

## МЕЖОВЕ РОЗКЛИНЮВАННЯ ПРУЖНОЇ ПІВПЛОЩИНИ ТА ПЛОЩИНИ З НАПІВНЕСКІНЧЕННИМ ТОНКИМ ЖОРСТКИМ ВКЛЮЧЕННЯМ

Розглянуто дві задачі розклинювання скінченним клином сталої ширини: вздовж напівнескінченної тріщини на межі пружної півплощини та вздовж тріщини на межі тонкого жорсткого напівнескінченного включення у пружній площині. Враховано контакт берегів тріщини біля її вершини та сили тертя в областях контакту. Аналітичні розв'язки задач отримано із застосуванням методу Вінера – Гопфа і показано простий зв'язок між ними. Для кожної із задач знайдено розмір області контакту біля вершини тріщини, розподіли контактних напружень і напружень на продовженні тріщини, коефіцієнти інтенсивності напружень.

**Ключові слова:** розклинювання, межева тріщина, відшароване включення, модель Комніноу, метод Вінера – Гопфа, коефіцієнти інтенсивності напружень.

Задачам про розклинювання пружної однорідної площини присвячено огляди [13, 14, 19]. Задачі розклинювання кусково-однорідної площини вздовж міжфазної тріщини ускладнюються тим, що в околі вершини тріщини з метою усунення осциляцій напружень та переміщень необхідно вводити область контакту берегів тріщини, тобто розглядати задачі в рамках так званої моделі Комніноу [20]. Розклинювання кусково-однорідної площини скінченним клином уздовж напівнескінченної або скінченної міжфазної тріщини з урахуванням гладкого контакту берегів тріщини біля її вершини за моделлю Комніноу вивчено в роботах [14–16]. У випадку, коли одна з півплощин є абсолютно жорсткою, розглянуті в [14–16] задачі відповідають розклинюванню пружної півплощини вздовж межевої тріщини. У роботі [10] розв'язано задачу про межеве розклинювання півплощини напівнескінченим заокругленим клином із наперед невідомими межами областей гладкого контакту клина з берегом тріщини та фрикційного контакту між жорсткою основою і берегом тріщини в околі її вершини.

У цій роботі наводимо розв'язання задачі про фрикційне розклинювання півплощини скінченним клином сталої ширини вздовж напівнескінченної межевої тріщини та аналогічної задачі для пружної площини з напівнескінченим відшарованим тонким жорстким включенням.

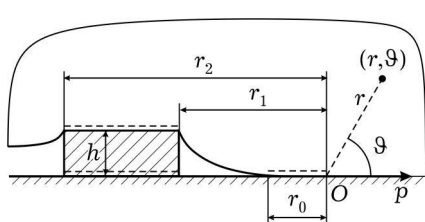


Рис. 1

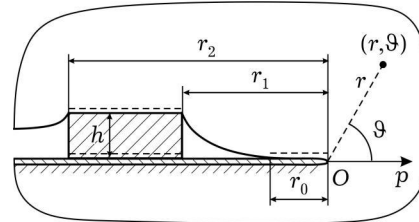



Рис. 2

**1. Постановки задач.** Розглянемо дві задачі розклинювання.

**Задача 1.** Пружна півплощина  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi$  з модулем зсуву  $G$  та коефіцієнтом Пуассона  $\nu$  з'єднана вздовж променя  $\vartheta = 0$  із жорсткою основою. Уздовж напівнескінченної тріщини  $\vartheta = \pi$  півплощина розклинюється абсолютно жорстким клином ширини  $h$ , який повільно рухається до вершини тріщини і на відріжку  $r_1 \leq r \leq r_2$  перебуває у ковзному контакті з її верхнім берегом (рис. 1). Згідно з моделлю Комніноу [20] поблизу вер-

 v.i.ostryk@gmail.com

шини тріщини її береги контактують в області  $0 < r \leq r_0$  невідомого розміру  $r_0$ . Вважаємо, що в областях контакту  $0 < r \leq r_0$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$  нормальні та дотичні напруження пов'язані законом тертя Амонтона з коефіцієнтами тертя  $\mu_0$  і  $\mu_1$  відповідно.

**Задача 2.** У площині з пружними сталими  $G$  і  $\nu$  міститься напівнескінченне тонке жорстке включення, нижній берег  $\vartheta = -\pi$  якого з'єднаний з площиною, а його верхній берег  $\vartheta = \pi$  відшарований від неї (рис. 2). Розклинювання площини з включенням відбувається так само, як і розклинювання півплощини у **задачі 1**.

Крайові умови кожної із задач запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} u_r^{(n)} \Big|_{\vartheta=(1-n)\pi} &= 0, & u_\vartheta^{(n)} \Big|_{\vartheta=(1-n)\pi} &= 0, & 0 \leq r < \infty, \\ u_\vartheta^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= 0, & \tau_{r\vartheta}^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= \mu_0 \sigma_\vartheta^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi}, & 0 < r \leq r_0, \\ u_\vartheta^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= -h, & \tau_{r\vartheta}^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= \mu_1 \sigma_\vartheta^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi}, & r_1 \leq r \leq r_2, \\ \sigma_\vartheta^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= 0, & \tau_{r\vartheta}^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= 0, & r_0 < r < r_1, \quad r_2 < r < \infty, \quad n = 1, 2, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $n$  – номер задачі. Знак при  $\mu_0$  у четвертій з умов (1) вибрано за припущення, що точки берега тріщини, які знаходяться у контакті з основою або включенням, рухаються у напрямку від вершини тріщини, тобто

$$u_r^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi} > 0, \quad 0 < r \leq r_0, \quad n = 1, 2, \quad (2)$$

що необхідно перевірити при розв'язанні кожної із задач.

**2. Інтегральні рівняння задач.** Розглянемо основну змішану задачу для клина  $0 \leq r < \infty$ ,  $(1-n)\pi \leq \vartheta \leq \pi$  з кутом розхилу  $\alpha_n = 2^{n-1}\pi$ ,  $n = 1, 2$ . У випадку  $n = 1$  клин є півплощиною, а у випадку  $n = 2$  – площиною з напівнескінченим розрізом. Крайові умови цієї задачі складаються з перших двох із умов (1) і таких умов:

$$\sigma_\vartheta^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi} = \sigma(r), \quad \tau_{r\vartheta}^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi} = \tau(r), \quad 0 \leq r < \infty, \quad n = 1, 2.$$

Розв'язок цієї задачі, отриманий в [11, 12] методом інтегрального перетворення Мелліна за радіальною координатою  $r$ , на гранях клина має вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_\vartheta^{(n)} \Big|_{\vartheta=(1-n)\pi} &= -\frac{\text{ch } \pi\theta}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [\bar{\sigma}(s) \text{ch } \pi\theta \cos \alpha_n s - \bar{\tau}(s) \text{sh } \pi\theta \sin \alpha_n s] \frac{r^{-s-1} ds}{\Delta_n(s)}, \\ \tau_{r\vartheta}^{(n)} \Big|_{\vartheta=(1-n)\pi} &= -\frac{\text{ch } \pi\theta}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [\bar{\sigma}(s) \text{sh } \pi\theta \sin \alpha_n s + \bar{\tau}(s) \text{ch } \pi\theta \cos \alpha_n s] \frac{r^{-s-1} ds}{\Delta_n(s)}, \\ u_\vartheta^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= \frac{\sqrt{x}}{4G\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [\bar{\sigma}(s) \text{ch } \pi\theta \cos \alpha_n s - \bar{\tau}(s) \text{sh } \pi\theta \sin \alpha_n s] \sin \alpha_n s \frac{r^{-s} ds}{s\Delta_n(s)}, \\ u_r^{(n)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= \frac{\sqrt{x}}{4G\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [\bar{\sigma}(s) \text{sh } \pi\theta \sin \alpha_n s + \bar{\tau}(s) \text{ch } \pi\theta \cos \alpha_n s] \sin \alpha_n s \frac{r^{-s} ds}{s\Delta_n(s)}, \\ \Delta_n(s) &= \frac{1}{2} (\cos 2\alpha_n s + \text{ch } 2\pi\theta), \quad n = 1, 2, \quad \theta = \frac{1}{2\pi} \ln x, \quad x = 3 - 4\nu, \\ \bar{\sigma}(s) &= \int_0^\infty \sigma(y) y^s dy, \quad \bar{\tau}(s) = \int_0^\infty \tau(y) y^s dy, \quad -\frac{1}{2} < c < 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Крім того, у випадку  $n = 2$  на лінії симетрії клина маємо [11]

$$\begin{aligned}\sigma_{\vartheta}^{(2)}|_{\vartheta=0} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[ \bar{\sigma}(s)(\cos 2\pi s + \operatorname{sh}^2 \pi\theta) \cos \pi s - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \bar{\tau}(s) \operatorname{sh} 2\pi\theta \sin \pi s \right] \frac{r^{-s-1} ds}{\Delta_2(s)}, \\ \tau_{r\vartheta}^{(2)}|_{\vartheta=0} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[ \frac{1}{2} \bar{\sigma}(s) \operatorname{sh} 2\pi\theta \sin \pi s + \right. \\ &\quad \left. + \bar{\tau}(s)(\cos 2\pi s + \operatorname{sh}^2 \pi\theta) \cos \pi s \right] \frac{r^{-s-1} ds}{\Delta_2(s)}.\end{aligned}\quad (4)$$

Уведемо невідомі функції контактного тиску

$$q_n(r) = \begin{cases} -\sigma_{\vartheta}^{(n)}|_{\vartheta=\pi}, & 0 < r \leq r_0, \quad r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0, & r_0 < r < r_1, \quad r_2 < r < \infty, \end{cases} \quad n = 1, 2. \quad (5)$$

Поклавши

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}(s) &= -\int_0^{r_0} q_n(y) y^s dy - \int_{r_1}^{r_2} q_n(y) y^s dy, \\ \bar{\tau}(s) &= -\mu_0 \int_0^{r_0} q_n(y) y^s dy - \mu_1 \int_{r_1}^{r_2} q_n(y) y^s dy\end{aligned}$$

у (3), (4) згідно з (5) і четвертою, шостою та останньою рівностями з (1), виконаємо всі крайові умови з (1), крім третьої та п'ятої умови на колові переміщення в областях контакту.

Підставимо колові переміщення  $u_{\vartheta}^{(n)}|_{\vartheta=\pi}$  із (3) у третю та п'яту з умов (1), виконаємо заміни

$$s = -i\tau, \quad r = r_0 e^{-\xi}, \quad y = r_0 e^{-\eta}, \quad r_1 = r_0 e^a, \quad r_2 = r_0 e^b \quad (6)$$

і перейдемо до нових невідомих функцій

$$\varphi_n(\eta) = \frac{1}{2G} q_n(r_0 e^{-\eta}) e^{-\eta}, \quad 0 < \eta < \infty, \quad -b < \eta < -a, \quad n = 1, 2. \quad (7)$$

Отримаємо інтегральні рівняння

$$\begin{aligned}L_n(\xi) &\equiv \int_0^{\infty} k_{n0}(\xi - \eta) \varphi_n(\eta) d\eta + \int_{-b}^{-a} k_{n1}(\xi - \eta) \varphi_n(\eta) d\eta = \\ &= \begin{cases} 0, & 0 < \xi < \infty, \\ \frac{h}{r_0}, & -b < \xi < -a, \end{cases} \quad n = 1, 2,\end{aligned}\quad (8)$$

де

$$\begin{aligned}k_{nj}(\xi - \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}_{nj}(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, \quad \mathcal{K}_{nj}(\tau) = \frac{\lambda_j(2^{n-1} \tau)}{\tau \Delta_1(2^{n-1} i\tau)}, \quad n = 1, 2, \\ \lambda_j(\tau) &= D_j \operatorname{sh} \pi\tau \operatorname{ch} \pi(\tau + i\gamma_j), \quad D_j = \sqrt{4(1 - \nu)^2 + (1 - 2\nu)^2 \mu_j^2}, \\ \gamma_j &= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{(1 - 2\nu)\mu_j}{2(1 - \nu)}, \quad j = 0, 1.\end{aligned}\quad (9)$$

**3. Розв'язання інтегрального рівняння задачі 1.** Інтегральне рівняння (8) задачі 1 ( $n = 1$ ) із застосуванням методу Вінера – Гопфа [4, 9] зведемо до нескінченної системи алгебричних рівнянь.

Продовжимо рівняння (8) на всю числову вісь, поклавши  $\phi_1(\xi) = 0$ , якщо  $-a \leq \xi \leq 0$ ,  $-\infty < \xi \leq -b$ , і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Введемо невідомі функції комплексної змінної

$$\begin{aligned}\Phi_0^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \phi_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi, & \Phi_1^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{b-a} \phi_1(\xi - b) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Phi_1^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-b+a}^0 \phi_1(\xi - a) e^{iz\xi} d\xi, & \Psi_0^+(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^a L_1(\xi - a) e^{iz\xi} d\xi, \\ \Psi_0^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^0 L_1(\xi) e^{iz\xi} d\xi, & \Psi_1^-(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 L_1(\xi - b) e^{iz\xi} d\xi, \quad (10)\end{aligned}$$

серед яких функція  $\Phi_0^+(z)$  є аналітичною у півплощині  $\text{Im } z > c^+$  ( $c^+ < 0$ ), функція  $\Psi_1^-(z)$  – у півплощині  $\text{Im } z < c^-$  ( $c^- > 0$ ), а інші функції є цілими. Застосувавши теорему про згортку, отримаємо систему функціональних рівнянь

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0(z)\Phi_0^+(z) + e^{-iza}\mathcal{K}_1(z)\Phi_1^-(z) - e^{-izb}\Psi_1^-(z) - \Psi_0^-(z) &= F(z), \\ \Phi_1^+(z) = e^{iz(b-a)}\Phi_1^-(z), \quad \Psi_0^+(z) = e^{iza}\Psi_0^-(z), \quad c^+ < \text{Im } z < c^-, \quad (11)\end{aligned}$$

права частина якої має вигляд

$$F(z) = \frac{\bar{h}}{iz} (e^{-iza} - e^{-izb}), \quad \bar{h} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{h}{r_0}.$$

Факторизуємо коефіцієнти  $\mathcal{K}_0(z)$ ,  $\mathcal{K}_1(z)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_j^+(z) &= \mathcal{K}_j^+(z)\mathcal{K}_j^-(z), \quad \mathcal{K}_j^+(z) = D_j \frac{\Gamma(1/2 - iz + i\theta)\Gamma(1/2 - iz - i\theta)}{\Gamma(1 - iz)\Gamma(1/2 - iz + \gamma_j)}, \\ \mathcal{K}_j^-(z) &= \frac{\Gamma(1/2 + iz + i\theta)\Gamma(1/2 + iz - i\theta)}{\Gamma(1 + iz)\Gamma(1/2 + iz - \gamma_j)}, \quad j = 0, 1.\end{aligned}$$

Функції  $\mathcal{K}_0^+(z)$ ,  $\mathcal{K}_1^+(z)$  є аналітичними та відмінними від нуля у півплощині  $\text{Im } z > c^+$ , а функції  $\mathcal{K}_0^-(z)$ ,  $\mathcal{K}_1^-(z)$  – у півплощині  $\text{Im } z < c^-$ . Після цього систему функціональних рівнянь (11) запишемо так:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_0^+(z)\Phi_0^+(z) + \frac{e^{-iza}}{\mathcal{K}_0^-(z)} \left( \mathcal{K}_1^-(z)\Phi_1^-(z) - \frac{\bar{h}}{iz} \right) &= \frac{e^{-izb}}{\mathcal{K}_0^-(z)} \left( \Psi_1^-(z) - \frac{\bar{h}}{iz} \right) + \frac{\Psi_0^-(z)}{\mathcal{K}_0^-(z)}, \\ \mathcal{K}_1^+(z)\Phi_1^+(z) + \frac{e^{izb}}{\mathcal{K}_1^-(z)} \left[ \mathcal{K}_0^+(z)\Phi_0^+(z) - e^{-iza} \left( \Psi_0^+(z) + \frac{\bar{h}}{iz} \right) \right] &= \frac{\Psi_1^-(z) - \bar{h}/(iz)}{\mathcal{K}_1^-(z)}, \\ \mathcal{K}_1^-(z)\Phi_1^-(z) + \frac{e^{iza}}{\mathcal{K}_1^+(z)} \mathcal{K}_0^+(z)\Phi_0^+(z) - \frac{e^{iz(a-b)}}{\mathcal{K}_1^+(z)} \left( \Psi_1^-(z) - \frac{\bar{h}}{iz} \right) &= \\ = \frac{1}{\mathcal{K}_1^+(z)} \left( \Psi_0^+(z) + \frac{\bar{h}}{iz} \right), \quad c^+ < \text{Im } z < c^-. \quad (12)\end{aligned}$$

Ті складові лівої частини кожного з рівнянь (12), які не є аналітичними функціями у півплощинах  $\text{Im } z > c^+$ ,  $\text{Im } z < c^-$ , подамо як різницю функцій:

$$\begin{aligned}
& \frac{e^{-iza}}{\mathcal{K}_0^-(z)} \left( \mathcal{K}_1(z) \Phi_1^-(z) - \frac{\bar{h}}{iz} \right) + \frac{\bar{h}_0^-}{iz} = \chi_1^+(z) - \chi_1^-(z), \quad \chi_1^+(z) = \bar{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1k}^- z_{1k}^-}{s_k - iz}, \\
& \frac{e^{izb}}{\mathcal{K}_1^-(z)} \left[ \mathcal{K}_0(z) \Phi_0^+(z) - e^{-iza} \left( \Psi_0^+(z) + \frac{\bar{h}}{iz} \right) \right] + \frac{\bar{h}_1^-}{iz} = \chi_2^+(z) - \chi_2^-(z), \\
& \chi_2^-(z) = \bar{h} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_{0k}^+ z_{0k}^+}{\zeta_{2k-1}^+ + iz} + \frac{\alpha_{2k}^+ z_{2k}^+}{\zeta_k^+ + iz} \right), \quad \bar{h}_0^- = \frac{\bar{h}}{\mathcal{K}_0^-(0)}, \quad \bar{h}_1^\pm = \frac{\bar{h}}{\mathcal{K}_1^\pm(0)}, \\
& \frac{e^{iza}}{\mathcal{K}_1^+(z)} \mathcal{K}_0(z) \Phi_0^+(z) = \chi_3^+(z) - \chi_3^-(z), \quad \chi_3^-(z) = \bar{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1k}^+ z_{1k}^+}{s_k + iz}, \\
& - \frac{e^{iz(a-b)}}{\mathcal{K}_1^+(z)} \left( \Psi_1^-(z) - \frac{\bar{h}}{iz} \right) - \frac{\bar{h}_1^+}{iz} = \chi_4^+(z) - \chi_4^-(z), \quad \chi_4^+(z) = \bar{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^- z_{2k}^-}{\zeta_k^- - iz}, \\
& \alpha_{0k}^+ = -\frac{1}{\pi} \sin \pi(\gamma_1 - \gamma_0) \mathcal{K}_1^+(i\zeta_{2k-1}^+) e^{-\zeta_{2k-1}^+ b}, \quad \alpha_{1k}^+ = \frac{\lambda_0(is_k) e^{-s_k a}}{is_k \Delta_1'(s_k) \mathcal{K}_1^+(is_k)}, \\
& \alpha_{1k}^- = \frac{\lambda_1(-is_k) e^{-s_k a}}{is_k \Delta_1'(s_k) \mathcal{K}_0^-(is_k)}, \quad \alpha_{2k}^\pm = \mp \frac{\zeta_k^\pm \Delta_1(\zeta_k^\pm)}{\lambda_1'(\pm i\zeta_k^\pm)} \mathcal{K}_1^\pm(\pm i\zeta_k^\pm) e^{\zeta_k^\pm(a-b)}, \\
& z_{0k}^+ = \frac{1}{h} \Phi_0^+(i\zeta_{2k-1}^+), \quad z_{1k}^+ = \frac{1}{h} \Phi_0^+(is_k), \quad z_{1k}^- = \frac{1}{h} \Phi_1^-(is_k), \\
& z_{2k}^+ = \frac{1}{h} \Psi_0^+(i\zeta_k^+) - \frac{1}{\zeta_k^+}, \quad z_{2k}^- = \frac{1}{h} \Psi_1^-(i\zeta_k^-) - \frac{1}{\zeta_k^-}, \\
& s_{2k-1} = s_k^+, \quad s_{2k} = s_k^-, \quad s_k^\pm = k - \frac{1}{2} \pm i\theta, \\
& \zeta_{2k-1}^\pm = k - \frac{1}{2} \mp \gamma_1, \quad \zeta_{2k}^\pm = k, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{13}
\end{aligned}$$

де  $s_k$ ,  $\zeta_k^\pm$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , – корені рівнянь  $\Delta_1(s) = 0$ ,  $\lambda_1(\pm is) = 0$ , відповідно, із півплощини  $\text{Re } s > 0$ .

У підсумку систему функціональних рівнянь (11) зводимо до вигляду

$$\begin{aligned}
& \mathcal{K}_0^+(z) \Phi_0^+(z) + \chi_1^+(z) = \frac{\Psi_0^-(z)}{\mathcal{K}_0^-(z)} + \frac{e^{-izb}}{\mathcal{K}_0^-(z)} \left( \Psi_1^-(z) - \frac{\bar{h}}{iz} \right) + \frac{\bar{h}_0^-}{iz} + \chi_1^-(z), \\
& \mathcal{K}_1^+(z) \Phi_1^+(z) + \chi_2^+(z) = \frac{1}{\mathcal{K}_1^-(z)} \left( \Psi_1^-(z) - \frac{\bar{h}}{iz} \right) + \frac{\bar{h}_1^-}{iz} + \chi_2^-(z), \\
& \mathcal{K}_1^-(z) \Phi_1^-(z) - \chi_3^-(z) - \chi_4^-(z) = \frac{1}{\mathcal{K}_1^+(z)} \left( \Psi_0^+(z) + \frac{\bar{h}}{iz} \right) - \frac{\bar{h}_1^+}{iz} - \chi_3^+(z) - \chi_4^+(z), \\
& c^+ < \text{Im } z < c^-. \tag{14}
\end{aligned}$$

Для кожного з рівнянь (14) ліва і права частини аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і, отже, є довільною цілою функцією. З асимптотичних оцінок

$$\begin{aligned}
& \mathcal{K}_0^+(z) = O(z^{-1/2-\gamma_0}), \quad \mathcal{K}_1^\pm(z) = O(z^{-1/2\mp\gamma_1}), \quad \Phi_0^+(z), \quad \Phi_1^\pm(z) = o(1), \\
& \{\chi_1^+(z), \chi_2^+(z), \chi_3^-(z), \chi_4^-(z)\} = O(z^{-1}), \quad |z| \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

випливає, що обидві частини кожного із рівнянь (14) тотожно дорівнюють нулеві. Звідси знаходимо

$$\begin{aligned}\Phi_0^+(z) &= -\frac{\chi_1^+(z)}{\mathcal{K}_0^+(z)}, & \Psi_0^-(z) + e^{-izb}\Psi_1^-(z) &= -\mathcal{K}_0^-(z)\left(\chi_1^-(z) + \frac{\bar{h}_0^-}{iz}\right) + e^{-izb}\frac{\bar{h}}{iz}, \\ \Phi_1^+(z) &= -\frac{\chi_2^+(z)}{\mathcal{K}_1^+(z)}, & \Psi_1^-(z) &= -\mathcal{K}_1^-(z)\left(\chi_2^-(z) + \frac{\bar{h}_1^-}{iz}\right) + \frac{\bar{h}}{iz}, \\ \Phi_1^-(z) &= \frac{\chi_3^-(z) + \chi_4^-(z)}{\mathcal{K}_1^-(z)}, & \Psi_0^+(z) &= \mathcal{K}_1^+(z)\left(\chi_3^+(z) + \chi_4^+(z) + \frac{\bar{h}_1^+}{iz}\right) - \frac{\bar{h}}{iz}.\end{aligned}\quad (15)$$

Крім того, з умови обмеженості контактних напружень у точці  $r = r_0$ , що еквівалентно оцінці  $\Phi_0^+(z) = o(z^{-1})$ ,  $|z| \rightarrow \infty$ , маємо додаткову умову  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z\chi_1^+(z) = 0$ , яку, з огляду на другу з рівностей (13), запишемо у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{1k}^- z_{1k}^- = 0. \quad (16)$$

Ця умова є необхідною для визначення невідомої  $a$ , через яку, згідно з (6), виражається невідомий розмір  $r_0$  області контакту поблизу вершини тріщини.

Для знаходження невідомих величин  $z_{0k}^+$ ,  $z_{1k}^{\pm}$ ,  $z_{2k}^{\pm}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , із (13) покладемо у першій із рівностей (15)  $z = i\zeta_{2m-1}^+$ ,  $z = is_m$ , у п'ятій –  $z = -is_m$ , у шостій –  $z = i\zeta_m^+$  і в четвертій –  $z = -i\zeta_m^-$ ,  $m = 1, 2, \dots$ . Отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned}z_{0m}^+ + \beta_{0m}^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1k}^- z_{1k}^-}{s_k + \zeta_{2m-1}^+} &= 0, & z_{1m}^+ + \beta_{1m}^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1k}^- z_{1k}^-}{s_k + s_m} &= 0, \\ z_{1m}^- + \beta_{1m}^- \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_{1k}^+ z_{1k}^+}{s_k + s_m} + \frac{\alpha_{2k}^- z_{2k}^-}{\zeta_k^- - s_m} \right) &= g_{1m}^-, \\ z_{2m}^+ + \beta_{2m}^+ \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_{1k}^+ z_{1k}^+}{s_k - \zeta_m^+} + \frac{\alpha_{2k}^- z_{2k}^-}{\zeta_k^- + \zeta_m^+} \right) + \beta_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1k}^- z_{1k}^-}{s_k + \zeta_m^+} &= g_{2m}^+, \\ z_{2m}^- + \beta_{2m}^- \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\alpha_{0k}^+ z_{0k}^+}{\zeta_{2k-1}^+ + \zeta_m^-} + \frac{\alpha_{2k}^+ z_{2k}^+}{\zeta_k^+ + \zeta_m^-} \right) &= g_{2m}^-, \quad m = 1, 2, \dots,\end{aligned}\quad (17)$$

у якій

$$\begin{aligned}\beta_{0m}^+ &= \frac{1}{\mathcal{K}_0^+(i\zeta_{2m-1}^+)}, & \beta_{1m}^+ &= \frac{1}{\mathcal{K}_0^+(is_m)}, & \beta_{1m}^- &= -\frac{1}{\mathcal{K}_1^-(-is_m)}, \\ \beta_{2m}^+ &= -\mathcal{K}_1^+(i\zeta_m^+), & \beta_m &= \mathcal{K}_0^-(i\zeta_m^+)e^{-\zeta_m^+ a}, & \beta_{2m}^- &= \mathcal{K}_1^-(-i\zeta_m^-), \\ g_{1m}^- &= -\frac{\beta_{1m}^-}{\mathcal{K}_1^+(0)s_m}, & g_{2m}^{\pm} &= \pm \frac{\beta_{2m}^{\pm}}{\mathcal{K}_1^{\pm}(0)\zeta_m^{\pm}}, \quad m = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (18)$$

Система рівнянь (16), (17) з експоненціально спадними за  $k$  коефіцієнтами є регулярною типу Пуанкаре – Коха і тому може бути ефективно розв'язана методами редукції та послідовних наближень [3]. Числовий аналіз

цієї системи рівнянь показує, що відносна довжина  $\bar{r}_0 = \frac{r_0}{r_1}$  області контакту берегів тріщини біля її вершини є вкрай малою: меншою ніж  $10^{-6}$ . Тому отримані вище співвідношення з високою точністю (порядку  $\bar{r}_0$ ) можуть бути асимптотично спрощені.

Нехтуючи у формулах (13) множниками  $e^{-a}$ ,  $e^{-b}$  порівняно з одиницею, знаходимо

$$\alpha_{0k}^+ = 0, \quad \alpha_{1k}^\pm = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\chi_1^+(z) \equiv 0, \quad \chi_2^-(z) = \bar{h} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^+ z_{2k}^+}{\zeta_k^+ + iz}, \quad \chi_3^-(z) \equiv 0$$

та спрощуємо систему рівнянь (17) до вигляду

$$z_{2m}^+ + \beta_{2m}^+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^- z_{2k}^-}{\zeta_k^- + \zeta_m^+} = g_{2m}^+, \quad z_{2m}^- + \beta_{2m}^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^+ z_{2k}^+}{\zeta_k^+ + \zeta_m^-} = g_{2m}^-,$$

$$m = 1, 2, \dots \quad (19)$$

Система рівнянь (19) може бути розв'язана як чисельно, так і аналітично – у вигляді рядів за степенями малого параметра  $e^{(a-b)\pi/2} < 1$  [9]. Після цього визначаємо

$$z_{0m}^+ = 0, \quad z_{1m}^+ = 0, \quad z_{1m}^- = g_{1m}^- - \beta_{1m}^- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^- z_{2k}^-}{\zeta_k^- - s_m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Із умови (16) отримуємо рівняння

$$\operatorname{Re} \frac{\lambda_1(-is_1)z_{11}^- e^{-s_1 a}}{is_1 \Delta_1'(s_1) \mathcal{K}_0^-(is_1)} = 0,$$

яке перетворимо до вигляду

$$\cos\left(\theta(a + 2 \ln 2) - \arg \frac{(1 + i\mu_1)\Gamma(1 - \gamma_0 + i\theta)z_{11}^-}{\Gamma(1 + i\theta)}\right) = 0. \quad (20)$$

Вибравши корінь  $\frac{\pi}{2}$  цього рівняння, знаходимо розмір області контакту берегів тріщини біля її вершини:

$$r_0 = r_1 e^{-a}, \quad a = \frac{\pi}{2\theta} - 2 \ln 2 + \frac{1}{\theta} \arg \frac{(1 + i\mu_1)\Gamma(1 - \gamma_0 + i\theta)z_{11}^-}{\Gamma(1 + i\theta)},$$

$$z_{11}^- = -\beta_{11}^- \left( \frac{1}{\mathcal{K}_1^+(0)s_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{2k}^- z_{2k}^-}{\zeta_k^- - s_1} \right), \quad \beta_{11}^- = -\sqrt{\pi} s_1 \frac{\Gamma(1 - \gamma_1 + i\theta)}{\Gamma(1 + i\theta)} e^{-2i\theta \ln 2},$$

$$\mathcal{K}_1^+(0) = \sqrt{x} \Gamma\left(\frac{1}{2} - \gamma_1\right), \quad s_1 = \frac{1}{2} + i\theta.$$

Інші корені рівняння (20) виключаємо із розгляду, оскільки вони не мають фізичного змісту: від'ємні корені відповідають розмірам області контакту, які перевищують відстань  $r_1$ , а додатні корені, крім  $\frac{\pi}{2}$ , – взаємному перекриттю берегів тріщини поза областю контакту [17].

У випадку напівнескінченного клина маємо

$$r_2 = \infty, \quad b = \infty, \quad \alpha_{2k}^\pm = 0, \quad z_{2m}^\pm = g_{2m}^\pm, \quad z_{1m}^- = g_{1m}^-, \quad k, m = 1, 2, \dots,$$

$$z_{11}^- = \sqrt{\frac{\pi}{x}} \frac{\Gamma(1 - \gamma_1 + i\theta)}{\Gamma(1/2 - \gamma_1)\Gamma(1 + i\theta)} e^{-2i\theta \ln 2}$$

і розмір області контакту біля вершини тріщини знаходимо в явному вигляді:

$$r_0 = r_1 e^{-a}, \quad a = \frac{\pi}{2\theta} - 4 \ln 2 + \frac{1}{\theta} \arg \frac{(1 + i\mu_1)\Gamma(1 - \gamma_0 + i\theta)\Gamma(1 - \gamma_1 + i\theta)}{\Gamma^2(1 + i\theta)},$$

що за відсутності тертя між клином і берегом тріщини ( $\mu_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0$ ) збігається з відповідним результатом роботи [10].

Розв'язок інтегрального рівняння (8) у випадку  $n = 1$  знаходимо оберненим перетворенням Фур'є перших двох рівностей із (10) за умови, що  $\varphi_1(\xi) = 0$ , коли  $-a \leq \xi \leq 0$ ,  $-\infty < \xi \leq -b$ :

$$\varphi_1(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\Phi_0^+(\tau) + e^{-i\tau b} \Phi_1^+(\tau)] e^{-i\tau\xi} d\tau, \quad -\infty < \xi < \infty.$$

Звідси з урахуванням (13), (15) маємо

$$\begin{aligned} \varphi_1(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0^+(\tau) e^{-i\tau\xi} d\tau = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\chi_1^+(\tau)}{\mathcal{K}_0^+(\tau)} e^{-i\tau\xi} d\tau, \quad 0 < \xi < \infty, \\ \varphi_1(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1^+(\tau) e^{-i\tau(\xi+b)} d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_1^-(\tau) e^{-i\tau(\xi+a)} d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{K}_1^-(\tau)} \left( \chi_3^-(\tau) + \chi_4^+(\tau) + \frac{\bar{h}_1^+}{i\tau} \right) e^{-i\tau(\xi+a)} d\tau - \\ &- \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\mathcal{K}_1^+(\tau)} \left( \chi_2^-(\tau) + \frac{\bar{h}_1^-}{i\tau} \right) e^{-i\tau(\xi+b)} d\tau, \quad -b < \xi < -a. \end{aligned} \quad (21)$$

**4. Напруження та переміщення на межі півплощини.** Контактні напруження між берегами тріщини біля її вершини знаходимо, врахувавши заміни (5)–(7) і перетворивши інтеграл із першої з рівностей (21) за теорією лишків:

$$\begin{aligned} \sigma_9^{(1)} \Big|_{9=\pi} &= -\frac{2Gh}{r_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k \Delta_1(\xi_k)}{\lambda_0'(-i\xi_k)} \mathcal{K}_0^-( -i\xi_k ) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{\xi_k - 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_{1m}^- z_{1m}^-}{s_m - \xi_k}, \quad 0 < r < r_0, \\ \xi_{2k-1} &= k - \frac{1}{2} + \gamma_0, \quad \xi_{2k} = k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

де  $\xi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , – корені рівняння  $\lambda_0(-is) = 0$  із півплощини  $\text{Re } s > 0$ . Із (22) після асимптотичного спрощення та перетворень отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_9^{(1)} \Big|_{9=\pi} &= A_2 F_1 \left( s_1, \bar{s}_1; \frac{3}{2} - \gamma_0; \frac{r}{r_0} \right) + \\ &+ B_2 F_1 \left( \gamma_0 + i\theta, \gamma_0 - i\theta; \frac{1}{2} + \gamma_0; \frac{r}{r_0} \right) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-1/2 + \gamma_0}, \quad 0 < r < r_0, \\ A &= \frac{A_0 \text{ch } \pi\theta}{\Gamma(3/2 - \gamma_0)}, \quad B = -\frac{\pi A_0}{\Gamma(1/2 + \gamma_0) |\Gamma(1 - \gamma_0 + i\theta)|^2}, \\ A_0 &= 2\theta Gh \sqrt{\frac{1 + \mu_1^2}{\pi r_0 r_1}} \left| \frac{\Gamma(1 - \gamma_0 + i\theta) z_{11}^-}{\Gamma(1 + i\theta)} \right|, \end{aligned} \quad (23)$$

де  ${}_2F_1(a_1, a_2; a_3; z)$  – гіпергеометрична функція Гаусса [1].

За відсутності тертя між берегами тріщини ( $\mu_0 = 0$ ,  $\gamma_0 = 0$ ) гіпергеометричні функції у першій із рівностей (23) виражаються через елементарні [1] і ця рівність спрощується до такої:

$$\sigma_9^{(1)}|_{\vartheta=\pi} = -\frac{A_0}{\theta} \sqrt{\frac{r_0}{\pi r}} \operatorname{sh}\left(2\theta \arccos \sqrt{\frac{r}{r_0}}\right), \quad 0 < r < r_0.$$

Після перетворення інтегралів із другої з рівностей (21), враховуючи заміни (5)–(7), отримуємо контактні напруження між клином і берегом тріщини:

$$\sigma_9^{(1)}|_{\vartheta=\pi} = -\frac{2Gh}{\mathcal{K}_1(0)r} \left\{ 1 - \sum_{k=1}^{\infty} d_k \left[ z_{2k}^+ \left(\frac{r_1}{r}\right)^{\zeta_k^+} + z_{2k}^- \left(\frac{r}{r_2}\right)^{\zeta_k^-} \right] \right\}, \quad r_1 < r < r_2,$$

$$d_{2k-1} = -(1 + \mu_1^2) \frac{(1 - 2\nu)^2}{D_1^2}, \quad d_{2k} = 1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (24)$$

На підставі асимптотичних оцінок

$$\mathcal{K}_1^-(z) \sim (iz)^{-1/2+\gamma_1}, \quad \mathcal{K}_1^+(z) \sim D_1(-iz)^{-1/2-\gamma_1},$$

$$\Phi_1^-(z) \sim \frac{A^-}{\sqrt{2\pi}} \frac{r_1}{r_0} (iz)^{-1/2-\gamma_1}, \quad \Phi_1^+(z) \sim \frac{A^+}{\sqrt{2\pi}} \frac{r_2}{r_0} (-iz)^{-1/2+\gamma_1}, \quad |z| \rightarrow \infty,$$

$$A^- = \frac{h}{r_1} \left( \frac{1}{\mathcal{K}_1^+(0)} - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}^- z_{2k}^- \right), \quad A^+ = \frac{h}{D_1 r_2} \left( \frac{1}{\mathcal{K}_1^-(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k}^+ z_{2k}^+ \right),$$

із другої з рівностей (21) із застосуванням леми Ватсона [18] знаходимо поведінку контактних напружень на краях клина:

$$\sigma_9^{(1)}|_{\vartheta=\pi} \sim -\frac{2GA^-}{\Gamma(1/2 + \gamma_1)} \left(\frac{r}{r_1} - 1\right)^{-1/2+\gamma_1}, \quad r \rightarrow r_1 + 0,$$

$$\sigma_9^{(1)}|_{\vartheta=\pi} \sim -\frac{2GA^+}{\Gamma(1/2 - \gamma_1)} \left(1 - \frac{r}{r_2}\right)^{-1/2-\gamma_1}, \quad r \rightarrow r_2 - 0.$$

Така поведінка контактних напружень є характерною для задач ковзного контакту жорсткого штампа з пружним тілом [2, 8].

У випадку напівнескінченного клина ( $r_2 = \infty$ ) із (24) отримуємо

$$\sigma_9^{(1)}|_{\vartheta=\pi} = -\frac{2Gh}{\mathcal{K}_1(0)r} \left[ {}_2F_1\left(s_1, \bar{s}_1; \frac{1}{2} + \gamma_1; \frac{r_1}{r}\right) - \frac{\Gamma(1/2 + \gamma_1)}{\Gamma(3/2 - \gamma_1) |\Gamma(\gamma_1 + i\theta)|^2} \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi\theta} \times \right.$$

$$\left. \times {}_2F_1\left(1 - \gamma_1 + i\theta, 1 - \gamma_1 - i\theta; \frac{3}{2} - \gamma_1; \frac{r_1}{r}\right) \left(\frac{r}{r_1}\right)^{-1/2+\gamma_1} \right],$$

$$r_1 < r < \infty.$$

За відсутності тертя ( $\mu_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0$ ), виразивши гіпергеометричні функції через елементарні [1], як і в [10], знаходимо

$$\sigma_9^{(1)}|_{\vartheta=\pi} = -\frac{2Gh}{\pi \sqrt{\alpha r(r - r_1)}} \operatorname{ch}\left(2\theta \arccos \sqrt{\frac{r_1}{r}}\right), \quad r_1 < r < \infty.$$

Комплексну комбінацію напружень на лінії продовження тріщини на підставі перших двох рівностей із (3) виразимо через розв'язок (15) системи функціональних рівнянь (11):

$$\frac{1}{2G} (\sigma_9^{(1)} + i\tau_{r9}^{(1)}) \Big|_{9=0} = \frac{\text{ch } \pi\theta}{\sqrt{2\pi}} e^\xi \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \left[ (1 + i\mu_0) \Phi_0^+(\tau) + (1 + i\mu_1) e^{-i\tau\alpha} \Phi_1^-(\tau) \right] \frac{e^{-i\tau\xi} d\tau}{\text{ch } \pi(\tau - \theta)}. \quad (25)$$

Перетворивши інтеграл із (25) за теорією лишків, зокрема, в околі вершини тріщини, отримуємо

$$\sigma_9^{(1)} \Big|_{9=0} = A_2 F_1 \left( s_1, \bar{s}_1; \frac{3}{2} - \gamma_0; -\frac{r}{r_0} \right), \\ \tau_{r9}^{(1)} \Big|_{9=0} = \mu_0 \sigma_9^{(1)} \Big|_{9=0} + \frac{\text{cth } \pi\theta}{\cos \pi\gamma_0} B \times \\ \times {}_2F_1 \left( \gamma_0 + i\theta, \gamma_0 - i\theta; \frac{1}{2} + \gamma_0; -\frac{r}{r_0} \right) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-1/2+\gamma_0}, \quad 0 < r < r_0. \quad (26)$$

На продовженні тріщини в околі її вершини нормальні напруження є скінченними, а дотичні – необмеженими з характерною для моделі Коші-Франка фрикційного контакту берегів міжфазної тріщини особливістю порядку  $1/2 - \gamma_0$  [6, 20].

Із другої з формул (26) визначасмо коефіцієнт інтенсивності напружень [13]

$$K_{II} = \sqrt{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} r^{1/2-\gamma_0} \tau_{r9}^{(1)} \Big|_{9=0} = \sqrt{2\pi} \frac{\text{cth } \pi\theta}{\cos \pi\gamma_0} B r_0^{1/2-\gamma_0}.$$

Розподіли напружень та переміщень всередині півплощини поблизу вершини тріщини визначаються через коефіцієнт  $K_{II}$  за відомими формулами [5, 20].

У випадку напівнескінченного клина ( $r_2 = \infty$ )

$$K_{II} = 2\sqrt{\frac{2\pi}{x} (1 + \mu_1^2)} \theta \text{cth } \pi\theta \frac{\Gamma(1/2 - \gamma_0)}{\Gamma(1/2 - \gamma_1)} \left| \frac{\Gamma(1 - \gamma_1 + i\theta)}{\Gamma(1 - \gamma_0 + i\theta)\Gamma^2(1 + i\theta)} \right| \frac{Gh}{\sqrt{r_1} r_0^{\gamma_0}},$$

що за відсутності тертя між клином і берегом тріщини ( $\mu_1 = 0$ ,  $\gamma_1 = 0$ ) збігається з відповідним результатом роботи [10].

Для перевірки умови (2) знайдемо радіальні переміщення в області контакту берегів тріщини. Аналогічно до формул (26) отримуємо

$$u_r^{(1)} \Big|_{9=\pi} = A_0 \frac{1-\nu}{G} r_0 \sqrt{1 + \mu_0^2} \frac{\sin \pi\gamma_0}{\Gamma(3/2 + \gamma_0)\mu_0 \text{sh } \pi\theta} \left| \frac{\Gamma(\gamma_0 + i\theta)}{\Gamma(1 - \gamma_0 + i\theta)} \right| \times \\ \times {}_2F_1 \left( \gamma_0 + i\theta, \gamma_0 - i\theta; \frac{3}{2} + \gamma_0; \frac{r}{r_0} \right) \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1/2+\gamma_0}, \quad 0 < r \leq r_0. \quad (27)$$

Гіпергеометрична функція із (27) набуває дійсних додатних значень на проміжку  $0 < r \leq r_0$ . Отже, умова (2) у випадку  $n = 1$  виконується і припущення щодо напрямку руху граничних точок півплощини на проміжку  $0 < r \leq r_0$  підтверджується.

**5. Розв'язок задачі 2 на лінії включення та її продовженні.** Величини  $r_0, r_1, r_2, a, b$  для  $n$ -ї задачі позначимо через  $r_0^{(n)}, r_1^{(n)}, r_2^{(n)}, a_n, b_n$  відповідно,  $n = 1, 2$ . Ядра інтегральних рівнянь (8) та їхні трансформанти, згідно з (9), пов'язані між собою тотожностями

$$k_{2j}(\xi - \eta) \equiv k_{1j}\left(\frac{\xi}{2} - \frac{\eta}{2}\right), \quad \mathcal{K}_{2j}(\tau) \equiv 2\mathcal{K}_{1j}(2\tau), \quad j = 0, 1. \quad (28)$$

Тому інтегральне рівняння задачі 2 можемо записати так:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} k_{10}(\xi - \eta)\varphi_2(2\eta) d\eta + \int_{-b_2/2}^{-a_2/2} k_{11}(\xi - \eta)\varphi_2(2\eta) d\eta = \\ & = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < \infty, \\ \frac{h}{2r_0^{(2)}}, & -\frac{b_2}{2} < \xi < -\frac{a_2}{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

Порівнявши інтегральні рівняння (8) при  $n = 1$  та (29), знаходимо зв'язок між параметрами та розв'язками інтегральних рівнянь задач 2 і 1:

$$a_2 = 2a_1, \quad b_2 = 2b_1, \quad 2r_0^{(2)}\varphi_2(2\eta) \equiv r_0^{(1)}\varphi_1(\eta).$$

Звідси, згідно з (6), (7), випливають залежності

$$\frac{r_0^{(2)}}{r_1^{(2)}} = \left(\frac{r_0^{(1)}}{r_1^{(1)}}\right)^2, \quad \frac{r_2^{(2)}}{r_1^{(2)}} = \left(\frac{r_2^{(1)}}{r_1^{(1)}}\right)^2, \quad q_2(r) \equiv \frac{r_1^{(1)}}{2\sqrt{r_1^{(2)}}r} q_1\left(r_0^{(1)}\sqrt{\frac{r}{r_0^{(2)}}}\right). \quad (30)$$

Враховувши при цьому пропорційність напружень із (23), (24), (26) величинам  $(r_0^{(1)}r_1^{(1)})^{-1/2}, \frac{1}{r}, (r_0^{(1)}r_1^{(1)})^{-1/2}$ , приходимо до тотожностей

$$\begin{aligned} \sigma_9^{(2)}(r, \pi, r_0, r_1, r_2) & \equiv \frac{1}{2\sqrt{r}} \sigma_9^{(1)}(\sqrt{r}, \pi, \sqrt{r_0}, \sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}), \\ \tau_{r9}^{(2)}(r, \pi, r_0, r_1, r_2) & \equiv \frac{1}{2\sqrt{r}} \tau_{r9}^{(1)}(\sqrt{r}, \pi, \sqrt{r_0}, \sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}), \\ \sigma_9^{(2)}(r, -\pi, r_0, r_1, r_2) & \equiv -\frac{1}{2\sqrt{r}} \sigma_9^{(1)}(\sqrt{r}, 0, \sqrt{r_0}, \sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}), \\ \tau_{r9}^{(2)}(r, -\pi, r_0, r_1, r_2) & \equiv -\frac{1}{2\sqrt{r}} \tau_{r9}^{(1)}(\sqrt{r}, 0, \sqrt{r_0}, \sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}), \\ u_9^{(2)}(r, \pi, r_0, r_1, r_2) & \equiv u_9^{(1)}(\sqrt{r}, \pi, \sqrt{r_0}, \sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}), \\ u_r^{(2)}(r, \pi, r_0, r_1, r_2) & \equiv u_r^{(1)}(\sqrt{r}, \pi, \sqrt{r_0}, \sqrt{r_1}, \sqrt{r_2}). \end{aligned} \quad (31)$$

Ці тотожності разом із формулами (23), (24), (26), (27) визначають напруження та переміщення на межі з включенням. Подібні до (31) тотожності у випадку дії на верхній берег тріщини зосереджених нормальної та тангенціальної сил та відсутності клина встановлено в роботі [10].

Комплексну комбінацію напружень на продовженні включення знайдемо з (4). Аналогічно до (25) з урахуванням тотожностей (28) матимемо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} (\sigma_9^{(2)} + i\tau_{r9}^{(2)}) \Big|_{9=0} & = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_0}} e^{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \pi(\tau - \theta)}{\operatorname{ch} \pi(2\tau - \theta)} [(1 + i\mu_0)\Phi_0^+(2\tau) + \\ & + (1 + i\mu_1)e^{-i\tau a}\Phi_1^-(2\tau)] e^{-i\tau\xi} d\tau. \end{aligned}$$

Звідси після перетворень отримуємо

$$\begin{aligned}
(\sigma_9^{(2)} + i\tau_{r9}^{(2)})|_{9=0} &= \frac{\theta Gh}{2\sqrt[4]{r_0 r_1}} \sqrt{\frac{1+\mu_1^2}{\pi r}} |z_{11}^-| \left\{ \frac{i-\mu_0}{\Gamma(3/2-\gamma_0)} \times \right. \\
&\times \left[ e^{\pi\theta} {}_2F_1\left(s_1, \bar{s}_1; \frac{3}{2}-\gamma_0; -i\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right) - \right. \\
&- e^{-\pi\theta} {}_2F_1\left(s_1, \bar{s}_1; \frac{3}{2}-\gamma_0; i\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right) \left. \right] + \\
&+ \frac{\Gamma(1/2-\gamma_0)}{|\Gamma(1-\gamma_0+i\theta)|^2 \operatorname{sh} \pi\theta} \left[ e^{-\pi i(1/4-\gamma_0/2+i\theta)} \times \right. \\
&\times {}_2F_1\left(\gamma_0+i\theta, \gamma_0-i\theta; \frac{1}{2}+\gamma_0; -i\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right) - e^{\pi i(1/4-\gamma_0/2+i\theta)} \times \\
&\times {}_2F_1\left(\gamma_0+i\theta, \gamma_0-i\theta; \frac{1}{2}+\gamma_0; i\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right) \left. \right] \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1/4+\gamma_0/2} \left. \right\}, \\
&0 < r \leq r_0. \quad (32)
\end{aligned}$$

За відсутності тертя між берегами тріщини ( $\mu_0 = 0$ ,  $\gamma_0 = 0$ ), виразивши гіпергеометричні функції із (32) через елементарні [1], знаходимо

$$\begin{aligned}
(\sigma_9^{(2)} + i\tau_{r9}^{(2)})|_{9=0} &= \frac{Gh}{2\pi\sqrt[4]{r_1} r^3} \sqrt{i(1+i\mu_0)} \sqrt{1+\mu_1^2} |z_{11}^-| \times \\
&\times \left[ \left( \sqrt{-i} \sqrt[4]{\frac{r}{r_0}} - i \sqrt{1+i\sqrt{\frac{r}{r_0}}} \right)^{2i\theta} - \right. \\
&\left. - \left( i \sqrt{1-i\sqrt{\frac{r}{r_0}}} - \sqrt{i} \sqrt[4]{\frac{r}{r_0}} \right)^{2i\theta} \right], \quad 0 < r \leq r_0.
\end{aligned}$$

Із (32) отримуємо асимптотичну поведінку напружень на продовженні відшарованого включення в околі його кінця:

$$\begin{aligned}
\sigma_9^{(2)}|_{9=0} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^3 \frac{K_I^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} + O(1), \\
\tau_{r9}^{(2)}|_{9=0} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^3 \frac{K_{II}^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} + O(1), \quad r \rightarrow 0, \\
K_I^{(2k+1)} + iK_{II}^{(2k+1)} &= \frac{Gh}{\sqrt{r_1}} \frac{\sqrt{\pi(1+\mu_1^2)} \theta (\gamma_0^2 + \theta^2)^k}{|\Gamma(1-\gamma_0+i\theta)\Gamma(1+i\theta)| \Gamma(k+1/2+\gamma_0)} |z_{11}^-| \times \\
&\times \frac{\sin[(\pi/2)(k+1/2-\gamma_0+2i\theta)]}{i \operatorname{sh} \pi\theta \cos \pi\gamma_0} r_0^{-1/2(k-1/2+\gamma_0)}, \quad k = 0, 1, \\
K_I^{(2)} &= -\mu_0 K_{II}^{(2)}, \quad K_{II}^{(2)} = \frac{Gh}{\sqrt{\pi r_1}} \sqrt{1+\mu_1^2} \frac{\theta \operatorname{sh} \pi\theta}{\Gamma(3/2-\gamma_0)} \left| \frac{\Gamma(1-\gamma_0+i\theta)}{\Gamma(1+i\theta)} z_{11}^- \right|, \\
\sigma_1 &= -\frac{1}{4} + \frac{\gamma_0}{2}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = \frac{1}{4} + \frac{\gamma_0}{2}.
\end{aligned}$$

Напруження в околі точки  $r = 0$  характеризується трьома особливостями з показниками  $1/2 - \sigma_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ , і відповідними до них коефіцієнтами інтенсивності напружень  $K_I^{(j)}$ ,  $K_{II}^{(j)}$ . Розподіли напружень та переміщень всередині площини поблизу кінця включення визначаються через ці коефіцієнти за формулами, отриманими в [7].

Умова (2) у випадку  $n = 2$ , яка пов'язана з припущенням, що точки берега тріщини, які знаходяться у контакті з включенням, рухаються у напрямку від вершини тріщини, виконується з огляду на останню з тотожностей (31), а також тому, що гіпергеометрична функція із (27) набуває додатних значень.

Таблиця 1

$\bar{r}_2$	1.2	1.5	2	3	4	10	50	$\infty$
$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 0$								
$\bar{r}_0 \cdot 10^7$	2.515	2.607	2.868	3.310	3.644	4.714	6.265	8.163
$-\bar{K}_{II}$	0.719	0.899	1.013	1.100	1.137	1.197	1.229	1.241
$\mu_0 = 0.5, \quad \mu_1 = 0.25$								
$\bar{r}_0 \cdot 10^7$	0.197	0.207	0.229	0.266	0.294	0.384	0.515	0.667
$-\bar{K}_{II}$	1.773	2.192	2.451	2.632	2.702	2.795	2.814	2.792

Таблиця 2

$\bar{r}_2$	1.2	1.5	2	3	4	10	50	$\infty$
$\mu_0 = 0, \quad \mu_1 = 0$								
$\bar{r}_0 \cdot 10^{13}$	0.695	0.631	0.658	0.744	0.822	1.136	1.863	6.663
$\bar{K}_I^{(1)} \cdot 10^5$	1.171	1.501	1.763	2.031	2.187	2.591	3.126	4.519
$\bar{K}_I^{(2)}$	0	0	0	0	0	0	0	0
$-\bar{K}_I^{(3)}$	0.777	1.046	1.203	1.303	1.335	1.346	1.268	0.969
$-\bar{K}_{II}^{(1)} \cdot 10^4$	0.410	0.525	0.617	0.711	0.765	0.907	1.094	1.582
$\bar{K}_{II}^{(2)} \cdot 10^2$	0.603	0.793	0.921	1.029	1.080	1.181	1.259	1.323
$-\bar{K}_{II}^{(3)} \cdot 10^{-1}$	0.272	0.366	0.421	0.456	0.467	0.471	0.444	0.339
$\mu_0 = 0.5, \quad \mu_1 = 0.25$								
$\bar{r}_0 \cdot 10^{15}$	0.412	0.389	0.412	0.471	0.523	0.735	1.230	4.448
$\bar{K}_I^{(1)} \cdot 10^5$	0.870	1.106	1.294	1.486	1.596	1.877	2.237	3.105
$-\bar{K}_I^{(2)} \cdot 10^2$	0.327	0.421	0.486	0.542	0.568	0.618	0.655	0.679
$-\bar{K}_I^{(3)} \cdot 10^{-1}$	0.736	0.963	1.095	1.176	1.198	1.189	1.095	0.799
$-\bar{K}_{II}^{(1)} \cdot 10^4$	0.264	0.336	0.393	0.451	0.484	0.570	0.679	0.942
$\bar{K}_{II}^{(2)} \cdot 10^2$	0.654	0.842	0.973	1.083	1.136	1.236	1.311	1.358
$-\bar{K}_{II}^{(3)} \cdot 10^{-2}$	0.297	0.388	0.442	0.474	0.483	0.480	0.442	0.322

**6. Результати обчислень.** Обчислення проведено для значення коефіцієнта Пуассона  $\nu = 0.3$  як за фрикційного контакту між берегами тріщини та між клином і берегом тріщини з коефіцієнтами тертя  $\mu_0 = 0.5$  і  $\mu_1 = 0.25$

відповідно, так і за гладкого контакту ( $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_1 = 0$ ). У табл. 1 і табл. 2, які відповідають **задачам 1 і 2**, для різних значень відношень відстаней  $\bar{r}_2 = r_2/r_1$  країв клина до вершини тріщини подано значення відносного розміру  $\bar{r}_0 = r_0/r_1$  області контакту берегів тріщини біля її вершини та безрозмірних коефіцієнтів інтенсивності напружень

$$\begin{aligned}\bar{K}_{II} &= \frac{1}{Gh} K_{II} r_1^{1/2+\gamma_0}, & \bar{K}_I^{(1)} &= \frac{1}{Gh} K_I^{(1)} r_1^{1/4+\gamma_0/2}, & \bar{K}_I^{(2)} &= \frac{1}{Gh} K_I^{(2)} \sqrt{r_1}, \\ \bar{K}_I^{(3)} &= \frac{1}{Gh} K_I^{(3)} r_1^{3/4+\gamma_0/2}, & \bar{K}_{II}^{(1)} &= \frac{1}{Gh} K_{II}^{(1)} r_1^{1/4+\gamma_0/2}, & \bar{K}_{II}^{(2)} &= \frac{1}{Gh} K_{II}^{(2)} \sqrt{r_1}, \\ \bar{K}_{II}^{(3)} &= \frac{1}{Gh} K_{II}^{(3)} r_1^{3/4+\gamma_0/2}.\end{aligned}$$

Спостерігаємо значний вплив тертя на коефіцієнти інтенсивності напружень.

На рис. 3 і рис. 4 зображено розподіли безрозмірних контактних напружень  $\bar{\sigma} = \frac{r_1}{Gh} \sigma_9 \Big|_{\vartheta=\pi}$ ,  $n = 1, 2$ , між клином і берегом тріщини у **задачах 1 і 2** відповідно, для значень відношення розмірів  $r_2/r_1 = 2, 3, 4, \infty$  (криві 1–4). Суцільні лінії відповідають фрикційному контакту ( $\mu_0 = 0.5$ ,  $\mu_1 = 0.25$ ), штрихові – гладкому контакту ( $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_1 = 0$ ). Те, що відповідні суцільні та штрихові лінії майже зливаються, свідчить про незначний вплив тертя на розподіли контактних напружень.

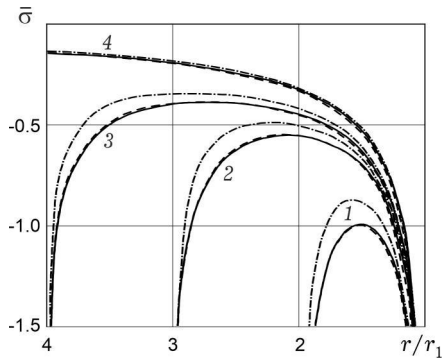


Рис. 3

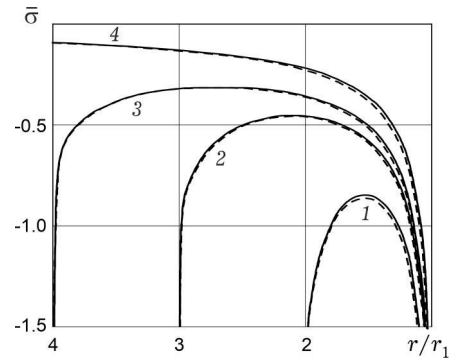


Рис. 4

У **задачі 2** рівень контактних напружень за їхніми абсолютними значеннями дещо менший, ніж у **задачі 1**. Це можна пояснити тим, що механічна система, яка відповідає **задачі 2**, має меншу жорсткість, ніж у **задачі 1**. На рис. 3, крім того, для порівняння штрихпунктирними кривими зображено відповідні розподіли

$$\bar{\sigma} = \frac{r_1}{Gh} \sigma_9 \Big|_{\vartheta=\pi} = - \frac{r_1 \sqrt{r_2}}{2(1-\nu) \mathbf{K}(\sqrt{r_1/r_2}) \sqrt{r(r-r_1)(r_2-r)}},$$

де  $\mathbf{K}(k)$  – повний еліптичний інтеграл першого роду, у задачі розклинювання однорідної площини вздовж напівнескінченної тріщини [8, с. 314]. У цій задачі ширина клина дорівнює  $2h$ , сили тертя між клином і берегом тріщини не враховано ( $\mu_1 = 0$ ), і область контакту берегів тріщини біля її вершини відсутня ( $r_0 = 0$ ). Розподіли контактних напружень у цьому випадку займають проміжне положення між відповідними розподілами у

**задачах 1 і 2**, а у випадку напівнескінченного клина розподіл контактних напружень майже такий, як у **задачах 1 і 2** (криві 4 на рис. 3).

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.  
Te same: *Bateman H.* Higher transcendental functions. – Vol. 1. – New York etc.: McGraw-Hill, 1953. – xxvi+302 p.
2. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.  
Te same: *Johnson K. L.* Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – xii+452 p.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. – Москва – Ленинград: Физматгиз, 1962. – 708 с.
4. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.  
Te same: *Noble B.* Methods based on the Wiener – Hopf technique for the solution of partial differential equations. – London: Pergamon Press, 1958. – x+246 p.
5. Острик В. І. Асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі краю області контакту // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 4. – С. 58–71.  
Te same: *Ostryk V. I.* Asymptotic distributions of stresses and displacements near the edge of a contact zone // *J. Math. Sci.* – 2019. – **238**, No. 1. – P. 63–82. – <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04218-9>.
6. Острик В. І. Контакт берегів міжфазної напівнескінченної тріщини // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 1. – С. 106–121. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2020.63.1.106-121>.  
Te same: *Ostryk V. I.* Contact of the faces of an interface semiinfinite crack // *J. Math. Sci.* – 2023. – **270**, No. 1. – P. 123–142. – <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06336-x>.
7. Острик В. І. Контактна задача для міжфазного відшарованого напівнескінченного включення // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2022. – **65**, № 3–4. – С. 160–177. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.3-4.160-177>.  
Te same: *Ostryk V. I.* Contact problem for an interface exfoliated semi-infinite inclusion // *J. Math. Sci.* – 2025. – **287**, No. 2. – P. 295–320. – <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07592-9>.
8. Острик В. І. Контактна механіка: Підруч. – Київ: ВПЦ «Київ. ун-т», 2015. – 560 с.
9. Острик В. І. Метод факторизації та його узагальнення у змішаних задачах теорії пружності. – Київ: ВПЦ «Київ. ун-т», 2018. – 480 с.
10. Острик В. І. Розклинювання пружної півплощини вздовж межової напівнескінченної тріщини // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2022. – **65**, № 1–2. – С. 158–171. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.1-2.158-171>.  
Te same: *Ostryk V. I.* Wedging of an elastic half plane along a semiinfinite interface crack // *J. Math. Sci.* – 2024. – **282**, No. 5. – P. 798–816. – <https://doi.org/10.1007/s10958-024-07217-7>.
11. Острик В. І. Симетрія інверсії розв’язків основних крайових задач двовимірної теорії пружності для клина // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2017. – **60**, № 4. – С. 90–110.  
Te same: *Ostryk V. I.* Inversion symmetry of the solutions of basic boundary-value problems of two-dimensional elasticity theory for a wedge // *J. Math. Sci.* – 2020. – **247**, No. 1. – P. 108–138. – <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04792-3>.
12. Острик В. І., Щокотова О. М. Ковзний контакт штампа з пружним клином // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2011. – **47**, № 4. – С. 82–91.  
Te same: *Ostryk V. I., Shchokotova O. M.* Sliding contact of a punch with elastic wedge // *Mater. Sci.* – 2012. – **47**, No. 4. – P. 514–526. – <https://doi.org/10.1007/s11003-012-9423-z>.
13. Саврук М. П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с. – Механика разрушения и прочность материалов: Справ. пособие: В 4 т. / Под общ. ред. В. В. Панасюка. – Т. 2.

14. *Симонов И. В.* Контактные задачи расклинивания упругих тел // *Механика контактных взаимодействий* / Под ред. В. М. Александрова и И. И. Воровича. – Москва: Физмалит, 2001. – С. 654–667.
15. *Симонов И. В.* О хрупком расклинивании кусочно-однородной упругой среды // *Прикл. математика и механика*. – 1985. – **49**, № 2. – С. 275–283.  
 The same: *Simonov I. V.* Brittle cleavage of a piecewise-homogeneous elastic medium // *J. Appl. Math. Mech.* – 1985. – **49**, No. 2. – P. 207–214.  
 – [https://doi.org/10.1016/0021-8928\(85\)90104-2](https://doi.org/10.1016/0021-8928(85)90104-2).
16. *Симонов И. В.* Трещина на границе раздела двух упругих сред при расклинивании // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела*. – 1985. – № 3. – С. 105–112.
17. *Улитко А. Ф.* Полубесконечный разрез вдоль границы жестко соединенных полуплоскостей из различных материалов // *Соврем. проблемы механики сплошной среды*. – Ростов-на-Дону: Книга, 1995. – С. 185–193.
18. *Федорюк М. В.* Асимптотика: Интегралы и ряды. – Москва: Наука, 1987. – 544 с.
19. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – Москва: Наука, 1974. – 640 с.  
 The same: *Cherepanov G. P.* Mechanics of brittle fracture. – New York: McGraw-Hill, 1979. – 939 p.
20. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1977. – **44**, No. 4. – P 780–781. – <https://doi.org/10.1115/1.3424179>.

#### BOUNDARY WEDGING OF AN ELASTIC HALF-PLANE AND A PLANE WITH A SEMI-INFINITE THIN RIGID INCLUSION

*Two problems of wedging by a finite wedge of constant width are considered: along a semi-infinite crack on the boundary of an elastic half-plane and along a crack on the boundary of a thin rigid semi-infinite inclusion in an elastic plane. The contact of the crack edges near its tip and the friction force in the contact zones are taken into account. Using the Wiener – Hopf method, analytical solutions to the problems are obtained and a simple relation between them is shown. For each of the problems, the size of the contact zone near the crack tip, distributions of contact stresses and stresses on the crack extension, and stress intensity factors are determined.*

**Key words:** *wedging, boundary crack, exfoliated inclusion, Comninou's model, Wiener – Hopf method, stress intensity factors.*