

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ДВОВИМІРНОГО ДИНАМІЧНОГО НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПРИ НАЯВНОСТІ В ПРУЖНОМУ ТІЛІ СИСТЕМИ ТОНКИХ ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ

Розв'язано задачу про визначення двовимірного динамічного напруженого стану в пружному ізотропному тілі з системою довільно розміщених тонких жорстких включень. Включення перебувають під дією нормальних і зсувних сил та моментів, що гармонічно змінюються в часі. Вихідну задачу зведено до системи інтегральних рівнянь стосовно стрибків напружень на поверхнях включень. Для розв'язання цієї системи запропоновано ітераційний метод, який дає можливість уникнути розв'язання систем інтегральних рівнянь великої розмірності. Розглянуті приклади демонструють збіжність і стійкість цього методу також у випадку довільних систем включень складної конфігурації.

Ключові слова: динамічне навантаження, включення, інтегральні рівняння, ітераційний метод, коефіцієнти інтенсивності напружень.

Вступ. Деталі машин та будівельні конструкції досить часто мають технологічні дефекти у вигляді тонких включень великої жорсткості [2, 3, 10]. Окрім того, ці деталі інколи містять підкріплювальні елементи, які теж можна розглядати як тонкі жорсткі включення. Жорсткі вставки у вигляді тонких включень також використовують при створенні пружних композитних матеріалів. Такі жорсткі елементи підсилюють загальну міцність конструкції, але, з іншого боку, спричиняють значну концентрацію напружень, що може зумовити появу тріщин [2, 3] і руйнування. Тому визначення і дослідження локальних полів напружень в околах тонких жорстких включень є необхідним для оцінки працездатності і прогнозування руйнування деталей машин та будівельних конструкцій. Це є особливо актуальним в умовах динамічного навантаження, зокрема вібрації, оскільки складна структура хвильових полів, спричинена відбиттям хвилі від поверхонь включень, може істотно підсилювати концентрацію напружень. На сьогоднішній день методи механіки деформівного тіла (метод потенціалів, метод розривних розв'язків) дозволяють легко звести задачу про визначення полів напружень з системою тонких жорстких включень або тріщин до розв'язання систем інтегральних або інтегро-диференціальних рівнянь. Але аналіз сучасної літератури, зокрема детальний огляд, наведений у [2], показує, що тілам із системами тріщин приділено значно більше уваги. Наукових робіт, де розглядаються пружні тіла з системами включень в умовах динамічного навантаження, значно менше. Одними з перших досліджень у цьому напрямку, ймовірно, слід вважати [12, 17], де розв'язано задачі дифракції пружних хвиль на двох паралельних тонких включеннях. Взаємодію паралельних лінійних включень і тріщин розглянуто в [1]. Взаємодію хвиль із періодичною системою тонких криволінійних включень розглянуто в [5]. Напружений стан і коефіцієнти інтенсивності напружень у випадку радіально розміщених жорстких включень визначено в [6, 7]. Останні досягнення стосовно розв'язання динамічних задач з довільними системами включень пов'язані з методом граничних інтегральних рівнянь і його дискретним аналогом – методом граничних елементів [11, 13–15, 18]. Спільним для зазначених робіт є те, що, незважаючи на загальну постановку, числові розрахунки виконано для декількох, здебільшого двох включень. Це пов'я-

[✉] dr.vg.popov@gmail.com

зано з тим, що подібні задачі зводяться до систем інтегральних рівнянь, де кількість рівнянь пропорційна кількості включень. Тому виникають проблеми, пов'язані з необхідністю числового розв'язання систем інтегральних рівнянь великої розмірності. У випадку значної кількості включень актуальною є проблема розробки методу розв'язування, який дає змогу уникнути необхідності розв'язання систем інтегральних рівнянь великої розмірності. У [8] визначено напружений стан при дії хвиль на довільну систему тріщин, де для отриманої системи інтегро-диференціальних рівнянь розроблено ітераційний метод розв'язання. У пропонованій роботі цей метод поширено для визначення напруженого стану в тілі з довільною системою тонких жорстких включень в умовах динамічного навантаження.

1. Постановка задачі і зведення її до систем інтегральних рівнянь.

Розглядаємо пружне ізотропне тіло, яке знаходиться у стані плоскої деформації і містить N тонких жорстких смугових включень. Ці включення в координатній площині Oxy (рис. 1) розміщуються на відрізках довжини $2d_k$, $k = 1, 2, \dots, N$, з центрами у точках $O_k(a_k, b_k)$ і товщини $s_k \ll h_k$. Включення перебувають під дією нормальних і зсувних сил $Q_k e^{-i\omega t}$, $T_k e^{-i\omega t}$, а також моменту $M e^{-i\omega t}$ (рис. 2).

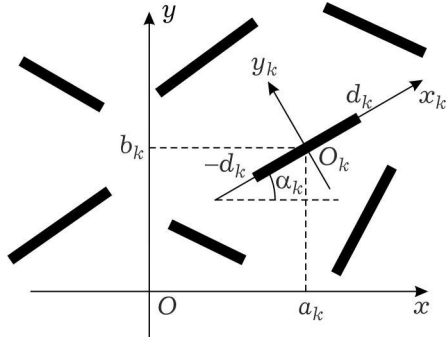


Рис. 1

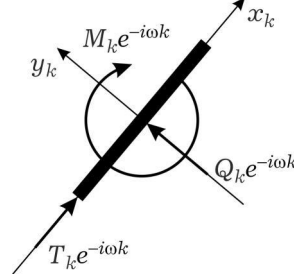


Рис. 2

Нехай $u(x, y)$ і $v(x, y)$ – переміщення, зумовлені рухом включень. За умов плоскої деформації вони повинні задовольняти рівняння руху

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta u &= -\rho \omega^2 u, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \mu \Delta v &= -\rho \omega^2 v, \end{aligned} \quad (1)$$

де λ , μ і ρ – коефіцієнти Ляме і густина пружного середовища. У рівняннях (1) і далі часовий множник $e^{-i\omega t}$ відкидаємо.

Систему рівнянь (1) доповнимо граничними умовами на включеннях, які внаслідок малої товщини сформулюємо на їхніх серединних поверхнях. Для цього з кожним включенням пов'яжемо локальну систему координат $O_k x_k y_k$ з центром у точці $O_k(a_k, b_k)$. Позначимо через $u^k(x_k, y_k)$, $v^k(x_k, y_k)$, $\tau_{yx}^k(x_k, y_k)$, $\sigma_y^k(x_k, y_k)$, $\sigma_x^k(x_k, y_k)$ переміщення і напруження в системі координат, пов'язаній з k -м включенням. Тоді за умов повного зчеплення включень з матрицею повинні виконуватись рівності

$$\begin{aligned} v^k(x_k, 0) &= h_{1k} + \beta_k x_k, \quad u^k(x_k, 0) = h_{2k}, \\ -d_k < x_k < d_k, \quad k &= 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (2)$$

Окрім того, наявність включень зумовлює розриви напружень, стрибки яких позначимо через $\chi_{jk}(y)$, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned}\sigma_y^k(x_k, +0) - \sigma_y^k(x_k, -0) &= \chi_{1k}(y), \\ \tau_{yx}^k(x_k, +0) - \tau_{yx}^k(x_k, -0) &= \chi_{2k}(y), \quad -d_k < x_k < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, N.\end{aligned}\quad (3)$$

Невідомі амплітуди коливань включення, що входять у (2), визначаємо з рівнянь руху, які при гармонічних коливаннях мають вигляд

$$\begin{aligned}-\omega^2 h_{1k} m_k &= \int_{-d_k}^{d_k} \chi_{1k}(\eta) d\eta + Q_k, & -\omega^2 h_{2k} m_k &= \int_{-d_k}^{d_k} \chi_{2k}(\eta) d\eta + T_k, \\ -\frac{4}{3} \omega^2 m_k d_k^2 \beta_k &= \int_{-d_k}^{d_k} \eta \chi_{1k}(\eta) d\eta + M_k, & k &= 1, 2, \dots, N,\end{aligned}\quad (4)$$

де m_k – маса k -го включення.

За сформульованих умов необхідно визначити поле напружень у тілі з системою включень. Для цього використовуємо розривні розв'язки рівнянь (1) зі стрибками напружень (3), побудовані для кожного включення у пов'язаній з ним системі координат. Згідно з [4, 9] вони мають вигляд

$$\begin{aligned}v^{d\ell}(x_\ell, y_\ell) &= \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{1\ell}(\eta) G_{31}(\eta, x_\ell, y_\ell) d\eta + \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{2\ell}(\eta) G_{32}(\eta, x_\ell, y_\ell) d\eta, \\ u^{d\ell}(x_\ell, y_\ell) &= \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{1\ell}(\eta) G_{41}(\eta, x_\ell, y_\ell) d\eta + \int_{-d_\ell}^{d_\ell} \chi_{2\ell}(\eta) G_{42}(\eta, x_\ell, y_\ell) d\eta,\end{aligned}\quad (5)$$

де

$$G_{31} = \frac{1}{\mu x_2^2} \frac{\partial}{\partial y_\ell} \left[\left(x_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_\ell^2} \right) r_{1\ell} - \frac{\partial^2 r_{2\ell}}{\partial x_\ell^2} \right],$$

$$G_{32} = G_{41} = \frac{1}{\mu x_2^2} \frac{\partial^2}{\partial x_\ell \partial y_\ell} (r_{1\ell} - r_{2\ell}),$$

$$G_{42} = \frac{1}{\mu x_2^2} \left[-\frac{\partial^2 r_{1\ell}}{\partial x_\ell^2} + \left(x_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial y_\ell^2} \right) r_{2\ell} \right],$$

$$r_{j\ell}(\eta - x_\ell, y_\ell) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(x_j \sqrt{(\eta - x_\ell)^2 + y_\ell^2} \right), \quad j = 1, 2, \quad \ell = 1, 2, \dots, N,$$

$x_1^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2\mu}$, $x_2^2 = \frac{\omega^2 \rho}{\mu}$ – хвильові числа поздовжніх та зсувних хвиль,

$H_0^{(1)}(\cdot)$ – функція Ганкеля.

У системі Oxy кожен розривний розв'язок (5) визначає такі переміщення та напруження:

$$u^{g\ell} = u^{d\ell} \cos \alpha_\ell - v^{d\ell} \sin \alpha_\ell, \quad v^{g\ell} = u^{d\ell} \sin \alpha_\ell + v^{d\ell} \cos \alpha_\ell,$$

$$\sigma_x^{g\ell} = \sigma_x^{d\ell} \cos^2 \alpha_\ell + \sigma_y^{d\ell} \sin^2 \alpha_\ell - \tau_{xy}^{d\ell} \sin 2\alpha_\ell,$$

$$\sigma_y^{g\ell} = \sigma_x^{d\ell} \sin^2 \alpha_\ell + \sigma_y^{d\ell} \cos^2 \alpha_\ell + \tau_{xy}^{d\ell} \sin 2\alpha_\ell,$$

$$2\tau_{yx}^{g\ell} = \sigma_x^{d\ell} \sin 2\alpha_\ell + \sigma_y^{d\ell} \sin 2\alpha_\ell + 2\tau_{xy}^{d\ell} \cos 2\alpha_\ell,$$

де α_ℓ – кути між осями Ox_ℓ та Ox .

Переміщення, зумовлені рухом включень, подамо у вигляді

$$u(x, y) = \sum_{\ell=1}^N u^{g\ell}(x, y), \quad v(x, y) = \sum_{\ell=1}^N v^{g\ell}(x, y). \quad (6)$$

У подібному вигляді подаємо також напруження σ_x , σ_y , τ_{xy} . Таким чином, за формулами (6) можемо визначити переміщення і напруження в тілі з включеннями за умови, що стрибки (3) є відомими. Для цього переміщення, які входять в умови (2), подаємо через розривні розв'язки (5) за формулами

$$\begin{aligned} v^k(x_k, y_k) &= \sum_{\ell=1}^N v^{k\ell}(x_k, y_k), \quad u^k(x_k, y_k) = \sum_{\ell=1}^N u^{k\ell}(x_k, y_k), \\ v^{k\ell} &= -u_{k\ell}^d \sin \alpha_{k\ell} + v_{k\ell}^d \cos \alpha_{k\ell}, \quad u^{k\ell} = u_{k\ell}^d \sin \alpha_{k\ell} + v_{k\ell}^d \cos \alpha_{k\ell}, \\ \alpha_{k\ell} &= \alpha_k - \alpha_\ell. \end{aligned} \quad (7)$$

Підстановка виразів для переміщень (7) у граничні умови (2) приводить до системи $2N$ інтегральних рівнянь відносно невідомих стрибків напружень. Після вилучення сингулярної складової і перетворень ця система набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{1k}(\tau) \left[\frac{\gamma_k(1+\xi^2)}{2} \ln|\tau-\zeta| + R_{kk}^{31}(\tau, \zeta) \right] d\tau + \\ &\quad + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-1}^1 \varphi_{1\ell}(\tau) R_{k\ell}^{31}(\tau, \zeta) d\tau + \int_{-1}^1 \varphi_{2\ell}(\tau) R_{k\ell}^{32}(\tau, \zeta) d\tau \right] = \\ &= \delta_{1k} + \beta_k \gamma_k \zeta, \\ &\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{2k}(\tau) \left[\frac{\gamma_k(1+\xi^2)}{2} \ln|\tau-\zeta| + R_{kk}^{41}(\tau, \zeta) \right] d\tau + \\ &\quad + \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-1}^1 \varphi_{1\ell}(\tau) R_{k\ell}^{41}(\tau, \zeta) d\tau + \int_{-1}^1 \varphi_{2\ell}(\tau) R_{k\ell}^{42}(\tau, \zeta) d\tau \right] = \delta_{2k}, \\ &k, \ell = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (8)$$

У системі (8) прийнято такі позначення:

$$\begin{aligned} \varphi_{jk}(\tau) &= \mu^{-1} \chi_{jk}(d_k \tau), \quad \gamma_k = d^{-1} d_k, \\ d &= \max\{d_1, d_2, \dots, d_N\}, \quad d_{jk} = d^{-1} h_{jk}, \end{aligned}$$

функції $R_{k\ell}^{js}$, $j = 3, 4$, $s = 1, 2$, $k, \ell = 1, 2, \dots, N$, неперервні при $-1 \leq \tau, \zeta \leq 1$.

Систему (8) необхідно доповнити рівняннями (4) руху включень, які в нових позначеннях набувають вигляду

$$\begin{aligned} \delta_{1k} &= -\frac{1}{2\alpha_0^2 \rho_{0k} \sigma_k} \int_{-1}^1 \varphi_{1k}(\tau) d\tau - \frac{Q_{0k}}{2\alpha_0^2 \rho_{0k} \sigma_k}, \\ \delta_{2k} &= -\frac{1}{2\alpha_0^2 \rho_{0k} \sigma_k} \int_{-1}^1 \varphi_{2k}(\tau) d\tau - \frac{T_{0k}}{2\alpha_0^2 \rho_{0k} \sigma_k}, \end{aligned}$$

$$\beta_k = -\frac{3}{8\alpha_0^2\gamma_k^2\sigma_k} \int_{-1}^1 \tau\varphi_{1k}(\tau) d\tau - \frac{3M_{0k}}{8\alpha_0^2\gamma_k^2\rho_{0k}\sigma_k}. \quad (9)$$

У (9) позначено

$$\begin{aligned} Q_{0k} &= -\mu^{-1}Q_k, & T_{0k} &= -\mu^{-1}T_k, & M_{0k} &= -\mu^{-1}d_k^{-2}M_k, & \alpha_0^2 &= \alpha_2 d, \\ \delta_{jk} &= \delta_{jk}d^{-1}, & \rho_{0k} &= \rho_k d^{-1}, & \sigma_k &= s_k d_k^{-1}, \end{aligned}$$

ρ_k – густина k -го включення.

2. Ітераційний метод розв'язання. Отриману систему інтегральних рівнянь (8) необхідно розв'язувати числовим методом. Щоб уникнути розв'язання системи великої розмірності у випадку значної кількості включень пропонуємо ітераційний метод. Він полягає в тому, що на кожному i -му кроці ітерації ($i \geq 1$) розв'язуємо N пар незалежних інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{1k}^i(\tau) \left[\frac{\gamma_k(1+\xi^2)}{2} \ln|\tau-\zeta| + R_{kk}^{31}(\tau-\zeta) \right] d\tau &= \delta_{1k}^i + \beta_{0k}^i \gamma_k \zeta - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \left[\int_{-1}^1 \varphi_{1\ell}^{i-1}(\tau) R_{k\ell}^{31}(\tau, \zeta) d\tau + \int_{-1}^1 \varphi_{2\ell}^{i-1}(\tau) R_{k\ell}^{32}(\tau, \zeta) d\tau \right], \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_{2k}^i(\tau) \left[\frac{\gamma_k(1+\xi^2)}{2} \ln|\tau-\zeta| + R_{kk}^{42}(\tau-\zeta) \right] d\tau &= \\ &= \delta_{2k}^i - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^N \left[\int_{-1}^1 \varphi_{1\ell}^{i-1}(\tau) R_{k\ell}^{41}(\tau, \zeta) d\tau + \int_{-1}^1 \varphi_{2\ell}^{i-1}(\tau) R_{k\ell}^{42}(\tau, \zeta) d\tau \right], \end{aligned} \quad (10)$$

$\ell, k = 1, 2, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots$

Рівняння (10) розв'язуємо сумісно з рівностями для визначення i -го наближення амплітуд руху включень, отриманими з (9):

$$\begin{aligned} \delta_{2k}^i &= -\frac{1}{2\alpha_0^2\rho_{0k}\sigma_k} \int_{-1}^1 \varphi_{2k}^i(\tau) d\tau - \frac{T_{0k}}{2\alpha_0^2\rho_{0k}\sigma_k}, \\ \delta_{1k}^i &= -\frac{1}{2\alpha_0^2\rho_{0k}\sigma_k} \int_{-1}^1 \varphi_{1k}^i(\tau) d\tau - \frac{Q_{0k}}{2\alpha_0^2\rho_{0k}\sigma_k}, \\ \beta_k^i &= -\frac{3}{8\alpha_0^2\rho_{0k}\gamma_k^2\sigma_k} \int_{-1}^1 \tau\varphi_{1k}^i(\tau) d\tau - \frac{3M_{0k}}{8\alpha_0^2\rho_{0k}\gamma_k^2\sigma_k}. \end{aligned} \quad (11)$$

За нульове наближення ($i = 0$) вибираємо розв'язок рівнянь (10), де в правих частинах відсутні суми. Це означає, що за нульове наближення вибираємо розв'язки, які відповідають окремим поодиноким включенням, що перебувають під дією гармонічного навантаження. Числове розв'язання рівнянь (10) здійснюємо згідно з методикою [4]. Невідомі функції з урахуванням кореневої особливості напружень подаємо у вигляді

$$\varphi_{sk}^i(\tau) = \frac{\psi_{sk}^i(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad (12)$$

де $\psi_{sk}^i(\tau)$ задовольняють умови Гельдера на $[-1, 1]$ і $\psi_{sk}^i(\pm 1) \neq 0$.

Далі нові невідомі функції $\psi_{sk}^i(\tau)$ апроксимуємо інтерполяційними многочленами

$$\psi_{sk}^i(\tau) = \sum_{m=1}^n \psi_{skm}^i \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m)T_n'(\tau)}, \quad \psi_{skm}^i = \psi_{sk}^i(\tau_m), \quad (13)$$

де $T_n(\tau)$ – многочлени Чебишова другого роду, а τ_m , $m = 1, 2, \dots, n$, – корені цього многочлена.

Для визначення ψ_{skm}^i методом механічних квадратур, як і в [4, 16], отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Одним із найважливіших критеріїв оцінки напруженого стану в околі тонких включень є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), введені в [2, 10]. За їхніми значеннями можна прогнозувати утворення тріщин і руйнування матеріалу навколо включень. Після числового розв'язання рівнянь (10) через подання (12), (13) безрозмірні значення КІН за результатами i -ї ітерації знаходимо за формулами [4]

$$k_{s\ell}^{\pm i} = \pm \frac{(-1)^s}{16(1-\nu)} \psi_{s\ell}^i(\pm 1), \quad (14)$$

де

$$\psi_{s\ell}^i(\pm 1) = \mp \frac{(-1)^n}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{s\ell m}^i \left(\operatorname{ctg} \frac{\gamma_m}{2} \right)^{-1},$$

$$\gamma_m = \frac{\pi(2m-1)}{2n}, \quad s = 1, 2, \quad \ell = 1, 2, \dots, N.$$

Тут $k_{1\ell}^{\pm i}$, $k_{2\ell}^{\pm i}$ – відповідно коефіцієнти інтенсивності нормальних та дотичних напружень. Амплітуди коливань включень за результатами i -ї ітерації визначаємо за формулами (11).

3. Аналіз числових результатів. Числову реалізацію запропонованого методу виконано з метою дослідження його практичної збіжності, стійкості ітераційного процесу, спроможності дослідити вплив взаємодії між включеннями на інтенсивність напружень у зовнішньому середовищі.

Щоб порівняти результати, отримані при безпосередньому розв'язанні системи (8), з результатами ітераційного методу, було розглянуто систему з чотирьох включень однакової довжини $2d$ і відносної товщини $\sigma_k = s/d = 0.025$, $k = 1, 2, 3, 4$ (див. рис. 3), конфігурація якої визначається параметрами h і β .

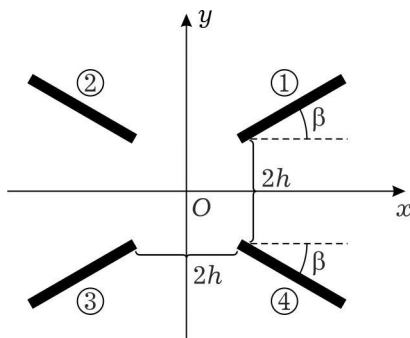


Рис. 3

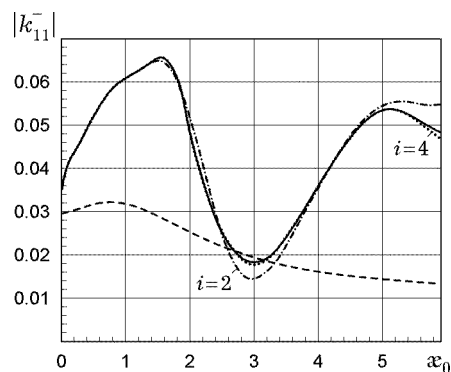


Рис. 4

Припускаємо, що включення є стальними, а матеріалом зовнішнього середовища є алюміній. Всі включення завантажені однаковими нормальними силами $Q_k = Q$, $k = 1, 2, 3, 4$. Геометричні параметри приймаємо таки-

ми: $h/d = 0.5$, $\beta = 45^\circ$. Обчислення виконано для коефіцієнта інтенсивності нормальних напружень k_{11}^{-i} . На рис. 4 показано графіки залежності $|k_{11}^{-i}|$ від безрозмірного хвильового числа $\alpha_0 = \alpha_2 d$. Для порівняння наведено результати, отримані при безпосередньому розв'язанні системи (8) (суцільна крива) та ітераційним методом для кількості ітерацій $i = 2$ та $i = 4$. Продовження ітерацій ($i = 8, 12, 16$) показує практично повне збігання результатів із результатами безпосереднього розв'язання системи (8) методом механічних квадратур, що свідчить про добру збіжність ітераційного процесу та точність отриманих результатів. Штриховою кривою наведено значення КІН для одного включення ($k = 1$, див. рис. 3) під таким самим навантаженням. Бачимо, що взаємодія між включеннями приводить до значного збільшення інтенсивності напружень, причому і при статичному навантаженні. Числові результати показують наявність абсолютного максимуму КІН в інтервалі частот $0 \leq \alpha_0 \leq 2.4$. Далі значення КІН зменшуються і залежність від частоти набуває складного осцилюючого характеру, тому надалі обмежуємось саме таким частотним діапазоном.

Розглянуто також систему однакових включень більш складної конфігурації (рис. 5). Конфігурація системи включень визначається параметрами h і β (в обчисленнях приймаємо значення $h = d/2$, $\beta = 60^\circ$), а включення перебувають під дією однакових нормальних сил. Результати дослідження збіжності ітераційного методу зображено на рис. 6 у вигляді графіків КІН нормальних напружень $|k_{11}^{-i}|$, побудованих за результатами різного числа ітерацій: $i = 2, 4, 8$.

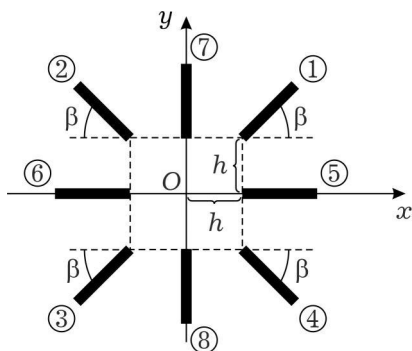


Рис. 5

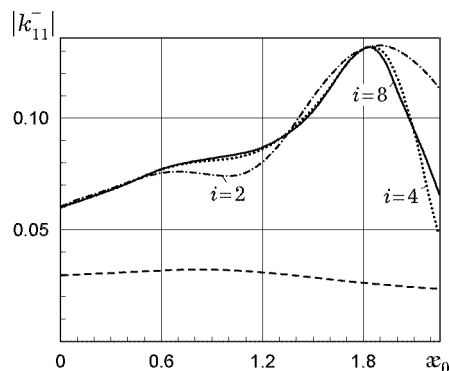


Рис. 6

Встановлено, що вже після восьми ітерацій, $i = 8$, не відбувається зміни результатів, що свідчить про збіжність та стійкість ітераційного процесу і у випадку великої кількості досить щільно розміщених включень. В усьому частотному діапазоні спостерігається значне перевищення значень КІН для одного включення (штрихова лінія). Також спостерігається наявність абсолютного максимуму КІН.

Результати досліджень впливу на інтенсивність напружень типу навантаження і конфігурації системи включень наведено на рис. 7.

Конфігурацію системи включень змінювали наданням куту β різних значень. Графіки на рис. 7а показують залежність коефіцієнтів інтенсивності нормальних напружень від безрозмірного хвильового числа $\alpha_0 = \alpha_2 d$ у випадку навантаження однаковими нормальними силами $Q_{0k} = Q_k \mu^{-1} = Q_0 = 1$, $k = 1, 2, \dots, 8$, а на рис. 7б – моментами $M_{0k} = M_k \mu^{-1} d^{-2} = M_0 = 1$. Графіки на рис. 7с побудовано для коефіцієнтів інтенсивності дотичних напру-

жень $|k_{21}^-|$ при дії на включення зсувних сил $T_{0k} = T_k \mu^{-1} = T_0 = 1$. Можемо бачити, що при дії нормальних сил і моментів найбільша інтенсивність напружень спостерігається для кутів β , близьких до 45° , а при дії зсувних сил – для $\beta = 0^\circ$. Взагалі кажучи, найбільшу інтенсивність напружень викликає навантаження включень зсувними силами. В усіх випадках спостерігаємо істотні значення максимальних КІН, які в декілька разів перевищують статичні значення.

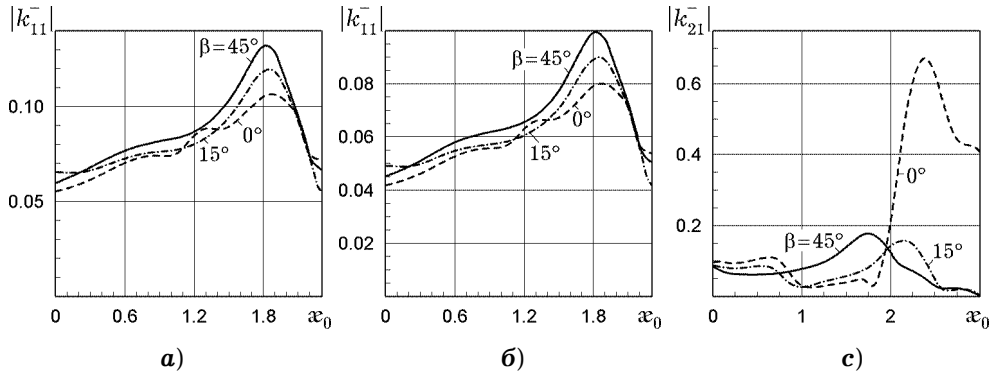


Рис. 7

На рис. 8 показано результати дослідження впливу кількості взаємодіючих включень на інтенсивність напружень. Для цього побудовано графіки залежності коефіцієнтів інтенсивності нормальних напружень для таких випадків включень, зображених на рис. 5: одного включення ($k = 1$), двох (включення $k = 1, 2$), чотирьох (включення $k = 1, 2, 3, 4$), шести (включення $k = 1, 2, \dots, 6$), восьми (включення $k = 1, 2, \dots, 8$). Номери кривих 1–8 відповідають кількості включень.

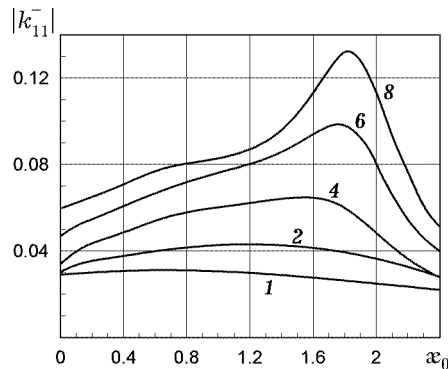


Рис. 8

Встановлено, що в розглянутому частотному діапазоні збільшення кількості включень приводить до збільшення інтенсивності напружень.

Висновки. Запропоновано ітераційний метод визначення інтенсивності напружень при взаємодії включень за динамічного навантаження. Застосування цього методу дає змогу уникнути числового розв'язання систем інтегральних рівнянь великої розмірності. На кожному кроці ітерації розв'язується сукупність незалежних рівнянь, що відповідають окремим включенням. Числове дослідження показало добре узгодження результатів, отриманих ітераційним методом, з результатами безпосереднього розв'язання цієї системи рівнянь іншими методами. Проілюстровано збіжність і стійкість

запропонованого методу для систем достатньо щільно розміщених включень складної конфігурації.

Важливим для оцінки працездатності і прогнозування руйнування деталей машин, що мають конструктивні елементи або технологічні дефекти типу включень великої жорсткості, є існування частот, при яких спостерігаються абсолютні максимуми значень КІН. Ці максимальні значення у декілька разів перевищують значення КІН для поодиноких включень при аналогічному навантаженні. Встановлено, що збільшення кількості взаємодіючих включень приводить до збільшення інтенсивності напружень.

1. Акоюян В. Н., Амирджанян А. А. Вынужденные колебания полубесконечной пластины с коллинеарными трещинами и жесткими включениями // Изв. НАН Армении. Механика. – 2024. – **77**, № 3. – С. 3–17.
– <https://doi.org/10.54503/0002-3051-2024.77.3-3>.
2. Кушнір Р. М., Скальський В. Р., Кунець Я. І., Матус В. В., Окрепкий Ю. С., Селівончик Т. В. Теоретичні основи динамічних процесів у пружних тілах із включеннями. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2023. – 280 с. – Руйнування пружних тіл із включеннями та його діагностування / Під заг. ред. Р. М. Кушніра: В 2 т. – Т. 1.
3. Кушнір Р. М., Скальський В. Р., Кунець Я. І., Матус В. В., Окрепкий Ю. С., Селівончик Т. В. Акустико-емісійне діагностування руйнування включень. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2023. – 402 с. – Руйнування пружних тіл із включеннями та його діагностування / Під заг. ред. Р. М. Кушніра: В 2 т. – Т. 2.
4. Литвин О. В., Попов В. Г. Взаємодія плоских гармонічних хвиль з включенням у пружному просторі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 3. – С. 58–64.
Te same: *Lytvyn O. V., Popov V. H. Interaction of plane harmonic waves with inclusions in the elastic space // Mater. Sci. – 2007. – 43, No. 3. – P. 361–369.*
– <https://doi.org/10.1007/s11003-007-0041-0>.
5. Назаренко О. М., Ложкін О. М. Плоска задача дифракції пружних гармонічних хвиль на періодичних криволінійних вставках // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 2. – С. 94–99.
Te same: *Nazarenko O. M., Lozhkin O. M. Plane problem of diffraction of elastic harmonic waves on periodic curvilinear inserts // Mater. Sci. – 2007. – 43, No. 2. – P. 249–255.* – <https://doi.org/10.1007/s11003-007-0028-x>.
6. Попов В. Г. Взаимодействие плоских упругих волн с системами радиальных дефектов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1999. – № 4. – С. 118–129.
7. Попов В. Г. Дифракция упругих сдвиговых волн на радиально распределенные жесткие включения // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 8. – С. 56–62.
Te same: *Popov V. G. Diffraction of elastic shear waves on radially distributed rigid inclusions // Int. Appl. Mech. – 1996. – 32, No. 8. – P. 624–630.*
– <https://doi.org/10.1007/BF02740760>.
8. Попов В. Г., Кирилова О. І. Ітераційний метод визначення напруженого стану при дії хвилями на систему тріщин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2023. – **66**, № 1-2. – С. 178–187. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.1-2.178-187>.
9. Попов В. Г., Улановский А. Э. Сравнительный анализ дифракционных полей при прохождении упругих волн через дефекты различной природы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1995. – № 4. – С. 99–109.
10. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
11. Goudarzi M., Dal Corso F., Bigoni D., Simone A. Dispersion of rigid line inclusions as stiffeners and shear band instability triggers // Int. J. Solids Struct. – 2021. – **210-211**. – P. 255–272. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.11.006>.
12. Jain D. L., Kanwal R. P. Diffraction of elastic waves by two coplanar and parallel rigid strips // Int. J. Eng. Sci. – 1972. – **10**, No. 11. – P. 925–937.
– [https://doi.org/10.1016/0020-7225\(72\)90002-X](https://doi.org/10.1016/0020-7225(72)90002-X).
13. Lei J., Yang Q., Wang Y.-S., Zhang C. An investigation of dynamic interaction between multiple cracks and inclusions by TDBEM // Compos. Sci. Technol. – 2009. – **69**, No. 7-8. – P. 1279–1285. – <https://doi.org/10.1016/j.compscitech.2009.03.005>.

14. Liu E., Zhang Z. Numerical study of elastic wave scattering by cracks or inclusions using the boundary integral equation method // J. Comput. Acoust. – 2001. – **09**, No. 03. – P. 1039–1054. – <https://doi.org/10.1142/S0218396X01001315>.
15. Mykhas'kiv V., Kunets Y., Matus V., Khay O. Elastic wave dispersion and attenuation caused by multiple types of disc-shaped inclusions // Int. J. Struct. Integr. – 2018. – **9**, No. 2. – P. 219–232. – <https://doi.org/10.1108/IJSI-06-2017-0040>.
16. Popov V. G. An iterative method for solving the problem of diffraction of longitudinal shear waves on a system of thin rigid inclusions // Evolution Mech. Eng. – 2021. – **3**, No. 4. – EME.000568. – <https://doi.org/10.31031/EME.2021.03.000568>.
17. Simons D. A. Scattering of elastic waves by thin inclusions // J. Appl. Phys. – 1980. – **51**, No. 2. – P. 934–940. – <https://doi.org/10.1063/1.327671>.
18. Tadeu A., Amado-Mendes P., António J. The simulation of 3D elastic scattering produced by thin rigid inclusions using the traction boundary element method // Comput. & Struct. – 2006. – **84**, No. 31-32. – P. 2244–2253. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2006.08.034>.

ITERATIVE METHOD FOR DETERMINATION OF THE TWO-DIMENSIONAL DYNAMIC STRESS STATE IN THE PRESENCE OF A SYSTEM OF THIN RIGID INCLUSIONS IN AN ELASTIC BODY

The problem of determination of the two-dimensional dynamic stress state in an elastic isotropic body with a system of arbitrarily placed thin rigid inclusions is solved. These inclusions are subjected to the action of normal and shear forces, and moments that vary harmonically in time. The solution is based on reducing the original problem to a system of integral equations with respect to the stress jumps on the surfaces of the inclusions. An iterative method is proposed to solve this system. This method allows to avoid solving systems of integral equations of high dimension. The considered examples demonstrate the convergence and stability of this method in the case of arbitrary systems of inclusions of complex configuration.

Key words: dynamic loading, inclusion, integral equations, iterative method, stress intensity factors.

Нац. ун-т «Одеська морська акад.», Одеса

Одержано
28.01.24