \dots, 2n\}.$$

Означення 1. Розв'язком задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0, T], \mathcal{T}'_M)$ називатимемо функцію

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} u_k(t) \exp(i\mu_k, x) \quad (4)$$

таку, що кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, належить до простору $C^{2n}([0, T])$ і справджує, відповідно, рівності

$$L(i\mu_k)u_k^{(2n)}(t) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s| \leq \omega} a_s^r (i\mu_{k_1})^{s_1} \dots (i\mu_{k_p})^{s_p} u_k^{(2r)} = f_k(t), \quad t \in (0, T), \quad (5)$$

$$u_k^{(2j-2)}(0) = \varphi_{jk}, \quad u_k^{(2j-1)}(T) = \varphi_{n+j, k}, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \quad (6)$$

Отже, розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0, T], \mathcal{T}'_M)$ шукаємо у вигляді ряду (4), де $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, є розв'язком задачі (5), (6).

Крім задачі (5), (6), розглядатимемо відповідну їй однорідну задачу

$$L(i\mu_k)u_k^{(2n)}(t) + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s| \leq \omega} a_s^r (i\mu_{k_1})^{s_1} \dots (i\mu_{k_p})^{s_p} u_k^{(2r)} = 0, \quad (5')$$

$$u_k^{(2j-2)}(0) = 0, \quad u_k^{(2j-1)}(T) = 0, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \quad (6')$$

Надалі вважатимемо, що $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ – еліптичний оператор, тобто існує така стала c_0 , що для всіх $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_p) \in \mathbb{R}^p$ виконується нерівність

$$\left| \sum_{|s|=2\ell} b_s (i\xi_1)^{s_1} \dots (i\xi_p)^{s_p} \right| \geq c_0 |\xi|^{2\ell}.$$

Якщо, крім цього, для всіх $\xi \in \mathbb{R}^p$ виконується умова

$$L(i\xi) = \sum_{|s| \leq 2\ell} b_s (i\xi_1)^{s_1} \dots (i\xi_p)^{s_p} \neq 0,$$

то аналогічно, як і в [5], із врахуванням оцінок (3) можна встановити, що існують сталі c_1 та $m \equiv m(c_1)$ такі, що

$$(\forall \mu_k \in M, |\mu_k| \geq m) \quad |L(i\mu_k)| \geq c_1 |\mu_k|^{2\ell} \geq c_1 d_1 |k|^{2\ell\sigma_1}, \quad c_1 \leq c_0. \quad (7)$$

Для кожного $\mu_k \in M$ рівнянню (5') відповідає характеристичне рівняння

$$L(i\mu_k)\eta^{2n} + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s| \leq \omega} a_s^r (i\mu_{k_1})^{s_1} \dots (i\mu_{k_p})^{s_p} \eta^{2r} = 0, \quad (8)$$

η -корені якого є такими:

$$\begin{aligned} \eta_j &:= \eta_j(\mu_k) = \sqrt{|\lambda_j(\mu_k)|} \exp(i \arg \lambda_j(\mu_k) / 2), \quad \arg \lambda_j(\mu_k) \in [-\pi, \pi), \\ \eta_{n+j} &:= \eta_{n+j}(\mu_k) = -\eta_j(\mu_k), \quad j \in \{1, \dots, n\}, \end{aligned} \quad (9)$$

де $\lambda_1(k), \dots, \lambda_n(k)$ – корені рівняння

$$\lambda^n + \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{|s| \leq \omega} a_s^r \frac{(i\mu_{k_1})^{s_1} \dots (i\mu_{k_p})^{s_p}}{L(i\mu_k)} \lambda^r = 0. \quad (10)$$

Припустимо, що для кожного $\mu_k \in M$ корені $\eta_1(\mu_k), \dots, \eta_n(\mu_k), -\eta_1(\mu_k), \dots, -\eta_n(\mu_k)$ рівняння (8) є різними, зокрема, відмінними від нуля. Не порушуючи загальності, надалі будемо вважати, що $\operatorname{Re} \eta_j(\mu_k) \geq 0$, $j \in \{1, \dots, n\}$, $\mu_k \in M$. Для λ -коренів рівняння (10) (див. [14, с. 101]) справджуються такі оцінки:

$$\begin{aligned} |\lambda_j(0)| &\leq c_2, \quad |\lambda_j(\mu_k)| \leq \begin{cases} c_3 |\mu_k|^{\omega-2\ell}, & \omega \geq 2\ell, \\ c_4 |\mu_k|^{(\omega-2\ell)/n}, & \omega < 2\ell, \end{cases} \\ \mu_k &\in M \setminus \{(0)\}, \quad j \in \{1, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Рівняння (5') для кожного $\mu_k \in M$ має фундаментальну систему розв'язків

$$\{u_{kj}(t) = \exp(\eta_j(\mu_k)t), \quad u_{k,n+j}(t) = \exp(-\eta_j(\mu_k)t), \quad j \in \{1, \dots, n\}\},$$

а характеристичний визначник задачі (5), (6) обчислюється за формулою

$$\Delta(\mu_k, T) = (-1)^n \prod_{1 \leq s < \ell \leq n} (\eta_s^2 - \eta_\ell^2)^2 \prod_{j=1}^n (\eta_j (e^{\eta_j T} + e^{-\eta_j T})).$$

Відомо (див. [7, с. 108]), що задача (5), (6) для кожного $\mu_k \in M$ не може мати двох різних розв'язків тоді й лише тоді, коли $\Delta(\mu_k, T) \neq 0$.

Теорема 1. Для єдиності розв'язку задачі (1), (2) у просторі $C^{2n}([0, T], T')$ необхідно та достатньо, щоб виконувались умови

$$(\forall \mu_k \in M, \forall m \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \dots, n\}) \quad i\eta_j(\mu_k)T \neq \pi(m + 1/2). \quad (12)$$

Д о в е д е н н я теорема здійснюється за схемою доведення теорема 1 з [10]. \blacklozenge

4. Існування розв'язку задачі. Надалі будемо вважати, що справджуються умови (12). Тоді для кожного $\mu_k \in M$ задача (5), (6) має єдиний розв'язок, який зобразимо у вигляді суми

$$u_k(t) = w_k(t) + v_k(t),$$

де $w_k(t)$ – розв'язок задачі (5), (6'), $v_k(t)$ – розв'язок задачі (5'), (6). Тут $w_k(t) = \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau$, де $G_k(t, \tau)$, $\mu_k \in M$, – функція Гріна задачі (5), (6).

Розв'язок задачі (1), (2) зображується рядом

$$u(t, x) = \sum_{|k| \geq 0} \left(\int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau + v_k(t) \right) \exp(i\mu_k, x), \quad (13)$$

в якому

$$\begin{aligned} G_k(t, \tau) = & \frac{\operatorname{sgn}(t - \tau)}{4} \sum_{q=1}^n \frac{e^{\eta_q(t-\tau)} + (-1)^n e^{-\eta_q(t-\tau)}}{\eta_q \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq q}}^n (\eta_s^2 - \eta_q^2)} + \\ & + \frac{1}{8} \sum_{s,p,q=1}^n \frac{(-1)^{p+q} S_{n-p}^{(q)} \eta_s^{2p-3}}{\eta_q \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq q}}^n (\eta_\ell^2 - \eta_q^2) \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq s}}^n (\eta_h^2 - \eta_s^2)} (e^{\eta_q T} + e^{-\eta_q T}) \times \\ & \times \left\{ \eta_q \left((-1)^{n-1} e^{\eta_s \tau} - e^{-\eta_s \tau} \right) \left(e^{\eta_q(T-t)} + (-1)^n e^{-\eta_q(T-t)} \right) + \right. \\ & \left. + \eta_s \left((-1)^n e^{\eta_q t} - e^{-\eta_q t} \right) \left(e^{\eta_s(T-\tau)} + (-1)^{n-1} e^{-\eta_s(T-\tau)} \right) \right\}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$v_k(t) = \sum_{q,j=1}^n S_{n-j}^{(q)} \frac{\varphi_{jk} \eta_q (e^{\eta_q(T-t)} + e^{-\eta_q(T-t)}) + \varphi_{n+j,k} (e^{\eta_q t} - e^{-\eta_q t})}{(-1)^{n+j} \eta_q (e^{\eta_q T} + e^{-\eta_q T}) \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq q}}^n (\eta_s^2 - \eta_q^2)}, \quad (15)$$

де $S_\ell^{(q)}$, $\ell \in \{1, \dots, n-1\}$, – сума всіх можливих добутоків елементів $\eta_1^2, \dots, \eta_{q-1}^2, \eta_{q+1}^2, \dots, \eta_n^2$, взятих по ℓ штук у кожному добутку; $S_0^{(q)} \equiv 1$. Функції Гріна $G_k(t, \tau)$, $\mu_k \in M$, у квадраті $K_T = \{(t; \tau) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq \tau \leq T\}$ (крім сторін $\tau = 0$, $\tau = T$) визначені формулами (14). На стороні $\tau = 0$ квадрата K_T кожен з них доозначаємо за неперервністю справа, а на стороні $\tau = T$ – за неперервністю зліва.

Теорема 2. *Нехай справджуються умови (12). Якщо $f \in C([0, T], \mathcal{T}'_M)$ ($C([0, T], \mathcal{T}_M)$), $\varphi_j \in \mathcal{T}'_M$ (\mathcal{T}_M), $j \in \{1, \dots, 2n\}$, то існує єдиний розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0, T], \mathcal{T}'_M)$ ($C^{2n}([0, T], \mathcal{T}_M)$); цей розв'язок визначають формули (13)–(15).*

Д о в е д е н н я теорема ґрунтується на таких самих міркуваннях, як при доведенні теорема 2 з [11]. \blacklozenge

Модулі виразів $\eta_q(\mu_k)$, $e^{\eta_q(\mu_k)T} + e^{-\eta_q(\mu_k)T}$, $\eta_s^2(\mu_k) - \eta_q^2(\mu_k)$, $q, s \in \{1, \dots, n\}$, $q \neq s$, які входять множниками у знаменники виразів (14) та (15) і є відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in M$. У зв'язку з цим для проміжних (між $C^{2n}([0, T], \mathcal{T}_M)$ і $C^{2n}([0, T], \mathcal{T}'_M)$) просторів, зокрема для просторів $C^{2n}([0, T], W_{\beta, \gamma}^{M, \alpha})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане з проблемою малих знаменників (див., наприклад, [8] і бібліографію там). Означення розв'язку задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0, T], W_{\beta, \gamma}^{M, \alpha})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, є аналогічним до означення 2 з [11].

Позначимо

$$\begin{Bmatrix} v \\ w \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} v(t, x) \\ w(t, x) \end{Bmatrix} = \sum_{|k| \geq 0} \begin{Bmatrix} v_k(t) \\ w_k(t) \end{Bmatrix} \exp(i\mu_k, x),$$

$$\theta = \begin{cases} \omega - 2\ell, & \omega \geq 2\ell, \\ (\omega - 2\ell)/n, & \omega < 2\ell. \end{cases}$$

Враховуючи властивості [7, Гл. 1, § 3] функції Гріна $G_k(t, \tau)$, $\mu_k \in M$, отримаємо що

$$\begin{aligned} \frac{d^j}{dt^j} \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau &= \int_0^t \frac{\partial^j}{\partial t^j} G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau, \quad j \in \{0, \dots, 2n-2\}, \\ \frac{d^{2n-1}}{dt^{2n-1}} \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau &= \int_0^t \frac{\partial^{2n-1}}{\partial t^{2n-1}} G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{\partial^{2n-2}}{\partial t^{2n-2}} G_k(t, \tau) \Big|_{\tau=t-0} f_k(t) + \int_t^T \frac{\partial^{2n-1}}{\partial t^{2n-1}} G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau - \\ &- \frac{\partial^{2n-2}}{\partial t^{2n-2}} G_k(t, \tau) \Big|_{\tau=t+0} f_k(t) = \int_0^T \frac{\partial^{2n-1}}{\partial t^{2n-1}} G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau, \\ \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau &= \int_0^t \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau + \int_t^T \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau + \\ &+ \frac{\partial^{2n-1}}{\partial t^{2n-1}} G_k(t, \tau) \Big|_{\tau=t+0} f_k(t) - \frac{\partial^{2n-1}}{\partial t^{2n-1}} G_k(t, \tau) \Big|_{\tau=t+0} f_k(t) = \\ &= \int_0^T \frac{\partial^{2n}}{\partial t^{2n}} G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau + \frac{1}{L(i\mu_k)} f_k(\tau). \end{aligned}$$

Таким чином, для довільного $r \in \{0, \dots, 2n\}$ справджуються оцінки

$$\begin{aligned} \left| \frac{d^r}{dt^r} w_k(t) \right| &= \left| \frac{d^r}{dt^r} \int_0^T G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau \right| = \\ &= \left| \int_0^T \frac{\partial^r}{\partial t^r} G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau + \delta_{r, 2n} \frac{1}{L(i\mu_k)} f_k(t) \right| \leq \\ &\leq \left| \int_0^T \frac{\partial^r}{\partial t^r} G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau \right| + \delta_{r, 2n} \frac{1}{|L(i\mu_k)|} |f_k(t)|. \end{aligned} \quad (16)$$

Надалі окремо розглядатимемо такі два випадки: $2\ell > \omega$ і $2\ell < \omega$.

Спочатку розглянемо випадок, коли $2\ell > \omega$. Міркуючи аналогічно, як при формулюванні і доведенні леми 2 з [11], отримуємо таке допоміжне твердження.

Лема 1. *Якщо $2\ell > \omega$, то для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M$ справджуються оцінки*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \frac{|e^{\eta_q(\mu_k)t} - e^{-\eta_q(\mu_k)t}|}{|e^{\eta_q(\mu_k)T} + e^{-\eta_q(\mu_k)T}|} \leq c_5 |\eta_q(\mu_k)|, \quad q \in \{1, \dots, n\},$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \frac{|e^{\eta_q(\mu_k)(T-t)} + e^{-\eta_q(\mu_k)(T-t)}|}{|e^{\eta_q(\mu_k)T} + e^{-\eta_q(\mu_k)T}|} \leq c_6, \quad q \in \{1, \dots, n\}.$$

Дослідимо питання про існування розв'язку задачі (1), (2) з простору $C^{2n}([0, T], W_{\beta, \gamma}^{M, \alpha})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови (12) та існують такі додатні сталі $c_7, c_8, \alpha_1, \alpha_2$, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M$ справджуються оцінки*

$$|\eta_q(\mu_k)| \geq c_7 (1 + |\mu_k|)^{-\alpha_1}, \quad q \in \{1, \dots, n\}, \quad (17)$$

$$\left| \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq q}}^n (\eta_s^2(\mu_k) - \eta_q^2(\mu_k)) \right| \geq c_8 (1 + |\mu_k|)^{-\alpha_2}, \quad q \in \{1, \dots, n\}. \quad (18)$$

Якщо

$$f \in C([0, T], W_{\beta+p, \theta/2}^{M, \alpha+\theta(2n-1)+2\alpha_2}), \quad \varphi_s \in W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha+\theta(2n-1)+\alpha_2},$$

$$\varphi_{n+s} \in W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha+\theta(2n-1)+\theta/2+\alpha_1+\alpha_2}, \quad s \in \{1, \dots, n\}, \quad \theta = \frac{\omega - 2\ell}{n},$$

то у просторі $C^{2n}([0, T], W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha})$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2); цей розв'язок неперервно залежить від функцій $f(t, x)$ та $\varphi_s(x)$, $s \in \{1, \dots, 2n\}$.

Д о в е д е н н я. Оцінимо норму розв'язку $u(t, x)$ задачі (1), (2) у просторі $C^{2n}([0, T], W_{\beta, \gamma}^{M, \alpha})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Зауважимо, що

$$u(t, x) = w(t, x) + v(t, x). \quad (19)$$

У кожному з трикутників $\{(t, \tau) : 0 \leq t < \tau \leq T\}$ і $\{(t, \tau) : 0 \leq \tau < t \leq T\}$ на підставі формули (14), оцінок (18) та леми 1 для функції Гріна $G_k(t, \tau)$, $\mu_k \in M$, та її похідних отримуємо такі оцінки:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} G_k(t, \tau) \right| &\leq \frac{1}{4} \sum_{q=1}^n |\eta_q|^{r-1} |e^{\eta_q(t-\tau)} + (-1)^n e^{-\eta_q(t-\tau)}| \left| \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq q}}^n (\eta_s^2 - \eta_q^2) \right|^{-1} + \\ &+ \frac{1}{8} \sum_{s,p,q=1}^n |S_{n-p}^{(q)}| |\eta_s|^{2p-3} \left| \eta_q \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq q}}^n (\eta_\ell^2 - \eta_q^2) \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq s}}^n (\eta_h^2 - \eta_s^2) \right|^{-1} \times \\ &\times |\eta_q|^r \left\{ |\eta_q| |(-1)^{n-1} e^{\eta_s \tau} - e^{-\eta_s \tau}| \frac{|e^{\eta_q(T-t)} + (-1)^n e^{-\eta_q(T-t)}|}{|e^{\eta_q T} + e^{-\eta_q T}|} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |\eta_s| \left| \frac{(-1)^n e^{\eta_q t} - e^{-\eta_q t}}{e^{\eta_q T} + e^{-\eta_q T}} \right| \left| e^{\eta_s (T-\tau)} + (-1)^{n-1} e^{-\eta_s (T-\tau)} \right| \Big\} \leq \\
& \leq \frac{1}{4} c_8 \sum_{q=1}^n |\eta_q|^{r-1} \left| e^{\eta_q (t-\tau)} + (-1)^n e^{-\eta_q (t-\tau)} \right| (1 + |\mu_k|)^{\alpha_2} + \\
& + \frac{1}{8} c_5 c_8^2 \sum_{s,p,q=1}^n |S_{n-p}^{(q)}| |\eta_s|^{2p-3} |\eta_q|^r (1 + |\mu_k|)^{2\alpha_2} \times \\
& \times \left\{ |\eta_q| \left| (-1)^{n-1} e^{\eta_s \tau} - e^{-\eta_s \tau} \right| + |\eta_s| \left| e^{\eta_s (T-\tau)} + (-1)^{n-1} e^{-\eta_s (T-\tau)} \right| \right\},
\end{aligned}$$

$$\mu_k \in M, \quad r \in \{0, \dots, 2n\}.$$

З формул (9) та оцінок (11) випливає, що

$$\operatorname{Re} \eta_j(\mu_k) \leq |\eta_j(\mu_k)| \leq c_9 |\mu_k|^{\theta/2},$$

$\mu_k \in M \setminus \{0\}$, $\operatorname{Re} \eta_j(0) \leq \sqrt{c_2}$, $j \in \{1, \dots, n\}$, де $c_9 = \max(\sqrt{c_3}, \sqrt{c_4})$. Зокрема, $|S_{n-r}^{(q)}| \leq c_9^{2(n-r)} |\mu_k|^{\theta(n-r)}$.

Таким чином, у кожному з трикутників $\{(t, \tau) : 0 \leq t < \tau \leq T\}$ і $\{(t, \tau) : 0 \leq \tau < t \leq T\}$ отримаємо такі оцінки:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} G_k(t, \tau) \right| & \leq c_{10} \sum_{s,p,q=1}^n |\mu_k|^{\theta(n-p)} |\mu_k|^{\theta(p-1)} |\mu_k|^{\theta r/2} (1 + |\mu_k|)^{2\alpha_2} \times \\
& \times \exp(c_5 T |\mu_k|^{\theta/2}) \leq c_{11} |\mu_k|^{\theta(2n-2+r)/2} \times \\
& \times (1 + |\mu_k|)^{2\alpha_2} \exp(\rho |\mu_k|^{\theta/2}), \quad \mu_k \in M, \quad r \in \{0, \dots, 2n\}, \quad (20)
\end{aligned}$$

де $\rho \geq c_9 T$.

З оцінок (7), (16), (20) та нерівності Коші – Буняковського випливає, що для кожного $r \in \{0, \dots, 2n\}$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d^r}{dt^r} w_k(t) \right| & \leq \left| \int_0^T \frac{\partial^r}{\partial t^r} G_k(t, \tau) f_k(\tau) d\tau \right| + \frac{\delta_{r,2n}}{|L(i\mu_k)|} |f_k(t)| \leq \\
& \leq \sqrt{\int_0^T \left| \frac{\partial^r}{\partial t^r} G_k(t, \tau) \right|^2 d\tau} \sqrt{\int_0^T |f_k(\tau)|^2 d\tau} + \frac{\delta_{r,2n}}{c_1 |\mu_k|^{2\ell}} |f_k(t)| \leq \\
& \leq c_{11} T |\mu_k|^{\theta(2n-2+r)/2} (1 + |\mu_k|)^{2\alpha_2} \exp(\rho |\mu_k|^{\theta/2}) \times \\
& \times \sqrt{\int_0^T |f_k(\tau)|^2 d\tau} + \frac{\delta_{r,2n}}{c_1 |\mu_k|^{2\ell}} |f_k(t)|. \quad (21)
\end{aligned}$$

Із оцінок елементів спектра M (див. (3)) бачимо, що $|\mu_k| + 1 \leq |\mu_k| + |k|^{\sigma_1} \leq |\mu_k| + |\mu_k|/d_1 = |\mu_k|(1 + 1/d_1)$, $\mu_k \in M$, тобто для всіх $\mu_k \in M$ справджується оцінка

$$|\mu_k| \geq (1 + 1/d_1)^{-1} (|\mu_k| + 1). \quad (22)$$

З оцінок (21) і (22) випливає, що

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d^r}{dt^r} w_k(t) \right| &\leq c_{11} T |\mu_k|^{\theta(2n-2+r)/2} (1 + |\mu_k|)^{2\alpha_2} \exp(\rho |\mu_k|^{\theta/2}) \times \\
&\times \sqrt{\int_0^T |f_k(\tau)|^2 d\tau} + \delta_{r,2n} c_1^{-1} (1 + 1/d_1)^{2\ell} (|\mu_k| + 1)^{-2\ell} |f_k(t)|, \\
r &\in \{0, \dots, 2n\}. \tag{23}
\end{aligned}$$

На підставі оцінок (23) отримаємо, що

$$\begin{aligned}
\|w; C^{2n}([0, T], W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha})\| &:= \\
&:= \sum_{r=0}^{2n} \max_{0 \leq t \leq T} \sqrt{\sum_{|k| \geq 0} |w_k^{(r)}(t)|^2 (1 + |\mu_k|^2)^\alpha \exp(\beta |\mu_k|^{\theta/2})} \leq \\
&\leq \sum_{r=0}^{2n} \max_{0 \leq t \leq T} \left[\sum_{|k| \geq 0} c_{11} T |\mu_k|^{\frac{\theta(2n-2+r)}{2}} (1 + |\mu_k|)^{2\alpha_2} \times \right. \\
&\times \exp(\rho |\mu_k|^{\theta/2}) \left(\int_0^T |f_k(\tau)|^2 d\tau \right)^{1/2} + \frac{\delta_{r,2n} c_{12}}{(|\mu_k| + 1)^{2\ell}} |f_k(t)| \left. \right]^2 \times \\
&\times (1 + |\mu_k|^2)^\alpha \exp(\beta |\mu_k|^{\theta/2}) \Big]^{1/2} \leq (2n + 1) \sqrt{2} c_{13} \times \\
&\times \max_{0 \leq t \leq T} \left(\sqrt{\sum_{|k| \geq 0} |f_k(t)|^2 (1 + |\mu_k|^2)^{\alpha-2\ell} \exp(\beta |\mu_k|^{\theta/2})} + \right. \\
&\left. + \sqrt{\int_0^T \sum_{|k| \geq 0} |f_k(\tau)|^2 (1 + |\mu_k|^2)^{\alpha+\theta(2n-1)+2\alpha_2} \exp((\beta+\rho) |\mu_k|^{\theta/2}) d\tau} \right) \leq \\
&\leq c_{14} \left(\|f; C([0, T], W_{\beta+\rho, \theta/2}^{M, \alpha+\theta(2n-1)+2\alpha_2})\| \right). \tag{24}
\end{aligned}$$

Аналогічно, як при доведенні теореми 3 з [11], на підставі формули (15) можна показати, що

$$\begin{aligned}
\|v; C^{2n}([0, T], W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha})\| &:= \\
&:= \sum_{r=0}^{2n} \max_{0 \leq t \leq T} \sqrt{\sum_{|k| > 0} |v_k^{(r)}(t)|^2 (1 + |\mu_k|^2)^\alpha \exp(\beta |\mu_k|^{\theta/2})} \leq \\
&\leq c_{15} \sum_{s=1}^n \|\varphi_s; W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha+\theta(2n-1)+\alpha_2}\| + \\
&+ c_{16} \sum_{s=n+1}^{2n} \|\varphi_s; W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha+\theta(2n-1)+\theta/2+\alpha_1+\alpha_2}\|. \tag{25}
\end{aligned}$$

З формул (19), (24) і (25) із врахуванням нерівності Мінковського отримуємо твердження теореми. \blacklozenge

Вияснимо можливість виконання оцінок (17) і (18). Справедливе таке допоміжне твердження, яке доводимо аналогічно до леми 3 з [11].

Лема 2. Для майже всіх (стосовно міри Лебега) коефіцієнтів рівняння (1) оцінки (17) і (18) виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M$ при $\alpha_1 > \frac{p}{2\sigma_1} + \theta \frac{n-1}{2}$, $\alpha_2 > (n-1) \left(\frac{p}{\sigma_1} + \theta n - \omega + 2\ell \right)$, де σ_1 – стала з формули (3), а $\theta = (\omega - 2\ell)/n$.

З останньої леми та теореми 3 випливає наступна теорема.

Теорема 4. Нехай справджуються умови (12). Якщо $f \in C([0, T], W_{\beta+p, \theta/2}^{M, \alpha + \theta(2n-1) + 2\alpha_2})$, $\varphi_s \in W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha + \theta(2n-1) + \alpha_2}$, $\varphi_{n+s} \in W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha + \theta(2n-1) + \theta/2 + \alpha_1 + \alpha_2}$, $s \in \{1, \dots, n\}$, $\alpha_1 > \frac{p}{2\sigma_1} + \theta \frac{n-1}{2}$, $\alpha_2 > (n-1) \left(\frac{p}{\sigma_1} + \theta n - \omega + 2\ell \right)$, $\theta = \frac{\omega - 2\ell}{n}$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега) коефіцієнтів рівняння (1) у просторі $C^{2n}([0, T], W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha})$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2); цей розв'язок неперервно залежить від функцій $f(t, x)$ та $\varphi_s(x)$, $s \in \{1, \dots, 2n\}$.

Розглянемо тепер випадок, коли $\omega > 2\ell$. Аналогічно до леми 1 з [11] доводимо таку лему.

Лема 3. Якщо $\omega > 2\ell$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{R}) чисел T та для майже всіх (стосовно міри Лебега) коефіцієнтів рівняння (1) оцінки

$$\max_{0 \leq t \leq T} \frac{|e^{\eta_q(\mu_k)t} - e^{-\eta_q(\mu_k)t}|}{|e^{\eta_q(\mu_k)T} + e^{-\eta_q(\mu_k)T}|} \leq c_{15} (1 + |\mu_k|)^{\alpha_3}, \quad q \in \{1, \dots, n\},$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \frac{|e^{\eta_q(\mu_k)(T-t)} + e^{-\eta_q(\mu_k)(T-t)}|}{|e^{\eta_q(\mu_k)T} + e^{-\eta_q(\mu_k)T}|} \leq c_{16} (1 + |\mu_k|)^{\alpha_3}, \quad q \in \{1, \dots, n\},$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів $\mu_k \in M$ при $\alpha_3 > 3p/(2\sigma_1) + (\omega - 2\ell)(n-1)/2$.

Теорема 5. Нехай справджуються умови (12). Якщо $\omega > 2\ell$, $f \in C([0, T], W_{\beta+p, \theta/2}^{M, \alpha + \chi + \alpha_1 + \alpha_2})$, $\varphi_s \in W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha + \chi}$, $\varphi_{n+s} \in W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha + \chi + \theta/2 + \alpha_1}$, $s \in \{1, \dots, n\}$, $\chi = \theta(2n-1) + \alpha_2 + \alpha_3$, $\theta = \omega - 2\ell$, $\alpha_1 > p/(2\sigma_1) + \theta(n-1)/2$, $\alpha_2 > (n-1)(p/\sigma_1 + \theta n - \omega + 2\ell)$, $\alpha_3 > 3p/(2\sigma_1) + \theta(n-1)/2$, то для майже всіх (стосовно міри Лебега в \mathbb{R}) чисел T та для майже всіх (стосовно міри Лебега) коефіцієнтів рівняння (1) у просторі $C^{2n}([0, T], W_{\beta, \theta/2}^{M, \alpha})$ існує єдиний розв'язок задачі (1), (2); цей розв'язок неперервно залежить від функцій $f(t, x)$ та $\varphi_s(x)$, $s \in \{1, \dots, 2n\}$.

Д о в е д е н н я теорема здійснюється за схемою доведення теореми 3 з урахуванням леми 3 замість леми 1. \blacklozenge

Зауваження 1. З теорем 4 і 5 можна отримати результати праці [11], а також поширити їх на випадок рівняння з ненульовою правою частиною, якщо вважати, що спектр M є множиною $\{k \in \mathbb{Z}^p\}$.

Висновки. У багатовимірному безмежному шарі досліджено задачу з умовами Діріхле – Неймана за часовою змінною та умовами майже періодичності за просторовими координатами для неоднорідних рівнянь із частинними похідними високого порядку, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. Побудовано розв'язок розглянутої задачі у вигляді ряду за системою ортогональних функцій та встановлено умови її однозначної розв'язності у просторі формальних тригонометричних рядів та у шкалі просторів експоненційного типу. Наявність ненульової правої частини рів-

няння зумовила необхідність побудови функцій Гріна відповідних крайових задач та встановлення оцінок інтегралів, у які вони входять. Зауважимо, що у випадку неоднорідного рівняння не вдається встановити умови коректної розв'язності задачі у шкалі просторів Соболева. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку поставленої задачі, використано метричний підхід. Отримані результати можна перенести на випадок задач з умовами Діріхле – Неймана за виділеною змінною та умовами майже періодичності за просторовими координатами для систем рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом.

Роботу виконано за часткової підтримки держбюджетної теми Міністерства освіти і науки України № 0123U101691.

1. Білусяк Н. І., Пташник Б. Й. Крайова задача для рівнянь зі змінними коефіцієнтами, нерозв'язних відносно старшої похідної за часом // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2008. – **51**, № 2. – С. 42–52.
Te same: *Bilusyuk N. I., Ptashnyk B. Yo.* Boundary-value problem for equations with variable coefficients unsolvable with respect to the higher time derivative // *J. Math. Sci.* – 2009. – **162**, No. 1. – P. 44–58.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-009-9619-4>.
2. Бойчук О. А., Чуйко С. М., Кузьміна В. О. Нелінійні інтегрально-диференціальні крайові задачі з відхиленням аргументу, не розв'язані щодо похідної // *Укр. мат. журн.* – 2022. – **74**, № 9. – С. 1170–1181.
– <https://doi.org/10.37863/umzh.v74i9.6707>.
Te same: *Boichuk O. A., Chuiko S. M., Kuzmina V. O.* Nonlinear integro-differential boundary-value problems with deviating argument unsolved with respect to the derivative // *Ukr. Math. J.* – 2023. – **74**, No. 9. – P. 1334–1347.
– <https://doi.org/10.1007/s11253-023-02139-0>.
3. Дворник А. В., Ткаченко В. І. Майже періодичні розв'язки хвильового рівняння із затуханням та імпульсною дією // *Укр. мат. журн.* – 2023. – **75**, № 1. – С. 62–71. – <https://doi.org/10.37863/umzh.v75i1.7400>.
Te same: *Dvornyk A. V., Tkachenko V. I.* Almost periodic solutions of the wave equation with damping and impulsive action // *Ukr. Math. J.* – 2023. – **75**, No. 1. – P. 68–79. – <https://doi.org/10.1007/s11253-023-02186-7>.
4. Ільків В. С., Нитребич З. М., Пукач П. Я. Задача з інтегро-крайовими умовами для системи рівнянь Ляме у просторах майже періодичних функцій // *Буковин. мат. журн.* – 2015. – **3**, № 2. – С. 27–42.
– http://nbuv.gov.ua/UJRN/bmj_2015_3_2_6.
5. Комарницька Л. І., Пташник Б. Й. Крайові задачі для диференціального рівняння, не розв'язного відносно старшої похідної за часом // *Укр. мат. журн.* – 1995. – **47**, № 9. – С. 1197–1208.
Te same: *Komarnitskaya L. I., Ptashnik B. I.* Boundary-value problems for differential equations unsolvable with respect to the higher time derivative // *Ukr. Math. J.* – 1995. – **47**, No. 9. – P. 1364–1377.
– <https://doi.org/10.1007/BF01057511>.
6. Кузь А. М., Пташник Б. Й. Задача з інтегральними умовами для рівнянь, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом // *Зб. праць Ін-ту математики НАН України.* – Том 11, № 2: Диференціальні рівняння і суміжні питання / Відп. ред. Михайлець В. А. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2014. – С. 200–224. – http://nbuv.gov.ua/UJRN/Zpim_2014_11_2_12.
7. Наймарк М. А. Линеиные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
8. Пташник Б. И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
9. Пташник Б. Й., Репетило С. М. Задача Діріхле – Неймана у смузї для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2013. – **56**, № 3. – С. 15–28.
Te same: *Ptashnyk B. Yo., Repetylo S. M.* Dirichlet–Neumann problem in a strip for hyperbolic equations with constant coefficients // *J. Math. Sci.* – 2015. – **205**, No. 4. – P. 501–517. – <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2263-2>.

10. Пташник Б. Й., Репетило С. М. Крайова задача з мішаними умовами для лінійних безтипових рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. – 2016. – **68**, № 5. – С. 665–682.
Te same: Ptashnyk B. I., Repetylo S. M. Boundary-value problem with mixed conditions for typeless linear partial differential equations // Ukr. Math. J. – 2016. – **68**, No. 5. – P. 756–776. – <https://doi.org/10.1007/s11253-016-1256-8>.
11. Пукач П. Я., Репетило С. М. Крайова задача зі змішаними умовами для рівнянь із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом. I // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2023. – **66**, № 3-4. – С. 13–23.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.3-4.13-23>.
12. Самоїленко А. М., Чуйко С. М., Несмелова О. В. Нелінійні крайові задачі, не розв'язані відносно похідної // Укр. мат. журн. – 2020. – **72**, № 8. – С. 1106–1118. – <https://doi.org/10.37863/umzh.v72i8.5986>.
Te same: Samoilenko A. M., Chuiko S. M., Nesmelova O. V. Nonlinear boundary-value problems unsolved with respect to the derivative // Ukr. Math. J. – 2021. – **72**, No. 8. – P. 1280–1293. – <https://doi.org/10.1007/s11253-020-01852-4>.
13. Слюсарчук В. Ю. Умови майже періодичності обмежених розв'язків не розв'язаних відносно похідної нелінійних диференціальних рівнянь // Укр. мат. журн. – 2014. – **66**, № 3. – С. 384–393.
Te same: Slyusarchuk V. Y. Conditions for almost periodicity of bounded solutions of nonlinear differential equations unsolved with respect to the derivative // Ukr. Math. J. – 2014. – **66**, No. 3. – P. 432–442.
– <https://doi.org/10.1007/s11253-014-0941-8>.
14. Фаддеев Д. К., Сомінський І. С. Збірник задач з вищої алгебри. – Київ: Вища школа, 1971. – 316 с.
15. Guerrero-Pérez M., Karlovich Y. The Haseman boundary value problem with matrix coefficient of semi-almost periodic type // Banach J. Math. Anal. – 2023. – **17**. – Art. No. 28. – <https://doi.org/10.1007/s43037-023-00249-2>.
16. Hernández E., Pierri M., Bená M. A. Asymptotically almost periodic solutions for abstract neutral integro-differential equations // Appl. Math. Comput. – 2011. – **217**, No. 22. – P. 8963–8972. – <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.03.102>.
17. Kmit I., Recke L., Tkachenko V. Classical bounded and almost periodic solutions to quasilinear first-order hyperbolic systems in a strip // J. Differ. Equ. – 2020. – **269**, No. 3. – P. 2532–2579. – <https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.02.006>.
18. Kondo Sh. Almost-periodic solutions of linearized Hasegawa – Wakatani equations with vanishing resistivity // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. – 2015. – **133**. – P. 215–239. – <https://doi.org/10.4171/RSMUP/133-11>.
19. Fenglin Yang, Chuanyi Zhang. Remotely almost periodic solutions to parabolic boundary value inverse problems // Taiwanese J. Math. – 2011. – **15**, No. 1. – P. 43–57. – <https://doi.org/10.11650/twjm/1500406160>.

THE DIRICHLET – NEUMANN PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS UNSOLVED WITH RESPECT TO THE HIGHEST TIME DERIVATIVE

A problem with Dirichlet – Neumann conditions with respect to time variable and the conditions of almost periodicity with respect to spatial coordinates for inhomogeneous high-order partial differential equations unsolved with respect to the highest order time derivative is investigated in a multidimensional infinite layer. The conditions for the unique solvability of this problem are established and its solution is constructed. The study of the existence of a solution to the problem is related to the problem of small denominators, which were estimated from below using the metric approach.

Key words: *partial differential equations unsolved with respect to the derivative, Dirichlet – Neumann conditions, almost periodic functions, unique solvability, small denominator, Lebesgue measure.*

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів