

ПРУЖНА РІВНОВАГА ПРОСТОРУ З БАГАТОШАРОВИМ АНІЗОТРОПНИМ ТОНКИМ СТІЧКОВИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

З використанням методу функцій стрибків в рамках теорії тонких включень побудовано та апробовано математичну модель тонкого багатошарового стрічкового анізотропного включення в анізотропному просторі за поздовжнього зсуву зусиллями на нескінченності. На прикладах антиплоскої деформації дво- та тришарового включення вивчено вплив компонент тензора пружних сталей на узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень неоднорідності та поле напружень в її околі.

Ключові слова: анізотропія, багатошарове стрічкове включення, поздовжній зсув, концентрація напружень, коефіцієнти інтенсивності напружень.

Вступ. Науково-технічний прогрес спричинений зростаючими інженерними потребами, але обмежений недосконалістю наявних математичних моделей та застосовуваних методів досліджень. Тому вдосконалення і наближення їх до реальності, а також створення нових та більш універсальних математичних моделей і методів завжди є актуальним завданням усієї науки в цілому та механіки деформівного твердого тіла зокрема. Запобігання непередбачуваному руйнуванню тіл та елементів конструкцій, підвищення їхньої міцності та довговічності поряд зі зниженням питомої економічної вартості є одними з основних потреб сучасної економіки. Концентрація напружень, яка може спричинити пришвидшене руйнування тіла, зазвичай виникає в характерних місцях – точках зламу межі тіла, на лініях чи поверхнях поділу різних матеріалів тощо. На сьогодні доволі повно вивчено задачі теорії пружності для однорідних суцільних тіл [3]. Розроблено численні математичні моделі та методи дослідження задач для багатошарових [7] та багатоклинових [16] структур.

Високу концентрацію напружень викликають тонкі неоднорідності структури, які практично завжди наявні у будь-якому реальному елементі конструкції. Врахування їхнього впливу значно ускладнює математичні моделі досліджуваних структур [1, 2, 8, 19] і викликає обчислювальні труднощі при застосуванні аналітичних, аналітико-числових і навіть прямих числових методів розрахунку напружено-деформованого стану. Незважаючи на те, що математичний апарат дослідження макрооб'єктів у рамках механіки деформівного твердого тіла вже доволі добре розвинуто, його застосування до врахування впливу тонких неоднорідностей потребує належної адаптації. Відтак врахування в моделі навіть дуже тонкого включення його пружності, анізотропії, нелінійності, градієнтальності властивостей чи шаруватості структури тощо зустрічається у набагато меншій кількості робіт [1, 7, 10, 12, 17, 20]. Більшість досліджень на сьогодні обмежені вивченням лише граничних випадків тонких деформівних неоднорідностей – тріщин чи абсолютно жорстких включень. Огляди літератури на цю тему подані зокрема у [5–7, 9, 22].

У зв'язку з цим дослідження впливу на матрицю тіла цілком можливої чи навіть конструктивно бажаної внутрішньої структури тонких неоднорідностей, створених, скажімо, методами наплення, а також аналіз взаємодії таких шарів на сьогодні є важливим при створенні нових композитних та смарт матеріалів, а також структур із наперед заданими властивостями. У цій роботі математичну модель поздовжнього зсуву тонкого багато-

[✉] kirill.all@gmail.com

шарового включення у кусково-однорідній ізотропній матриці [12] перенесено на випадок загальної анізотропії простору та складових шарів включення. Апробацію запропонованого підходу здійснено для окремих прикладів пружної рівноваги дво- і тришарового включення у нескінченному ізотропному просторі за його поздовжнього зсуву.

1. Формулювання задачі. Розглянемо антиплоску деформацію анізотропного простору, що містить тонке стрічкове пружне включення L у центрі основної системи координат xOy . Включення L складається з N шарів L_j , які є паралельними до площини xOz . Задано компоненти тензорів модулів пружності a_{km} , $k, m = 4, 5$, простору та $a_{km}^{j, \text{in}}$, $k, m = 4, 5$, $j = 1, \dots, N$, кожного шару. Локальні системи координат $s^j O^j n^j$ кожного з шарів розташовано у точках $z_{0j} = x_{0j} + iy_{0j} = iy_{0j}$. Відомі однакові довжини $2a^j = 2a$ та різні товщини $2h^j$, $j = 1, \dots, N$, шарів. Для спрощення формул вважаємо, що навантаження задано однорідними напруженнями $\sigma_{yz}^0 = \tau_1$, $\sigma_{xz}^0 = \tau_2$ (рис. 1) на нескінченності, хоча врахування у формулах довільного іншого способу чи типу навантаження не є складним. Напружено-деформований стан тіла у площинах, перпендикулярних до напрямку зсуву (вісь Oz) за антиплоскої деформації, є однаковий. Тому обмежимося аналізом полів у площині xOy .

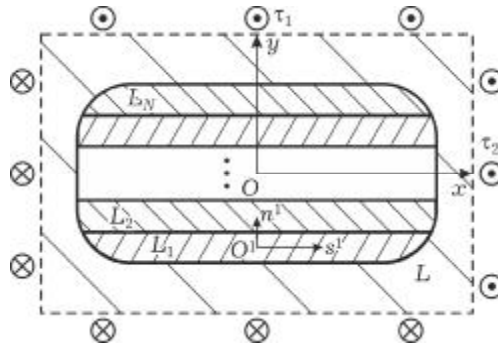


Рис. 1

2. Побудова розв'язку. Скористаємося методом функцій стрибків, описаним зокрема у [7]. Тонку багатшарову неоднорідність L вилучаємо з розгляду, а її вплив на тіло замінюємо невідомими функціями стрибків напружень f_5 та похідних від переміщень f_6 на її серединній лінії $L' \equiv [-a, a] \in Ox$:

$$\sigma_{yz}^- - \sigma_{yz}^+ = f_5(x), \quad \frac{\partial}{\partial x}(w^- - w^+) = f_6(x), \quad x \in L'. \quad (1)$$

При цьому $f_r = 0$, $r = 5, 6$, якщо $x \notin L'$. Позначки «+» і «-» в (1) стосуються верхнього та нижнього берегів включення L відповідно.

Вважаємо, що кожний із шарів L_j включення L характеризується своїми власними функціями стрибків напружень f_5^j та похідних від переміщень f_6^j , $j = 1, \dots, N$, на його серединній лінії $L_j' \equiv [-a^j, a^j] \in O^j s^j$:

$$\sigma_{nz}^{j-} - \sigma_{nz}^{j+} = f_5^j(s^j), \quad \frac{\partial}{\partial s^j}(w^{j-} - w^{j+}) = f_6^j(s^j), \quad (2)$$

$$s^j \in L'_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

Тут $f_r^j = 0$, $r = 5, 6$, якщо $s^j \notin L'_j$; $\sigma_{nz}^{j\pm} = \sigma_{nz}(s^j, n^j \pm h^j)$, $w^{j\pm} = w^j(s^j, n^j \pm h^j)$ – напруження і переміщення на верхньому і нижньому берегах шару L_j . Системи координат $s^j O^j n^j$ та xOy пов'язані очевидною залежністю $x + iy = s^j + i(n^j + y_{0j})$.

Таким чином, шарувате включення L фактично моделюється системою з N механічно ідеально з'єднаних включень L_j . Отже,

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^- &= \sigma_{nz}^{1-}, \quad \sigma_{yz}^+ = \sigma_{nz}^{N+}, \quad \sigma_{nz}^{j-} = \sigma_{nz}^{(j-1)+}, \\ \frac{\partial w^-}{\partial x} &= \frac{\partial w^{1-}}{\partial s^1}, \quad \frac{\partial w^+}{\partial x} = \frac{\partial w^{N+}}{\partial s^N}, \quad \frac{\partial w^{j-}}{\partial s^j} = \frac{\partial w^{(j-1)+}}{\partial s^j}, \quad j = 2 \dots N. \end{aligned} \quad (3)$$

З (1)–(3) випливає, що

$$f_5(x) = \sum_{j=1}^N f_5^j(s^j), \quad f_6(x) = \sum_{j=1}^N f_6^j(s^j), \quad s^j \equiv x. \quad (4)$$

Залежність збуреного впливом включень напруженого стану $\hat{\sigma}_{yz}$, $\hat{\sigma}_{xz}$ анізотропного простору з тонкою неоднорідністю L у її локальній системі координат від невідомих функцій стрибків f_r , $r = 5, 6$, побудовано у [7, 19]. Подамо загальний напружений стан навантаженого анізотропного простору з тонким включенням у такому вигляді [1, 19]:

$$\begin{aligned} \sigma_{yz} + i\sigma_{xz} &= (\sigma_{yz}^0 + i\sigma_{xz}^0) + \hat{\sigma}_{yz} + i\hat{\sigma}_{xz}, \\ \hat{\sigma}_{yz} + i\hat{\sigma}_{xz} &= \frac{1}{4}(g_p t_5(z) - g_m t_5(\bar{z})) + \frac{i}{4a_{55}\alpha}(g_p t_6(z) + g_m t_6(\bar{z})), \\ t_r(z) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'} \frac{f_r(t)}{t-z} dt, \quad r = 5, 6, \\ g_p &= \beta + i(1 + \alpha), \quad g_m = \beta + i(1 - \alpha), \quad i^2 = -1, \\ \alpha &= \frac{\sqrt{a_{44}a_{55} - (a_{45})^2}}{a_{55}}, \quad \beta = \frac{a_{45}}{a_{55}}, \quad z = x + (\beta + i\alpha)y. \end{aligned} \quad (5)$$

Тут так званий однорідний напружений стан σ_{yz}^0 , σ_{xz}^0 характеризує напружений стан простору без неоднорідностей, але із заданим зовнішнім навантаженням.

Для подальшого розв'язування задачі із застосуванням методу функцій стрибків потрібно використати математичну модель кожного шару включення, а також врахувати взаємодію неоднорідності L з матрицею тіла. Оскільки кожен шар L_j включення L вважаємо пружним однорідним включенням, то використаємо для його опису найпростішу математичну модель плівкового включення [1, 7], яка зв'язує напруження і похідні від переміщень на верхньому і нижньому берегах неоднорідності L_j залежностями

$$\sigma_{nz}^{j+} + \sigma_{nz}^{j-} + \frac{a_{45}^{j,\text{in}}}{h^j a_{44}^{j,\text{in}}} \int_{-a^j}^{s^j} (\sigma_{nz}^{j-} - \sigma_{nz}^{j+}) dt +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{h^j a_{44}^{j,\text{in}}} \int_{-a^j}^{s^j} \left(\frac{\partial w^{j-}}{\partial t} - \frac{\partial w^{j+}}{\partial t} \right) dt = \\
& = -2 \frac{a_{45}^{j,\text{in}}}{a_{44}^{j,\text{in}}} \sigma_{sz}^{j,\text{in,mid}}(-a^j) + \frac{w^{j,*}}{h^j a_{44}^{j,\text{in}}}, \\
\frac{\partial w^{j+}}{\partial s^j} + \frac{\partial w^{j-}}{\partial s^j} - \frac{1}{h^j a_{44}^{j,\text{in}}} \int_{-a^j}^{s^j} |r^{j,\text{in}}|^2 (\sigma_{nz}^{j-} - \sigma_{nz}^{j+}) dt + \\
& + \frac{1}{h^j a_{44}^{j,\text{in}}} \int_{-a^j}^{s^j} a_{45}^{j,\text{in}} \left(\frac{\partial w^{j-}}{\partial t} - \frac{\partial w^{j+}}{\partial t} \right) dt = \\
& = 2 \frac{|r^{j,\text{in}}|^2}{a_{44}^{j,\text{in}}} \sigma_{sz}^{j,\text{in,mid}}(-a^j) + \frac{a_{45}^{j,\text{in}}}{a_{44}^{j,\text{in}}} \frac{w^{j,*}}{h^j}, \\
|r^{j,\text{in}}| & = \sqrt{a_{44}^{j,\text{in}} a_{55}^{j,\text{in}} - (a_{45}^{j,\text{in}})^2}, \tag{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{sz}^{j,\text{in,mid}}(-a^j) & \approx \sigma_{xz}^0(-a^j, 0) \frac{a_{44}}{\max(a_{44}, a_{44}^{j,\text{in}})}, \\
w^{j,*} & \approx 2h^j (a_{44} \sigma_{yz}^0(-a^j) + a_{45} \sigma_{xz}^0(-a^j)) \frac{\min(a_{44}, a_{44}^{j,\text{in}})}{a_{44}}. \tag{7}
\end{aligned}$$

Апріорно задані в (7) сталі $\sigma_{sz}^{\ell,\text{in,mid}}(-a^\ell)$ та $w^{\ell,*}(-a^\ell)$ відповідають напруженням на торці включення, а також величині зміщення верхнього берега торця неоднорідності стосовно нижнього [1].

Граничні значення напружень σ_{yz}^\pm та похідних від переміщень $\partial w^\pm / \partial x$ на берегах неоднорідності L з використанням (5) та формули Сохоцького – Племеля [7] набудуть такого вигляду [1]:

$$\begin{aligned}
\sigma_{yz}^\pm & = \mp \frac{1}{2} f_5(x) - \frac{1}{2\pi a a_{55}} \int_{L'} \frac{f_6(t) dt}{t-x} + \sigma_{yz}^0, \\
\frac{\partial w^\pm}{\partial x} & = \mp \frac{1}{2} f_6(x) + \frac{a_{55} \alpha}{2\pi} \int_{L'} \frac{f_5(t) dt}{t-x} + \frac{\partial w^0}{\partial x}, \\
\frac{\partial w^0}{\partial x} & = a_{45} \sigma_{yz}^0 + a_{55} \sigma_{xz}^0. \tag{8}
\end{aligned}$$

Враховуючи (2)–(4), запишемо граничні значення напружень $\sigma_{nz}^{j\pm}$ та похідних від переміщень $\partial w^{j\pm} / \partial s^j$ для кожного шару L_j включення:

$$\begin{aligned}
\sigma_{nz}^{j+} & \equiv \sigma_{nz}^{j-} - f_5^j(s^j) = \sigma_{yz}^- - \sum_{k=1}^j f_5^k(s^k) = \sigma_{yz}^+ + \sum_{k=j+1}^N f_5^k(s^k), \\
\frac{\partial w^{j+}}{\partial s^j} & \equiv \frac{\partial w^{j-}}{\partial s^j} - f_6^j(s^j) = \frac{\partial w^-}{\partial x} - \sum_{k=1}^j f_6^k(s^k) = \frac{\partial w^+}{\partial x} + \sum_{k=j+1}^N f_6^k(s^k),
\end{aligned}$$

або з урахуванням (8):

$$\begin{aligned}
\sigma_{nz}^{j+} &\equiv \sigma_{nz}^{j-} - f_5^j(s^j) = \frac{1}{2} \sum_{k=j+1}^N f_5^k(s^k) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j f_5^k(s^k) - \frac{1}{2\pi\alpha a_{55}} \int_{L'} \sum_{k=1}^N \frac{f_6^k(t) dt}{t-x} + \sigma_{yz}^0, \\
\frac{\partial w^{j+}}{\partial s^j} &\equiv \frac{\partial w^{j-}}{\partial s^j} - f_6^j(s^j) = \frac{1}{2} \sum_{k=j+1}^N f_6^k(s^k) - \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^j f_6^k(s^k) + \frac{a_{55}\alpha}{2\pi} \int_{L'} \sum_{k=1}^N \frac{f_5^k(t) dt}{t-x} + \frac{\partial w^0}{\partial x}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Підстановка (9) у (6) та (7) з урахуванням того, що $s^j \equiv x$, дає систему $2N$ сингулярних інтегральних рівнянь (ССІР) стосовно невідомих функцій стрибків f_r^j , $r = 5, 6$, $j = 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{\pi\alpha a_{55}} \int_{L_j'} \frac{f_6^j(t) dt}{t-x} + \frac{1}{h_j a_{44}^{j,\text{in}}} \int_{-a^j}^{s^j} f_6^j(t) dt - \frac{1}{\pi\alpha a_{55}} \sum_{\substack{k=1, L_k' \\ k \neq j}}^N \int \frac{f_6^k(t) dt}{t-x} + \\
& + \frac{a_{45}^{j,\text{in}}}{h^j a_{44}^{j,\text{in}}} \int_{-a^j}^{s^j} f_5^j(t) dt + \sum_{k=j+1}^N f_5^k - \sum_{k=1}^{j-1} f_5^k = \\
& = -2 \frac{a_{45}^{j,\text{in}}}{a_{44}^{j,\text{in}}} \sigma_{sz}^{j,\text{in},\text{mid}}(-a^j) + \frac{w^{j,*}}{h^j a_{44}^{j,\text{in}}} - 2\sigma_{yz}^0, \\
& \frac{a_{55}\alpha}{\pi} \int_{L_j'} \frac{f_5^j(t) dt}{t-x} - \frac{1}{h^j a_{44}^{j,\text{in}}} \int_{-a^j}^{s^j} |r^{j,\text{in}}|^2 f_5^j(t) dt + \frac{a_{55}\alpha}{\pi} \sum_{\substack{k=1, L_k' \\ k \neq j}}^N \int \frac{f_5^k(t) dt}{t-x} + \\
& + \frac{1}{h^j a_{44}^{j,\text{in}}} \int_{-a^j}^{s^j} a_{45}^{j,\text{in}} f_6^j(t) dt + \sum_{k=j+1}^N f_6^k - \sum_{k=1}^{j-1} f_6^k = \\
& = 2 \frac{|r^{j,\text{in}}|^2}{a_{44}^{j,\text{in}}} \sigma_{sz}^{j,\text{in},\text{mid}}(-a^j) + \frac{a_{45}^{j,\text{in}}}{a_{44}^{j,\text{in}}} \frac{w^{j,*}}{h^j} - 2 \frac{\partial w^0}{\partial x}, \tag{10} \\
& j = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Для її розв'язання необхідно додатково забезпечити виконання умов рівноваги і однозначності переміщень при обході навколо кожного з шарів

$$\int_{-a^j}^{a^j} f_5^j(t) dt = 0, \quad \int_{-a^j}^{a^j} f_6^j(t) dt = 0, \quad j = 1, \dots, N. \tag{11}$$

Система сингулярних інтегральних рівнянь (10), (11) зводиться до ССІР другого роду [13, 15, 21], які виникають також у задачах про відшаровані включення, задачах із тертям, дією штампів та ін. Процедура їхнього розв'язування є загалом відомою [4, 13, 14]. Вона полягає у визначенні порядку особливості у вершині кожного шару, розвиненні невідомих функцій стрибків за поліномами Якобі з виділеною особливістю та застосуванні методів ортогональних поліномів, колокацій чи механічних квадратур. Для однорідних включень в однорідному суцільному середовищі (а також тріщин і абсолютно жорстких включень) особливість біля вершини неоднорідності є

кореневою. Для багат шарових неоднорідностей порядок сингулярності у вершині кожного шару залежатиме від характеристик прилеглих до неї матеріалів.

Складність обчислювальної процедури отримання навіть наближеного розв'язку такої задачі дає підстави для припущення, що особливість у вершині кожного шару включення є кореневою або близькою до кореневої. Нижче для окремих прикладів з використанням числового експерименту визначимо межі застосовності такої гіпотези.

Ефективним параметром оцінки міри концентрації напружень біля фронтальної лінії (точок) тонкого однорідного включення та стійкості матеріалу матриці тіла до руйнування є узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН) [7]. Припущення щодо кореневого характеру особливості для багат шарових тонких включень дає змогу визначити усереднений (інтегральний) характер цих коефіцієнтів. Оскільки розглянута модель шаруватого включення фактично характеризується двома функціями стрибків f_5, f_6 , то УКІН у вершинах A чи B обчислюємо за формулами для пружного включення в анізотропному матеріалі [7]:

$$K_{3,2}^{A,B} - iK_{3,1}^{A,B} = \mp \left(p_5^\pm + \frac{i}{a_{55}\alpha} p_6^\pm \right) \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$p_r^\pm = \lim_{t \rightarrow \pm a} \left(\sqrt{|a \mp t|} f_r(\pm a) \right) = \lim_{t \rightarrow \pm a} \left(\sqrt{|a \mp t|} \sum_{j=1}^N f_r^j(\pm a) \right), \quad r = 5, 6.$$

Тут верхній знак відповідає вершині B , а нижній – вершині A . Зазначимо, що однакові підходи до визначення УКІН для шаруватого включення і тонкого однорідного стрічкового включення дають змогу використовувати ті самі критерії руйнування і відомі експериментальні результати для наближеної якісної та кількісної оцінки стійкості матеріалу з шаруватим включенням до руйнування.

3. Наближене розв'язування ССІР. Функції стрибків f_r^j подаємо у вигляді скінченних сум рядів з кореневою особливістю

$$f_r^j(t) \approx \sum_{m=0}^{M_j} \frac{A_m^{rj} T_m(t/a^j)}{\sqrt{1 - (t/a^j)^2}}, \quad r = 5, 6, \quad j = 1, \dots, N. \quad (12)$$

Тут A_m^{rj} – невідомі коефіцієнти, T_m – поліноми Чебишова першого роду, M_j – задана кількість членів розвинення в ряди функцій стрибків. Після підстановки (12) у (10) і (11) задовольняємо отриману систему на скінченному наборі точок колокації $x_k \in (-a^j, a^j)$, $k = 1, \dots, M_j$. В ролі набору точок колокацій використовуємо нулі полінома Чебишова $x_k = a \cos(\pi k / (M_j + 1))$, $k = 1, \dots, M_j$. З використанням наближених формул [7]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{a T_m(t/a) dt}{\sqrt{a^2 - t^2} (t - x_k)} = U_{m-1}(x_k/a),$$

$$\int_{-a}^{x_k} \frac{T_m(t/a) dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} = \begin{cases} \pi - \arccos(x_k/a), & m = 0, \\ -\sin(m \arccos(x_k/a)) / m, & m \neq 0, \end{cases}$$

$$T_m(x_k) = \cos(m \arccos(x_k/a)), \quad U_m(x_k) = \frac{\sin((m+1) \arccos(x_k/a))}{\sin(\arccos(x_k/a))}$$

ССІР (10), (11) зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь порядку $2 \sum_{j=1}^N (M_j + 1)$ стосовно коефіцієнтів A_m^{rj} , яку розв'язуємо методом Гаусса.

Згідно з (12) знаходимо функції стрибків, які разом з (4), (5) дають нам напружений стан простору з шаруватим включенням.

Вважаємо, що припущення про кореневу особливість у вершині шаруватого включення є коректним, коли результати обчислення УКІН збігаються з прийнятною, порівняно з однорідним включенням, швидкістю, відрізняючись не більше ніж на 1% для значень $M_j = M$ і $M_j = 2M$. У наведених нижче прикладах коректні (збіжні) значення УКІН було отримано вже для $M = 80$. Вибір саме УКІН для оцінювання коректності моделі обумовлений тим, що вони характеризують пов'язану з особливістю асимптотику напружено-деформованого стану на фронті неоднорідності. Тому їхнє обчислення є найчутливішим до величини похибки у виборі показника особливості розв'язку сингулярних інтегральних рівнянь. А за міру коректності застосування моделі до вибраної конфігурації структури обрано швидкість збіжності застосованої обчислювальної схеми, яка для гомогенного включення (усі шари з того самого матеріалу), коли особливість є кореневою, повинна бути найвищою. З віддаленням від фронту включення напружено-деформований стан буде щораз краще узгоджуватися із реальним у кожному випадку використання математичної моделі.

4. Числові результати і обговорення. На прикладах поздовжнього зсуву анізотропного простору з тонкою дво- та тришаровою стрічковою неоднорідністю дослідимо коректність і межі застосовності запропонованих у математичній моделі припущень та наближень.

Приклад 1. Дослідимо двошарове включення в ізотропному просторі з модулем зсуву G . Напруження зсуву $\sigma_{yz}^0 = \tau_1$, $\sigma_{xz}^0 = 0$ задане на нескінченності (рис. 2). Зазначимо, що для ізотропного матеріалу за антиплоскої деформації виконуються такі співвідношення між компонентами тензора пружних сталей і модулем зсуву: $1/a_{44} = 1/a_{55} = G$, $a_{45} = 0$. Вважаємо, що шари включення також є ізотропними, $1/a_{44}^{1,in} = 1/a_{55}^{1,in} = G_1$, $a_{45}^{1,in} = 0$; $1/a_{44}^{2,in} = 1/a_{55}^{2,in} = G_2$, $a_{45}^{2,in} = 0$. Тут G_1 , G_2 – модулі зсуву шарів L_1 , L_2 відповідно. Півтовщини шарів є однаковими: $h^1 = h^2 = 0.005a$. На рис. 2 подано графіки залежностей нормованих значень УКІН $K_{3j} = K_{3,j}^B / (\tau_1 \sqrt{\pi a})$, $j = 1, 2$, від $k = \log(G_1/G)$ для чотирьох значень відносного модуля зсуву $G_2/G = 10^{-6}, 0.01, 0.02, 0.04$ у випадку податнішого щодо матриці шару L_2 . Зазначимо, що з огляду на симетрію навантаження щодо площини xOz маємо $K_{3,1}^A = K_{3,1}^B$, $K_{3,2}^A = -K_{3,2}^B$.

На рис. 2 відображено коректні значення нормованих УКІН лише для істотно податніших за тіло шарів включення, $k < -1$, оскільки для контрастних випадків, таких як шари з одночасно жорсткішого та податнішого від матриці матеріалів, не вдається отримати збіжних значень УКІН. Проблеми зі збіжністю виникають навіть у випадку, коли матеріал одного з шарів збігається з матеріалом простору. Тому для таких задач все таки необхідно враховувати правильний (інший від запропонованого кореневого) показник сингулярності у вершині кожного шару включення.

На збіжність також доволі сильно впливає товщина шарів неоднорідності. Зокрема, для однорідних ізотропних і анізотропних включень вдавалося [7] отримати УКІН з похибкою меншою від 1% для півтовщини $0.1a$, де a – півдовжина однорідного включення. У цьому прикладі товщини

вибрані практично на два порядки меншими. Це пов'язане з необхідністю у разі шаруватості включення залишатися в межах припущень теорії тонких включень, рахуватися зі збільшенням порядку ССІР, зростанням накопичених похибок обчислень та впливом наближеності використаного порядку особливості розв'язку. З аналізу ССІР (10) видно, що її розв'язок залежить від таких співвідношень між товщиною і компонентами тензора пружних сталей j -го шару: $1/(h^j a_{44}^{j,in})$, $|r^{j,in}|^2/(h^j a_{44}^{j,in})$, $a_{45}^{j,in}/(h^j a_{44}^{j,in})$. Тому для отримання швидкозбіжних результатів у разі збільшення товщини шарів включення найкраще мати справу із більш податними матеріалами шарів.

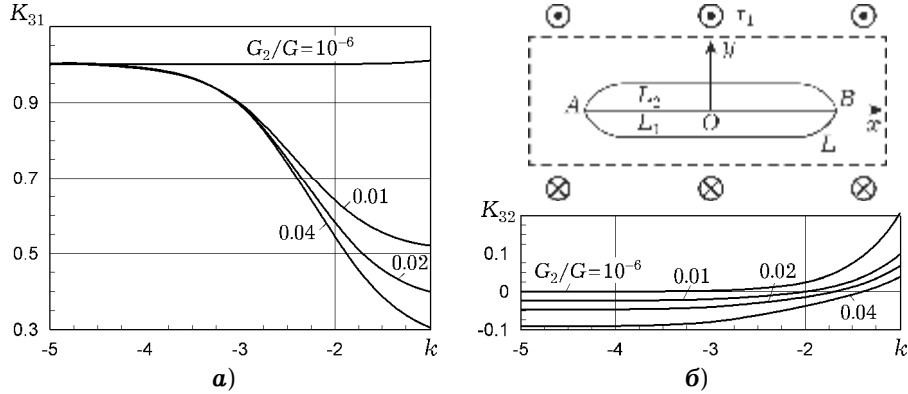


Рис. 2

Коли матеріали шарів є однаковими, обчислені значення нормованих УКІН збігаються до відповідних значень нормованих УКІН для однорідного включення.

На рис. 2 спостерігаємо, як зі зростанням параметра k (шар L_1 стає жорсткішим) графік нормованого УКІН K_{31} для значень $G_2/G = 0.04, 0.02, 0.01$ монотонно спадає. Для значення $G_2/G = 10^{-6}$ (шар L_2 є дуже податним, фактично тріщина) за обраного способу навантаження $K_{31} \approx 1$ і практично не залежить від розглянутих значень k . У цьому прикладі УКІН $K_{3,1}^{A,B}$ є основною характеристикою тріщиностійкості, оскільки саме вони набувають екстремальних значень, а УКІН $K_{3,2}^{A,B}$ є близькими до нуля. Проте можна зауважити, що нормований УКІН K_{32} зі зростанням k все таки монотонно зростає для всіх розглянутих значень G_2/G . Для $k < -3$, $G_2/G = 10^{-6}$ значення нормованих УКІН $K_{31} \approx 1$, $K_{32} \approx 0$, що збігається з очікуваними значеннями КІН для тріщини у нескінченному просторі.

Досліджено також випадок жорсткіших за матеріал простору шарів включення ($G_2/G = 25, 50, 100, 10^6$, $k > 1$) за такого самого навантаження. Значення нормованих УКІН у такому випадку є близькими до нуля, $K_{31} \approx 0$, $K_{32} \approx 0$, тому на графіках їх не наведено. Відносно жорстке, шарувате чи не дуже тонке включення за такого способу навантаження практично не чинить опору деформуванню простору і тому реальний порядок особливості у вершині неоднорідності теж не відіграє жодної ролі.

Приклад 2. Дослідимо попередній приклад для іншого способу навантаження: $\sigma_{yz}^0 = 0$, $\sigma_{xz}^0 = \tau_2$. На рис. 3 подано графіки залежностей нормованих УКІН $K_{3j} = K_{3,j}^A/(\tau_2 \sqrt{\pi a})$, $j = 1, 2$, від $k = \log(G_1/G)$ для чотирьох значень відносного модуля зсуву $G_2/G = 25, 50, 100, 10^6$ жорсткішого щодо

матриці простору шару L_2 . У цьому разі з огляду на симетрію навантаження щодо площини yOz маємо $K_{3,1}^A = -K_{3,1}^B$, $K_{3,2}^A = K_{3,2}^B$.

Подібно як у першому прикладі, для висококонтрастних випадків, таких як поєднання шарів з відносно жорсткішого та податнішого матеріалів, не вдається отримати збіжних УКІН. Тому значення УКІН на рис. 3 наведено лише для жорсткіших від тіла шарів включення ($k > 1$). На противагу першому прикладу у цій задачі домінують коефіцієнти інтенсивності напружень $K_{3,2}^{A,B}$, а $K_{3,1}^{A,B}$ є близькими до нуля.

На основі рис. 3 робимо висновок, що зі збільшенням k нормований УКІН $K_{3,2}$ монотонно зростає, оскільки жорсткіше включення сильніше опирається деформуванню. При цьому значення нормованого УКІН $K_{3,1}$ монотонно зменшуються. Для $k > 3$ (відносно жорсткий шар L_1) нормовані УКІН $K_{3,2}$ для значень $G_2/G = 25, 50, 100$ практично збігаються та з подальшим збільшенням параметра k прямують до одиниці. Для дуже жорсткого шару L_2 ($G_2/G = 10^6$) за такого способу навантажування значення $K_{3,2}$ практично не залежать від зміни параметра k і збігаються із нормованим значенням УКІН для абсолютно жорсткого включення у безмежному просторі (одиницею).

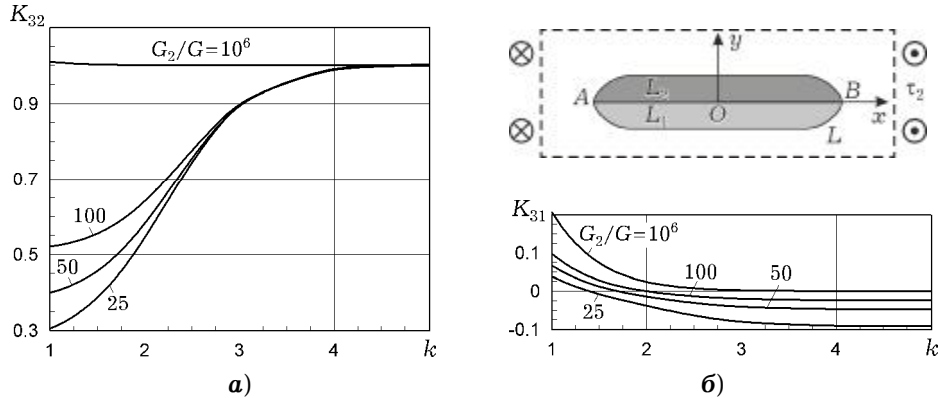


Рис. 3

Дослідження податніших за матеріал простору шарів включення ($G_2/G = 0.04, 0.02, 10^{-2}, 10^{-6}$, $k < -1$) за такого самого навантаження дало практично нульові значення нормованих УКІН: $K_{3,1} = 0$, $K_{3,2} = 0$. Зазначимо, що графіки на рис. 2 і рис. 3 є в якісному сенсі симетричними стосовно осі ординат. Це у випадку шаруваті неоднорідності теж цілком відповідає назві абсолютно жорсткого включення спершу негативною тріщиною, а пізніше – антитріщиною [11, 18].

Приклад 3. Розглянемо видозмінену задачу прикладу 1, коли шар L_1 є анізотропним. Дослідимо випадок, коли $a_{45}^{1,in} = 0$, а $a_{44}^{1,in}$ і $a_{55}^{1,in}$ – змінювані. На рис. 4 наведено графіки залежностей нормованих УКІН $K_{3,j} = K_{3,j}^B / (\tau_1 \sqrt{\pi a})$, $j = 1, 2$, від параметра $k = \log(1/(Ga_{44}^{1,in}))$ для чотирьох значень відносного модуля зсуву $G_2/G = 10^{-6}, 0.01, 0.02, 0.04$ податнішого щодо матриці простору шару L_2 . Обчислення здійснено для значень $Ga_{55}^{1,in} = 25, 50, 100, 10^6$ (відносно податний в напрямку осі абсцис матеріал шару L_1). Тут, як і для першого прикладу, $K_{3,1}^A = K_{3,1}^B$, $K_{3,2}^A = -K_{3,2}^B$.

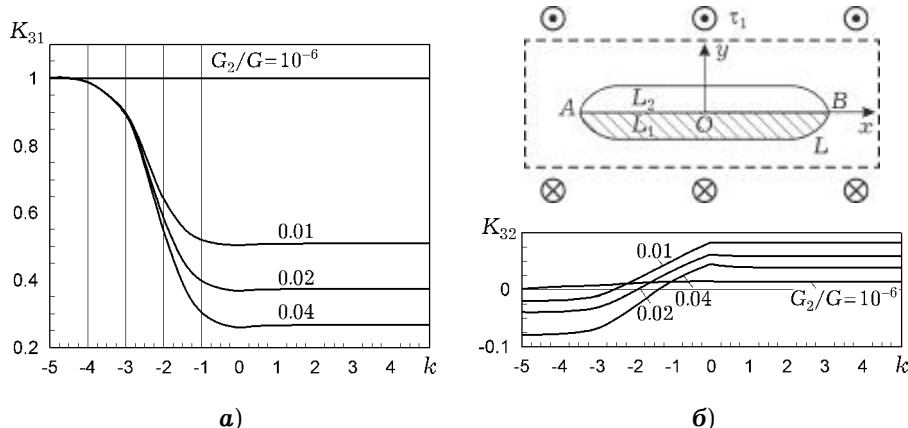


Рис. 4

Виявлено, що нормований УКІН K_{31} практично не залежить від розглянутих значень $a_{55}^{1,in}$. Тому якісні висновки прикладу 1 щодо характеру впливу параметра k і тут залишаються слушними. На відміну від прикладу 1, нормований УКІН K_{31} виявився швидкозбіжним для всіх розглянутих значень $k \in [-5, 5]$. Тобто, завдяки ортотропії вдалося дещо розширити межі допустимих застосувань запропонованого підходу на випадок контрасту властивостей шарів включення. На рис. 4 спостерігаємо, як зі зростанням k нормований УКІН K_{31} для $G_2/G = 0.01, 0.02, 0.04$ монотонно спадає і вже для $k > 0$ набуває практично сталих значень. Для значення $G_2/G = 10^{-6}$ (дуже податний шар L_2 , фактично тріщина) нормований УКІН $K_{31} \approx 1$ і практично не залежить від зміни k .

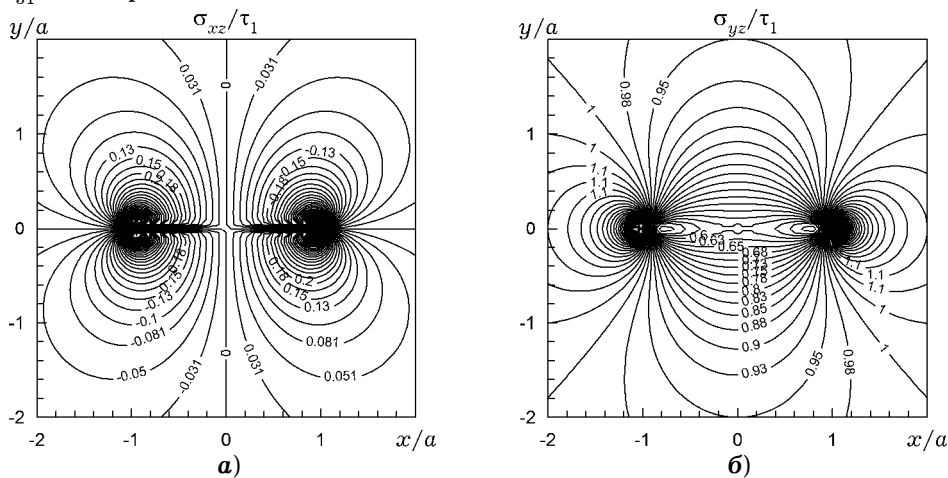


Рис. 5

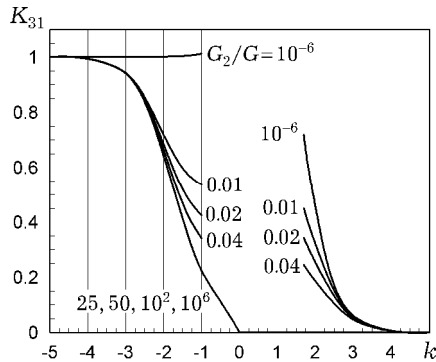
Зазначимо, що для матеріалу шару L_1 , жорсткішого за простір в напрямку осі абсцис ($Ga_{55}^{1,in} = 10^{-6}, 0.01, 0.02, 0.04$), все таки виникли проблеми зі збіжністю УКІН. Отже, для таких випадків необхідно враховувати некореневі порядки особливості у вершинах шарів неоднорідності.

На рис. 5 зображено лінії рівня нормованих напружень $\sigma_{yz}/\tau_1, \sigma_{xz}/\tau_1$ для конкретного випадку, коли шар L_1 є анізотропним ($Ga_{45}^{1,in} = 10, Ga_{44}^{1,in} = 60, Ga_{55}^{1,in} = 50$), а шар L_2 – ізотропним ($Ga_{45}^{2,in} = 0, Ga_{44}^{1,in} = 100, Ga_{55}^{1,in} = 100$).

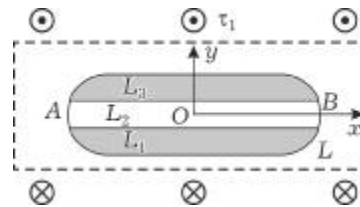
Оскільки розглянута у цьому прикладі двошарова неоднорідність є дуже тонкою і матеріали обох шарів є більш податними, ніж матеріал простору, то на рис. 5 лінії сталих напружень є практично симетричними стосовно осей координат. Незначні зміни матеріалів шарів приводять лише до кількісної зміни ліній сталих напружень. Якісні зміни, зокрема істотне згущення ліній рівня біля однієї з поверхонь шаруватого включення, будуть спостерігатися для випадку дослідження двошарового включення з контрастними матеріалами шарів (податний шар – жорсткий шар).

Приклад 4. Дослідимо тришарове включення в ізотропному просторі з модулем зсуву G . На нескінченності задано однорідне поле напружень $\sigma_{yz}^0 = \tau_1$, $\sigma_{xz}^0 = 0$ (рис. 6). Вважаємо, що шари включення також є ізотропними, $1/a_{44}^{1,in} = 1/a_{55}^{1,in} = G_1$, $a_{45}^{1,in} = 0$; $1/a_{44}^{2,in} = 1/a_{55}^{2,in} = G_2$, $a_{45}^{2,in} = 0$; $1/a_{44}^{3,in} = 1/a_{55}^{3,in} = G_3$, $a_{45}^{3,in} = 0$. Тут G_1 , G_2 , G_3 – модулі зсуву шарів L_1 , L_2 , L_3 відповідно. Вважаємо, що матеріали крайніх шарів однакові, $G_1 = G_3$. Півтовщини шарів є такими: $h^1 = h^2 = h^3 = 0.005a$. На рис. 6 подано графік залежності нормованого УКІН $K_{31} = K_{3,1}^B / (\tau_1 \sqrt{\pi a})$ від $k = \log(G_1/G)$ для восьми значень відносного модуля зсуву $G_2/G = 10^{-6}$, 0.01, 0.02, 0.04, 25, 50, 100, 10^6 шару L_2 . Зазначимо, що для цієї задачі $K_{3,1}^A = K_{3,1}^B$, $K_{3,2}^A = K_{3,2}^B = 0$.

На противагу прикладам для двошарового включення, тут швидкозбіжні результати отримано як для слабо контрастних шарів (податних або жорстких), так і для сильно контрастних – для випадків жорсткого шару між двома податними та двох жорстких шарів, роз'єднаних дуже податним матеріалом (тріщиною).



а)



б)

Рис. 6

Коли матеріал проміжного шару L_2 є жорсткішим за матеріал простору ($G_2/G = 25, 50, 100, 10^6$), результати обчислення УКІН у межах похибки обчислень збіглися між собою для всіх розглянутих значень G_2 . Тобто, зміна модуля пружності жорсткішого за матеріал простору середнього шару доволі тонкого включення за заданого навантаження практично не впливає на зміну напруженого стану тіла в околі вершини неоднорідності. Зі зростанням k (зростання модулів пружності шарів L_1 та L_3) значення УКІН поступово спадають і для $k \geq 0$ $K_{31} \approx 0$, оскільки, як і в прикладі 1, жорсткіше за матеріал простору шарувате включення за такого навантаження практично не впливає на деформування простору і уточнення по-

рядків особливостей у вершинах шарів неоднорідності не відіграє жодної ролі.

Коли матеріал шару L_2 є суттєво податнішим за матеріал простору, $G_2/G = 10^{-6}, 0.01, 0.02, 0.04$, проблеми зі збіжністю виникли для $k \approx [-1, 1.7]$. Для дуже податного матеріалу шару L_2 ($G_2/G = 10^{-6}$) нормований УКІН є сталим, $K_{31} \approx 1$ при $k < -1$ і швидко спадає до нуля для $k > 1.7$. Для значень $G_2/G = 0.01, 0.02, 0.04$ зі зростанням k значення цього нормованого УКІН зменшуються.

При $k < -4$ (дуже податний матеріал зовнішніх шарів L_1 та L_3 включення) нормований УКІН $K_{31} \approx 1$ і не залежить від розглянутих значень G_2 . Для $k > 4$ (дуже жорсткі матеріали шарів L_1 та L_3) нормований УКІН включення є нульовим ($K_{31} \approx 0$) і за такого навантаження не залежить від модуля пружності шару L_2 .

Приклад 5. Дослідимо попередній приклад поздовжнього зсуву тришарового включення в ізотропному просторі для випадку, коли шар L_2 є ізотропним ($1/a_{44}^{2,in} = 1/a_{55}^{2,in} = G_2$, $a_{45}^{2,in} = 0$), а шари L_1, L_3 – ортотропні з однаковими пружними сталими: $a_{44}^{1,in} = a_{44}^{3,in}$, $a_{45}^{1,in} = a_{45}^{3,in} = 0$, $a_{55}^{1,in} = a_{55}^{3,in}$. На рис. 7, рис. 8 подано графіки залежностей нормованого УКІН $K_{31} = K_{3,1}^B / (\tau_1 \sqrt{\pi a})$ від параметра $k = \log(1/(Ga_{44}^{1,in}))$ (матеріали шарів L_1 та L_3 зі зміною k змінюються одночасно) для восьми значень відносного модуля зсуву $G_2/G = 10^{-6}, 0.01, 0.02, 0.04, 25, 50, 100, 10^6$ шару L_2 при заданих значеннях $a_{55}^{1,in}, a_{55}^{3,in}$. Так само, як і для попереднього прикладу, $K_{3,1}^A = K_{3,1}^B$, $K_{3,2}^{AB} = 0$.

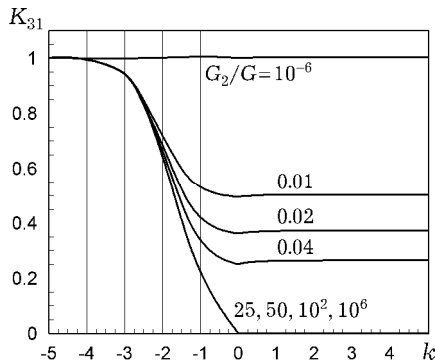


Рис. 7

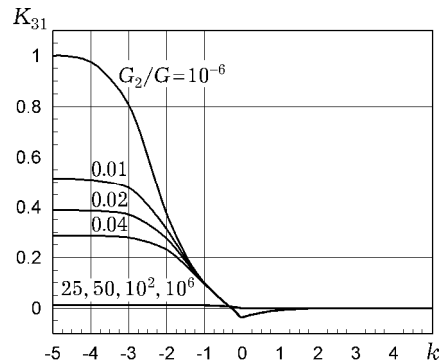


Рис. 8

На рис. 7 обчислення нормованого УКІН здійснено для відносно податних в напрямку осі абсцис матеріалів шарів L_1, L_3 , коли пружні сталі набувають значень $Ga_{55}^{1,in} = Ga_{55}^{3,in} = 25, 50, 100, 10^6$. Виявлено, що нормований УКІН K_{31} не залежить від розглянутих податних значень $a_{55}^{1,in}$ і він є збіжним для всіх розглянутих значень $k \in [-5, 5]$.

З рис. 7 спостерігаємо, як зі зростанням k нормований УКІН $K_{3,1}$ для значень $G_2/G = 0.01, 0.02, 0.04$ відносного модуля зсуву податного матеріалу середнього шару L_2 монотонно спадає і вже для $k > 0$ набуває практично

сталих значень. Для значення $G_2/G = 10^{-6}$ (дуже податний шар L_2 , фактично тріщина) нормований УКІН $K_{31} \approx 1$ і практично не залежить від зміни k . Для жорсткішого за матеріал простору шару L_2 для значень $G_2/G = 25, 50, 100, 10^6$ виявлено, що значення нормованого УКІН, у межах похибки обчислень, практично збігаються.

На рис. 8 обчислення нормованого УКІН здійснено для дуже жорстких в напрямку осі абсцис матеріалів шарів L_1, L_3 , коли пружні сталі набувають значень $Ga_{55}^{1,in} = Ga_{55}^{3,in} = 10^{-6}$. Для жорсткішого за матеріал простору шару L_2 для значень $G_2/G = 25, 50, 100, 10^6$ УКІН є нульовими для всіх розглянутих k . Для податнішого за матеріал простору шару L_2 для значень $G_2/G = 10^{-6}, 0.01, 0.02, 0.04$ зі зростанням k УКІН K_{31} монотонно спадає і вже для $k > 0$ також набуває нульових значень. Для $k < -4$ УКІН K_{31} набувають сталих значень, причому при $G_2/G = 10^{-6}$ (дуже податний матеріал шару L_2 , фактично тріщина) нормований УКІН $K_{31} \approx 1$.

Для відносно жорстких в напрямку осі абсцис матеріалів шарів L_1, L_3 зі значеннями пружних сталей $Ga_{55}^{1,in} = Ga_{55}^{3,in} = 0.01, 0.02, 0.04$ не вдалося отримати збіжних результатів обчислення УКІН при $k \in [-5, 0]$ (відносно податний в напрямку осі ординат матеріал шарів L_1, L_3). Тому для таких матеріалів необхідно враховувати правильний порядок особливості у вершині неоднорідності. При $k \in [0, 5]$ отримано нульові УКІН, оскільки жорсткіше за матеріал простору тонке включення за такого способу навантаження практично не впливає на деформування матриці і реальний порядок особливості напружень у вершині неоднорідності не відіграє жодної ролі.

Висновки. Методику дослідження антиплоскої деформації багат шарових тонких неоднорідностей перенесено на випадок загальної анізотропії складових шарів включення. Побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь задачі поздовжнього зсуву багат шарового анізотропного включення в анізотропному просторі. Запропоновано застосовувати наближений підхід розв'язування результуючої системи сингулярних інтегральних рівнянь зі спрощувальним припущенням про кореневу особливість у вершинах неоднорідності в цілому та у вершинах її складових шарів. За критерій коректності застосування обраної математичної моделі взято швидкість збіжності обчислення узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень. На окремих прикладах дво- та тришарової структур встановлено межі застосовності такого підходу. Числові експерименти для задач поздовжнього зсуву дво- та тришарового включення виявили позитивний вплив врахування анізотропії (ортотропії) на можливість розширення сфери застосування такого спрощеного підходу порівняно з ізотропним випадком. Виявлення коректного ефективного порядку сингулярності у вершині шаруватого включення та врахування некорневих порядків у окремих шарах включення потребують додаткових досліджень.

1. Васильєв К. В., Сулим Г. Т. Метод прямого вирізування у моделюванні ортотропних тіл з тонкими пружними включеннями за поздовжнього зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 3. – С. 55–68.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.3.55-68>.
Те саме: Vasil'ev K. V., Sulym H. T. Method of direct cutting-out in modeling orthotropic solids with thin elastic inclusions under longitudinal shear // J. Math. Sci. – 2023. – **273**, No. 1. – P. 61–78.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06484-0>.

2. Васильев К. В., Сулим Г. Т. Пружна рівновага анізотропних біматеріальних тіл з тонкими пружними анізотропними включеннями за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2021. – **64**, № 3. – С. 90–103.
– <https://doi.org/10.15407/mmpmf2021.64.3.90-103>.
Te same: *Vasil'ev K. V., Sulym H. T. Elastic equilibrium of anisotropic bimaterial bodies with thin elastic anisotropic inclusions under longitudinal shear* // *J. Math. Sci.* – 2024. – **278**, No. 5. – P. 842–858.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-024-06964-x>.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.
Te same: *Muskhelishvili N. I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1977. – xxxi+732 p.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.
Te same: *Muskhelishvili N. I.* Singular integral equations: Boundary problems of function theory and their application to mathematical physics. – Dordrecht: Springer, 2012. – xiv+441 p.
5. *Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Ильчук Н. И.* Взаємодії фізико-механічних полів у тілах із тонкими структурними неоднорідностями: огляд // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2018. – **61**, № 2. – С. 57–79.
Te same: *Pasternak Ia. M., Sulym H. T., Ilchuk N. I.* Interaction of physico-mechanical fields in bodies with thin structural inhomogeneities: A survey // *J. Math. Sci.* – 2021. – **253**, No. 1. – P. 63–83.
– <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05213-9>.
6. *Пастернак Я. М., Сулим Г. Т., Пастернак Р. М.* Вивчення напруженого стану тіл із функціональних структурно неоднорідних матеріалів: огляд публікацій до 2010 р. // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2015. – № 95. – С. 35–80.
7. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформованих твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
8. *Сулим Г. Т., Шевчук С. П.* Поздовжній зсув шаруватих анізотропних середовищ зі стрічковими неоднорідностями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 3. – С. 90–97.
Te same: *Sulym H. T., Shevchuk S. P.* Longitudinal shear of layered anisotropic media with band-type inhomogeneities // *J. Math. Sci.* – 2001. – **104**, No. 5. – P. 1506–1514. – <https://doi.org/10.1023/A:1011383619315>.
9. *Сулим Г. Т., Піскозуб Й. З.* Умови контактної взаємодії тіл (Огляд) // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2004. – **47**, № 3. – С. 110–125.
10. *Chen X., Liu Y.* Thermal stress analysis of multi-layer thin films and coatings by an advanced boundary element method // *Comput. Model. Eng. Sci.* – 2001. – **2**, No. 3. – P. 337–349.
11. *Dundurs J., Markenscoff X.* A Green's function formulation of anticracks and their interaction with load-induced singularities // *Trans. ASME. J Appl Mech.* – 1989. – **56**, No. 3. – P. 550–555. – <https://doi.org/10.1115/1.3176126>.
12. *Hutsaylyuk V., Piskozub Y., Piskozub L., Sulym H.* Deformation and strength parameters of a composite structure with a thin multilayer ribbon-like inclusion // *Materials.* – 2022. – **15**, No. 4. – Art. 1435. – 19 p.
– <https://doi.org/10.3390/ma15041435>.
13. *Krenk S.* On quadrature formulas for singular integral equations of the first and the second kind // *Quart. Appl. Math.* – 1975. – **33**, No. 3. – P. 225–232.
– <https://doi.org/10.1090/qam/448967>.
14. *Ma L., Korsunsky A. M.* A note on the Gauss–Jacobi quadrature formulae for singular integral equations of the second kind // *Int. J. Fract.* – 2004. – **126**, No. 4. – P. 399–405. – <https://doi.org/10.1023/B:FRAC.0000031158.62052.3c>.
15. *Ma L., Korsunsky A. M.* Effect of friction on edge singularities in slip bands // *Int. J. Fract.* – 2003. – **123**, No. 1-2. – P. L143–L150.
– <https://doi.org/10.1023/B:FRAC.0000005807.95505.80>.
16. *Makhorkin M., Makhorkina T.* Analytical determination of the order of stress field singularity in some configurations of multiwedge systems for the case of antiplane deformation // *Econtechmod.* – 2017. – **6**, No. 3. – P. 45–51.
17. *Piskozub Y., Piskozub L., Sulym H.* Effect of the transverse functional gradient of the thin interfacial inclusion material on the stress distribution of the bimaterial

- under longitudinal shear // *Materials*. – 2022. – **15**, No. 23. – Art. 8591. – 12 p.
– <https://doi.org/10.3390/ma15238591>.
18. *Sih G. C.* Plane extension of rigidly embedded line inclusions // *Proc. of the 9th Midwestern Mechanics Conference (August 16–18, 1965, Madison, Wisconsin)*. – New York: Wiley, 1965. – P. 61–79.
 19. *Sulym G., Shevchuk S.* Antiplane problems for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations // *J. Theor. Appl. Mech.* – 1999. – **37**, No. 1. – P. 47–63.
 20. *Sulym H., Piskozub Y., Polanski J.* Antiplane deformation of a bimaterial with thin interfacial nonlinear elastic inclusion // *Acta Mech. Automat.* – 2018. – **12**, No. 3. – P. 190–195. – <https://doi.org/10.2478/ama-2018-0029>.
 21. *Yang L., Chen Z., Xie K.* An efficient method for approximate solution of a singular integral equation with Cauchy kernel // *J. Comput. Appl. Math.* – 2019. – **352**. – P. 50–61. – <https://doi.org/10.1016/j.cam.2018.11.020>.
 22. *Zhou K., Hoh H. J., Wang X., Keer L. M., Pang J. H. L., Song B., Wang Q. J.* A review of recent works on inclusions // *Mech. Mater.* – 2013. – **60**. – P. 144–158. – <https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2013.01.005>.

ELASTIC EQUILIBRIUM OF A SPACE WITH MULTILAYER ANISOTROPIC THIN BAND INCLUSION UNDER LONGITUDINAL SHEAR

Using the method of jump functions within the framework of the theory of thin inclusions, a mathematical model of a multilayer anisotropic thin band inclusion in anisotropic space under longitudinal shear by forces at infinity was constructed and tested. Using examples of antiplane deformation of two- and three-layer inclusions, the effect of the components of the tensor of elastic constants on the generalized stress intensity factors of inhomogeneity and the stress field in its vicinity was studied.

Key words: *anisotropy, multilayered band inclusion, longitudinal shear, stress concentration, stress intensity factors.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
15.09.23