

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОЇ ДИФУЗІЇ ЗА УМОВ НЕЛІНІЙНОЇ СОРБЦІЇ У ДВОШАРОВОМУ ПОРИСТОМУ ТІЛІ

Досліджуються процеси конвективної дифузії домішок та їхня сорбція скелетом у двошаровому пористому тілі за умов неідеального контакту щодо функції концентрації домішкових частинок. Постановки контактної-крайових задач дифузії виконано за умов нелінійної сорбції та у лінеаризованому варіанті. Нелінійну задачу зведено до двох взаємозв'язаних систем інтегральних рівнянь, які розв'язано методом простої ітерації у вигляді інтегральних рядів Неймана. Показано абсолютну і рівномірну збіжність інтегральних рядів, побудованих в околі розв'язків лінеаризованої математичної моделі.

Ключові слова: математичне моделювання, конвективна дифузія, нелінійна сорбція, нелінійна контактна-крайова задача, ряд Неймана, двошарове пористе тіло.

Вступ. Пом'якшення води у промислових об'ємах, як правило, здійснюється її фільтрацією через природні чи штучні пористі тіла. У статтях [5, 8] досліджено процеси фільтрації води у пористому шарі, а пом'якшення води розуміється як реалізація впливу нелінійних джерел при обмеженій ємності скелета.

Метою цієї роботи є математичне моделювання процесів конвективної дифузії домішкової речовини за умов нелінійної сорбції у двошаровому тілі, коли на границі контакту пористих шарів задано умову неідеального масового контакту.

1. Математична модель конвективної дифузії для двох контактуючих пористих шарів. При формулюванні вихідних співвідношень математичної моделі масоперенесення частинок у двошаровому пористому тілі вважаємо, що довільна область кожного із шарів складається зі скелета та водного розчину, який заповнює поровий простір. Процес масоперенесення відбувається двома механізмами – конвективним і дифузійним. Приймаємо, що у процесі фільтрації скелет тіла не деформується і не враховуються зміни, пов'язані із сорбцією домішкової речовини на поверхню скелета, тобто пористість залишається сталою. Водний розчин є двокомпонентним і складається із частинок води та домішкових частинок. У свою чергу, частинки домішки знаходяться у двох станах – у конвективно рухомому розчині та міцно зв'язані з поверхнею скелета.

Процеси конвективної дифузії домішок і їхню сорбцію скелетом описуємо з використанням наближення континууму центрів мас [6] для рідкої фази. При цьому приймаємо, що швидкість конвективного руху частинок приблизно дорівнює істинній швидкості порового розчину. Також вважаємо, що середовище є ізотропним і поверхнева та об'ємна пористості є однаковими.

Враховуючи, що тіло складається з двох різних за пористістю контактуючих шарів з товщинами ℓ і $L - \ell$ (рис. 1), у яких міграційні властивості частинок можуть істотно відрізнитись, і частинки домішки перебувають у двох різних станах, складаємо рівняння балансу маси для кожного з пористих шарів

$$\rho \frac{dc_i^{(j)}}{d\tau} = -\nabla \cdot \mathbf{J}_i^{(j)} + \sigma_{mi}^{(j)}, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2,$$

✉ byixx13@gmail.com

де ρ – сумарна густина розчину; $c_i^{(j)}$ – масова концентрація i -ї компоненти в j -му шарі; $\mathbf{J}_i^{(j)}$ – дифузійний потік i -ї складової розчину в j -му шарі, $\sigma_{mi}^{(j)}$ – потужність виробництва маси i -ї компоненти j -го мікроелемента тіла; $d/dt = \partial/\partial\tau + (\mathbf{v}_r^{(j)} \cdot \nabla)$ – повна похідна за часом; $\mathbf{v}_r^{(j)}$ – швидкість конвективного перенесення в j -му шарі, $j = 1, 2$. Тут компоненті водного розчину відповідає значення індексу $i = 0$, домішковим частинкам у конвективно рухомому розчині – $i = 1$, у зв'язаному стані – $i = 2$.

Дифузійний потік $\mathbf{J}_i^{(j)}$ визначається градієнтами хімічних потенціалів, які лінійно залежать від концентрацій [3], тобто

$$\mathbf{J}_i^{(j)} = -L_j^* \nabla c_i^{(j)}, \quad i = 0, 1, 2, \quad j = 1, 2,$$

де L_j^* – кінетичні коефіцієнти перенесення в j -му мікроелементі тіла.

Концентрації $c_i^{(j)}$ і потоки $\mathbf{J}_i^{(j)}$ задовольняють умови нормування $\sum_{i,j} c_i^{(j)} = 1$ і $\sum_{i,j} \mathbf{J}_i^{(j)} = 0$. Перенесення у зв'язаному стані відсутнє. Густина ρ

та кінетичні коефіцієнти L_j^* вважаємо сталими.

За таких умов процес конвективної дифузії домішкової речовини, що супроводжується нелінійною сорбцією частинок на скелет [8], у двошаровому пористому шарі (див. рис. 1) описується такими системами рівнянь:

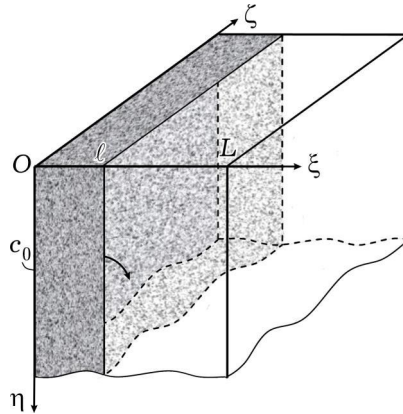


Рис. 1

– для першого шару, $\xi \in (0, \ell)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial \tau} + v_r^{(1)} \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial \xi} &= D^{(1)} \frac{\partial^2 c_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - \gamma^{(1)} (c_{\max}^{(1)} - c_2^{(1)}) c_1^{(1)}, \\ \frac{\partial c_2^{(1)}}{\partial \tau} &= \gamma^{(1)} (c_{\max}^{(1)} - c_2^{(1)}) c_1^{(1)}, \end{aligned} \quad (1)$$

– для другого шару, $\xi \in (\ell, L)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial \tau} + v_r^{(2)} \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial \xi} &= D^{(2)} \frac{\partial^2 c_1^{(2)}}{\partial \xi^2} - \gamma^{(2)} (c_{\max}^{(2)} - c_2^{(2)}) c_1^{(2)}, \\ \frac{\partial c_2^{(2)}}{\partial \tau} &= \gamma^{(2)} (c_{\max}^{(2)} - c_2^{(2)}) c_1^{(2)}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $c_1^{(j)}(\tau, \xi)$ – концентрація домішкової речовини у водному розчині j -го ша-

ру, $c_2^{(j)}(\tau, \xi)$ – концентрація частинок, сорбованих на скелет пористого j -го шару, $j = 1, 2$; $D^{(j)}$ – коефіцієнт дифузії; $\gamma^{(j)}$ – коефіцієнт інтенсивності сорбції; $c_{\max}^{(j)}$ – концентрація «насичення» в j -му шарі, тобто максимальне значення концентрації домішки, здатної сорбуватися на скелет, експериментально вимірювана величина; τ – час.

Приймаємо, що на границях тіла $x = 0$ і $x = L$ підтримуються сталі значення концентрації домішки у водному розчині:

$$c_1^{(1)}(\tau, \xi)|_{\xi=0} = c_0 \equiv \text{const}, \quad c_2^{(2)}(\tau, \xi)|_{\xi=L} = c_* \equiv \text{const}, \quad \tau \in (0, \infty), \quad (3)$$

і накладаємо нульові початкові умови:

$$c_1^{(1)}(\tau, \xi)|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \in (0, \ell), \quad c_2^{(2)}(\tau, \xi)|_{\tau=0} = 0, \quad \xi \in (\ell, L). \quad (4)$$

На границі контакту $x = \ell$ приймаємо рівність хімічних потенціалів домішкових частинок [3], яка за лінійної залежності від концентрації зводиться до умови [6]

$$\lambda^{(1)} c_1^{(1)}(\tau, \xi)|_{\xi=\ell} = \lambda^{(2)} c_1^{(2)}(\tau, \xi)|_{\xi=\ell}, \quad (5)$$

а також рівність їхніх потоків

$$\left(D^{(1)} \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial \xi} - v_r^{(1)} c_1^{(1)} \right) \Big|_{\xi=\ell} = \left(D^{(2)} \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial \xi} - v_r^{(2)} c_1^{(2)} \right) \Big|_{\xi=\ell}. \quad (6)$$

Тут, як і вище, верхнім індексом позначено номер шару, а $\lambda^{(1)}$ і $\lambda^{(2)}$ є коефіцієнтами концентраційної залежності хімічних потенціалів у першому і другому шарах.

Така постановка контактної-крайової задачі допускає введення природної безрозмірної форми [7]. Введемо такі нові безрозмірні змінні:

$$t = k_* \tau, \quad x = (k_* / D_*)^{1/2} \xi. \quad (7)$$

Тут $k_* = \min \{k^{(1)}, k^{(2)}\}$, $k^{(j)} = \gamma^{(j)} c_{\max}^{(j)}$, $j = 1, 2$; $D_* = \max \{D^{(1)}, D^{(2)}\}$.

У безрозмірних змінних (7) системи рівнянь (1), (2) перетворимо до форми

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_1^{(j)}}{\partial t} &= d_j \frac{\partial^2 c_1^{(j)}}{\partial x^2} - v_j \frac{\partial c_1^{(j)}}{\partial x} - a_j (1 - c_2^{(j)} / c_{\max}^{(j)}) c_1^{(j)}, \\ \frac{\partial c_2^{(j)}}{\partial t} &= a_j (1 - c_2^{(j)} / c_{\max}^{(j)}), \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

де $d_j = D^{(j)} / D_*$, $v_j = v_r^{(j)} / \sqrt{D_* k_*}$, $a_j = \gamma^{(j)} c_{\max}^{(j)} / k_*$.

Граничні умови (3) у безрозмірних змінних (7) набудуть вигляду

$$c_1^{(1)}(t, x)|_{x=0} = c_0 \equiv \text{const}, \quad c_1^{(2)}(t, x)|_{x=x_L} = c_* \equiv \text{const}, \quad (9)$$

а початкові умови (4) залишаються нульовими:

$$c_1^{(j)}(t, x)|_{t=0} = c_2^{(j)}(t, x)|_{t=0} = 0. \quad (10)$$

Тут $x_L = (k_* / D_*)^{1/2} L$.

На границі контакту $x = x_\ell$, $x_\ell = (k_* / D_*)^{1/2} \ell$, умови неідеального масового контакту, сформульовані стосовно функції концентрації $c_i^{(j)}(\tau, \xi)$, у безрозмірних змінних (7) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \lambda c_1^{(1)}(t, x) \Big|_{x=x_\ell} &= c_1^{(2)}(t, x) \Big|_{x=x_\ell}, \\ \left(d_1 \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial x} - v_1 c_1^{(1)} \right) \Big|_{x=x_\ell} &= \left(d_2 \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial x} - v_2 c_1^{(2)} \right) \Big|_{x=x_\ell}, \end{aligned} \quad (11)$$

де $\lambda = \lambda^{(1)}/\lambda^{(2)}$.

2. Лінеаризована постановка контактної крайової задачі. Проведемо лінеаризацію систем рівнянь конвективної дифузії з урахуванням нелінійних сорбційних процесів (1), (2). Тоді отримаємо

– для першого шару, $\xi \in (0, \ell)$:

$$\frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial \tau} + v_r^{(1)} \frac{\partial c_1^{(1)}}{\partial \xi} = D^{(1)} \frac{\partial^2 c_1^{(1)}}{\partial \xi^2} - k^{(1)} c_1^{(1)}, \quad \frac{\partial c_2^{(1)}}{\partial \tau} = k^{(1)} c_1^{(1)},$$

– для другого шару, $\xi \in (\ell, L)$:

$$\frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial \tau} + v_r^{(2)} \frac{\partial c_1^{(2)}}{\partial x} = D^{(2)} \frac{\partial^2 c_1^{(2)}}{\partial x^2} - k^{(2)} c_1^{(2)}, \quad \frac{\partial c_2^{(2)}}{\partial \tau} = k^{(2)} c_1^{(2)}.$$

При цьому граничні (3), початкові (4) і контактні умови (5), (6) залишаються без змін.

У безрозмірних змінних (7) лінеаризовані системи рівнянь набудуть вигляду

$$\frac{\partial c_1^{(j)}}{\partial t} = d_j \frac{\partial^2 c_1^{(j)}}{\partial x^2} - v_j \frac{\partial c_1^{(j)}}{\partial x} - a_j c_1^{(j)}, \quad \frac{\partial c_2^{(j)}}{\partial t} = a_j c_1^{(j)}, \quad j = 1, 2, \quad (12)$$

за граничних (9), початкових (10) і контактних (11) умов.

Оскільки точні аналітичні розв'язки нелінійної крайової задачі (8)–(11) знайти неможливо, тому для побудови наближених розв'язків цієї системи рівнянь застосуємо метод послідовних наближень [1, 2, 4].

3. Системи інтегральних рівнянь, еквівалентних вихідній контактній крайовій задачі фільтрації. Зведемо контактну-крайову задачу (8)–(11) до двох систем інтегральних рівнянь, записаних для кожного із шарів. Розглядаючи нелінійні доданки $\pm \gamma^{(j)} c_1^{(j)} c_2^{(j)}$, $j = 1, 2$, у рівняннях (8) як «джерела», подамо розв'язки контактної-крайової задачі у вигляді суми розв'язків однорідних крайових задач і згорток функцій Гріна з джерелом:

– для першого шару, $x \in (0, x_\ell)$:

$$\begin{aligned} c_1^{(1)}(t, x) &= c_1^{h(1)}(t, x) + \int_0^t \int_0^{x_\ell} G_1^{(1)}(t, t'; x, x') \gamma^{(1)} c_1^{(1)}(t', x') c_2^{(1)}(t', x') dx' dt', \\ c_2^{(1)}(t, x) &= c_2^{h(1)}(t, x) - \int_0^t \int_0^{x_\ell} G_2^{(1)}(t, t'; x, x') \gamma^{(1)} c_1^{(1)}(t', x') c_2^{(1)}(t', x') dx' dt', \end{aligned} \quad (13)$$

– для другого шару, $x \in (x_\ell, x_L)$:

$$\begin{aligned} c_1^{(2)}(t, x) &= c_1^{h(2)}(t, x) + \int_0^t \int_{x_\ell}^{x_L} G_1^{(2)}(t, t'; x, x') \gamma^{(2)} c_1^{(2)}(t', x') c_2^{(2)}(t', x') dx' dt', \\ c_2^{(2)}(t, x) &= c_2^{h(2)}(t, x) - \int_0^t \int_{x_\ell}^{x_L} G_2^{(2)}(t, t'; x, x') \gamma^{(2)} c_1^{(2)}(t', x') c_2^{(2)}(t', x') dx' dt', \end{aligned} \quad (14)$$

де $c_1^{h(j)}(t, x)$, $c_2^{h(j)}(t, x)$ – розв'язки однорідної крайової задачі в j -му шарі, тобто розв'язки задачі в лінеаризованій постановці (12) з крайовими умова-

ми (9), (10), пов'язані між собою контактними умовами (11); $G_1^{(j)}(t, t'; x, x')$, $G_2^{(j)}(t, t'; x, x')$ – функції Гріна вихідної нелінійної задачі в j -му шарі.

Розв'язки однорідної крайової задачі (12), (9)–(11) побудовано в монографії [6]. У введених вище позначеннях вони є такими:

– у першому шарі, $x \in (0, x_\ell)$:

$$c_1^{h(1)}(t, x) = c_0 e^{\frac{v_1 x}{2d_1}} \left\{ \frac{\text{sh } \eta_1(x_\ell - x)}{\text{sh } \eta_1 x_\ell} - \frac{2d_1}{x_\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n \sin(y_n x)}{d_1 y_n^2 + a_1} e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)t} \right\} - \\ - \frac{2d_1}{\lambda x_\ell} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \sin(y_n x) \int_0^t g(t') e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)(t-t')} dt', \quad (15)$$

$$c_2^{h(1)}(t, x) = c_0 e^{\frac{v_1 x}{2d_1}} \left\{ \frac{\text{sh } \eta_1(x_\ell - x)}{\text{sh } \eta_1 x_\ell} t + \frac{x_\ell}{2\eta_1 d_1} \left[\frac{\text{sh } \eta_1 x}{(\text{sh } \eta_1 x_\ell)^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 + \frac{x}{x_\ell}\right) \frac{\text{ch } \eta_1(x_\ell - x)}{\text{sh } \eta_1 x_\ell} \right] + \frac{2d_1}{x_\ell} e^{-a_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n \sin(y_n x)}{(d_1 y_n^2 + a_1)^2} e^{-d_1 y_n^2 t} \right\} - \\ - \frac{2d_1}{\lambda x_\ell} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \sin(y_n x) \int_0^t \int_0^{t'} g(t'') e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)(t'-t'')} dt'' dt', \quad (16)$$

– у другому шарі, $x \in (x_\ell, x_L)$:

$$c_1^{h(2)}(t, x) = c_* e^{-\frac{v_2(x_L - x)}{2d_2}} \left\{ \frac{\text{sh } \eta_2(x - x_\ell)}{\text{sh } \eta_2 \delta x} - \right. \\ \left. - \frac{2d_2}{\delta x} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{y_m \sin(y_m(x - x_\ell))}{d_2 y_m^2 + a_2} e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)t} \right\} + \\ + \frac{2d_2}{\delta x} e^{\frac{v_2(x - x_\ell)}{2d_2}} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin(y_m(x - x_\ell)) \times \\ \times \int_0^t g(t') e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)(t-t')} dt', \quad (17)$$

$$c_2^{h(2)}(t, x) = c_* e^{-\frac{v_2(x_L - x)}{2d_2}} \left\{ \frac{\text{sh } \eta_2(x - x_\ell)}{\text{sh } \eta_2 \delta x} t + \right. \\ \left. + \frac{\delta x}{2\eta_2 d_2} \left[\frac{\text{sh } \eta_2(\delta x + x - x_\ell)}{(\text{sh } \eta_2 \delta x)^2} + \left(1 + \frac{x - x_\ell}{\delta x}\right) \frac{\text{ch } \eta_2(x - x_\ell)}{\text{sh } \eta_2 \delta x} \right] + \right. \\ \left. + \frac{2d_2}{\delta x} e^{-a_2 t} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{y_m \sin(y_m(x - x_\ell))}{(d_2 y_m^2 + a_2)^2} e^{-d_2 y_m^2 t} \right\} - \\ - \frac{2d_2}{\delta x} e^{\frac{v_2(x - x_\ell)}{2d_2}} \sum_{m=1}^{\infty} y_m \sin(y_m(x - x_\ell)) \times \\ \times \int_0^t \int_0^{t'} g(t'') e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)(t'-t'')} dt'' dt'. \quad (18)$$

Тут $\eta_j = \sqrt{a_j/d_j}$, $j = 1, 2$, $y_n = n\pi/x_\ell$, $y_m = m\pi/\delta x$, $\delta x = x_L - x_\ell$. Вираз для функції $g(t')$ має вигляд

$$g(t') = \frac{A_1 c_0 \exp\left\{\frac{v_1 x_\ell}{2d_1}\right\} \Sigma_n^- + A_2 c_* \exp\left\{-\frac{v_2 \delta x}{2d_2}\right\} \Sigma_m^+}{A_1 \lambda^{-1} \Sigma_n^+ + A_2 \Sigma_m^-}, \quad (19)$$

де

$$A_1 = \frac{2d_1^2}{x_\ell}, \quad A_2 = \frac{2d_2^2}{\delta x}, \quad \Sigma_n^\pm = \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n y_n^2 e^{-(d_1 y_n^2 + a_1)(t-t')},$$

$$\Sigma_m^\pm = \sum_{m=1}^{\infty} (\pm 1)^m y_m^2 e^{-(d_2 y_m^2 + a_2)(t-t')}.$$

Знайдемо тепер функції Гріна $G_1^{(j)}(t, t'; x, x')$, $G_2^{(j)}(t, t'; x, x')$ задачі (8)–(11). За означенням, $G_i^{(j)}(t, t'; x, x')$, $i = 1, 2$, є розв'язком відповідних систем рівнянь з точковим джерелом та нульовими крайовими умовами:

$$\frac{\partial G_1^{(j)}}{\partial t} - d_j \frac{\partial^2 G_1^{(j)}}{\partial x^2} + v_j \frac{\partial G_1^{(j)}}{\partial x} + a_j G_1^{(j)} = \delta(x - x') \delta(t - t'),$$

$$\frac{\partial G_2^{(j)}}{\partial t} - a_j G_1^{(j)} = 0,$$

$$G_1^{(j)}(t, t'; x, x') \Big|_{t=0} = 0, \quad G_2^{(j)}(t, t'; x, x') \Big|_{t=0} = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$G_1^{(1)}(t, t'; x, x') \Big|_{x=0} = 0, \quad G_1^{(j)}(t, t'; x, x') \Big|_{x=x_\ell} = 0,$$

$$G_1^{(2)}(t, t'; x, x') \Big|_{x=x_L} = 0. \quad (20)$$

Застосовуючи інтегральні перетворення та теорему запізнення, для функцій Гріна отримаємо

– для першого шару, $x \in [0, x_\ell]$:

$$G_1^{(1)}(t, t'; x, x') = \frac{2}{x_\ell} \theta(t - t') \exp\left(\frac{v_1(x - x')}{2d_1}\right) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a_n^{(1)}(t-t')} \sin(y_n x) \sin(y_n x'),$$

$$G_2^{(1)}(t, t'; x, x') = -\theta(t - t') a_1 \frac{2}{x_\ell} \exp\left(\frac{v_1(x - x')}{2d_1}\right) \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{(1)}} e^{-a_n^{(1)}(t-t')} \sin(y_n x) \sin(y_n x'); \quad (21)$$

– для другого шару, $x \in [x_\ell, x_L]$:

$$G_1^{(2)}(t, t'; x, x') = \frac{2}{\delta x} \theta(t - t') \exp\left(\frac{v_2(x - x')}{2d_2}\right) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} e^{-a_m^{(2)}(t-t')} \sin(y_m x) \sin(y_m x'),$$

$$G_2^{(1)}(t, t'; x, x') = -\theta(t-t')a_1 \frac{2}{x_\ell} \exp\left(\frac{v_1(x-x')}{2d_1}\right) \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^{(1)}} e^{-a_n^{(1)}(t-t')} \sin(y_n x) \sin(y_n x'), \quad (22)$$

де $a_s^{(j)} = d_j(y_s^2 + v_j^2) + a_j$, $s = n, m$.

4. Ряди Неймана для системи інтегральних рівнянь. Розв'язки систем інтегральних рівнянь (13), (14) побудуємо методом послідовних ітерацій [12, 4], розвиваючи рівняння в ряди в околі розв'язків (15), (16) і (17), (18) однорідних лінійних крайових задач, тобто за нульові наближення приймаючи функції $c_{i(0)}^{(j)}(t, x) = c_i^{h(j)}(t, x)$. Ввівши параметр $\lambda_i^{(j)}$, $i, j = 1, 2$, для p -ї ітерації отримуємо:

– для першого шару, $x \in (0, x_\ell)$:

$$c_{1(p)}^{(1)}(t, x) = c_1^{h(1)}(t, x) + \lambda_1^{(1)} \int_0^t \int_0^{x_\ell} G_1^{(1)}(t, t'; x, x') \times \\ \times \frac{\gamma^{(1)}}{\lambda_1^{(1)}} c_{1(p-1)}^{(1)}(t', x') c_{2(p-1)}^{(1)}(t', x') dx' dt', \quad (23')$$

$$c_{2(p)}^{(1)}(t, x) = c_2^{h(1)}(t, x) - \lambda_2^{(1)} \int_0^t \int_0^{x_\ell} G_2^{(1)}(t, t'; x, x') \times \\ \times \frac{\gamma^{(1)}}{\lambda_2^{(1)}} c_{1(p-1)}^{(1)}(t', x') c_{2(p-1)}^{(1)}(t', x') dx' dt'; \quad (23'')$$

– для другого шару, $x \in (x_\ell, x_L)$:

$$c_{1(p)}^{(2)}(t, x) = c_1^{h(2)}(t, x) + \lambda_1^{(2)} \int_0^t \int_{x_\ell}^{x_L} G_1^{(2)}(t, t'; x, x') \times \\ \times \frac{\gamma^{(2)}}{\lambda_1^{(2)}} c_{1(p-1)}^{(2)}(t', x') c_{2(p-1)}^{(2)}(t', x') dx' dt', \quad (24')$$

$$c_{2(p)}^{(2)}(t, x) = c_2^{h(2)}(t, x) - \lambda_2^{(2)} \int_0^t \int_{x_\ell}^{x_L} G_2^{(2)}(t, t'; x, x') \times \\ \times \frac{\gamma^{(2)}}{\lambda_2^{(2)}} c_{1(p-1)}^{(2)}(t', x') c_{2(p-1)}^{(2)}(t', x') dx' dt'. \quad (24'')$$

Позначимо

$$Q_{(p)}^{(j)}(c_{1(p)}^{(j)}(t', x'), c_{2(p)}^{(j)}(t', x')) = c_{1(p)}^{(j)}(t', x') c_{2(p)}^{(j)}(t', x'), \\ K_i^{(j)}(t, t'; x, x') = \frac{\gamma^{(j)}}{\lambda_i^{(j)}} G_i^{(j)}(t, t'; x, x'), \quad i, j = 1, 2. \quad (25)$$

Подамо функції концентрації в позначеннях (25):

– для першого шару, $x \in (0, x_\ell)$:

$$c_{i(p)}^{(1)}(t, x) = c_i^{h(1)}(t, x) + (-1)^{i+1} \lambda_i^{(1)} \int_0^t \int_0^{x_\ell} K_i^{(1)}(t, t'; x, x') \times$$

$$\begin{aligned} & \times \mathcal{Q}_{(p-1)}^{(1)}(c_{1(p-1)}^{(1)}(t', x'), c_{2(p-1)}^{(1)}(t', x')) dx' dt' = \\ & = c_i^{h(1)}(t, x) + (-1)^{i+1} \lambda_i^{(1)} (K_i^{(1)} \mathcal{Q}_{(p-1)}^{(1)})(t, x), \quad p = 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

– для другого шару, (x_ℓ, x_L) :

$$\begin{aligned} c_{i(p)}^{(2)}(t, x) &= c_i^{h(2)}(t, x) + (-1)^{i+1} \lambda_i^{(2)} \int_0^t \int_{x_\ell}^{x_L} K_i^{(2)}(t, t'; x, x') \times \\ & \times \mathcal{Q}_{(p-1)}^{(2)}(c_{1(p-1)}^{(2)}(t', x'), c_{2(p-1)}^{(2)}(t', x')) dx' dt' = \\ & = c_i^{h(2)}(t, x) + (-1)^{i+1} \lambda_i^{(2)} (K_i^{(2)} \mathcal{Q}_{(p-1)}^{(2)})(t, x), \quad p = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тут $(K_i^{(j)} \mathcal{Q}_{(p-1)}^{(j)})(t, x)$, $j = 1, 2$, – операторний запис подвійного інтеграла [10, 11] по області $[0, t] \times [0, x_\ell]$ для першого шару і $[0, t] \times [x_\ell, x_L]$ – для другого шару.

Тоді запишемо рівності

$$c_i^{(1)}(t, x) = c_i^{h(1)}(t, x) + (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^p \lambda_i^{(1)k} (K_i^{(1)k} \mathcal{Q}^{h(1)})(t, x), \quad p = 1, 2, \dots, \quad (26')$$

$$c_i^{(2)}(t, x) = c_i^{h(2)}(t, x) + (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^p \lambda_i^{(2)k} (K_i^{(2)k} \mathcal{Q}^{h(2)})(t, x), \quad p = 1, 2, \dots, \quad (26'')$$

які перевіримо методом математичної індукції. Тут $\mathcal{Q}^{h(j)} = c_1^{h(j)} c_2^{h(j)}$, $j = 1, 2$.

Якщо в (26) покласти $p = 1$, то отримаємо формули (23') і (23''), тобто твердження для першої ітерації справджується. Покажемо, що якщо твердження (26') і (26'') для p -ї ітерації справджуються, то відповідне твердження для $(p+1)$ -ї ітерації також справджується. Отже,

$$\begin{aligned} c_{i(p+1)}^{(j)}(t, x) &= c_i^{h(j)}(t, x) + (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^p \lambda_i^{(j)k} (K_i^{(j)k} \mathcal{Q}^{h(j)})(t, x) + \\ & + [(-1)^{i+1} \lambda_i^{(j)}]^{p+1} (K_i^{(j)p+1} \mathcal{Q}^{h(j)})(t, x) = \\ & = c_{i(p)}^{(j)}(t, x) + [(-1)^{i+1} \lambda_i^{(j)}]^{p+1} (K_i^{(j)p+1} \mathcal{Q}^{h(j)})(t, x). \end{aligned}$$

Покажемо спочатку, що всі ітерації $(K_i^{(j)k} \mathcal{Q}^{h(j)})(t, x)$ є неперервними і обмеженими:

– в області $[0, t] \times [0, x_\ell]$:

$$\begin{aligned} \|K_i^{(1)p} \mathcal{Q}^{h(1)}\|_C &= \|K(K_i^{(1)p-1} \mathcal{Q}^{h(1)})\|_C \leq \\ & \leq M_1 \text{mes} \{[0, t] \times [0, x_\ell]\} \|K_i^{(1)p-1} \mathcal{Q}^{h(1)}\|_C \leq \dots \leq \\ & \leq (M_1 \text{mes} \{[0, t] \times [0, x_\ell]\})^p \|\mathcal{Q}^{h(1)}\|_C, \end{aligned} \quad (27')$$

– в області $[0, t] \times [x_\ell, x_L]$:

$$\begin{aligned} \|K_i^{(2)p} \mathcal{Q}^{h(2)}\|_C &= \|K(K_i^{(2)p-1} \mathcal{Q}^{h(2)})\|_C \leq \\ & \leq M_2 \text{mes} \{[0, t] \times [x_\ell, x_L]\} \|K_i^{(2)p-1} \mathcal{Q}^{h(2)}\|_C \leq \dots \leq \end{aligned}$$

$$\leq (M_2 \text{mes} \{[0, t] \times [x_\ell, x_L]\})^p \|\mathcal{Q}^{h(2)}\|_C, \quad (27'')$$

де

$$M_j = \max_{B_j} K_i^{(j)}(t, t'; x, x'),$$

$$B_1 = [0, t] \times [0, t] \times [0, x_\ell] \times [0, x_\ell],$$

$$B_2 = [0, t] \times [0, t] \times [x_\ell, x_L] \times [x_\ell, x_L],$$

$$\text{mes} \{[0, t] \times [0, x_\ell]\} = tx_\ell, \quad \text{mes} \{[0, t] \times [x_\ell, x_L]\} = t\delta x.$$

Оскільки в просторі C неперервних функцій норма від добутку двох функцій дорівнює добутку норм цих функцій [9, 12, 13], то можемо записати

$$\|\mathcal{Q}^{h(j)}\|_C = \|c_1^{h(j)}\|_C \cdot \|c_2^{h(j)}\|_C,$$

де

$$\|c_1^{h(1)}\|_C = c_0 \left\{ \frac{e^{\eta_1 x_\ell} - 1}{2 \text{sh } \eta_1 x_\ell} e^{\frac{v_1 x_\ell}{2d_1}} + \frac{2d_1}{x_\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_2 y_n^2}{(d_1 y_n^2 + a_1) \sqrt{d_2^2 y_m^2 + v_2^2 / 4}} \times \right. \\ \left. \times e^{\frac{v_1}{2d_1 y_n} \arctan\left(-\frac{2d_1 y_n}{v_1}\right)} - \frac{2d_1}{\lambda x_\ell} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \frac{A_2 c_* \exp\left(-\frac{v_2 \delta x}{2d_2}\right)}{c_0 A_1 \lambda^{-1}} \right\},$$

$$\|c_2^{h(1)}\|_C = c_0 e^{\frac{v_1 x_\ell}{2d_1}} \left\{ \frac{e^{\eta_1 x_\ell} - 1}{2 \text{sh } \eta_1 x_\ell} t + \frac{x_\ell}{2\eta_1 d_1 \text{sh } \eta_1 x_\ell} + \frac{x_\ell}{\eta_1 d_1} \coth(\eta_1 x_\ell) + \right. \\ \left. + \frac{2d_1}{x_\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{(d_1 y_n^2 + a_1)^2} - \frac{2d_1}{\lambda x_\ell} e^{-\frac{v_1 x_\ell}{2d_1}} \times \right. \\ \left. \times \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y_n \frac{A_2 c_* \exp\left(-\frac{v_2 \delta x}{2d_2}\right)}{c_0 A_1 \lambda^{-1}} \right\},$$

$$\|c_1^{h(2)}\|_C = c_0 \left\{ \frac{e^{\eta_2 \delta x} - 1}{2 \text{sh } \eta_2 \delta x} + e^{-\frac{v_2 x_L}{2d_2}} \frac{2d_2}{\delta x} \times \right. \\ \left. \times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m d_2 y_m^2 e^{\frac{v_2}{2d_2 y_m} \arctan\left(-\frac{2d_2 y_m}{v_2}\right)}}{(d_2 y_m^2 + a_2) \sqrt{d_2^2 y_m^2 + v_2^2 / 4}} + \frac{2d_2}{\delta x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_2 y_m}{A_1 \lambda^{-1}} \right\},$$

$$\|c_2^{h(2)}\|_C = c_* \left\{ \frac{t(e^{\eta_2 \delta x} - 1)}{2 \text{sh } \eta_2 \delta x} + \frac{\delta x (e^{2\eta_2 \delta x} - 1)}{4\eta_2 d_2 (\text{sh } \eta_2 \delta x)^2} e^{\frac{v_2 x_L}{2d_2}} + \frac{\delta x}{\eta_2 d_2} \coth(\eta_2 \delta x) + \right.$$

$$+ \frac{1}{\eta_2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m y_m}{(d_2 y_m^2 + a_2)^2} - \frac{2d_2}{\delta x} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_2 y_m}{A_1 \lambda^{-1}} \Big\}.$$

З оцінок (27) випливає, що ряди (26) мажоруються числовими рядами – для першого шару, $(0, x_\ell)$:

$$\|Q^{h(1)}\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_i^{(1)}|^k (M_1 t x_\ell)^k = \frac{\|Q^{h(1)}\|_C}{1 - |\lambda_i^{(1)}| M_1 t x_\ell}, \quad (28')$$

– для другого шару, (x_ℓ, x_L) :

$$\|Q^{h(2)}\|_C \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_i^{(2)}|^k (M_2 t \delta x)^k = \frac{\|Q^{h(2)}\|_C}{1 - |\lambda_i^{(2)}| M_2 t \delta x}. \quad (28'')$$

Ці ряди збігаються в кругах

$$|\lambda_i^{(1)}| < \frac{1}{M_1 t x_\ell}, \quad |\lambda_i^{(2)}| < \frac{1}{M_2 t \delta x}. \quad (29)$$

Відповідно, за умов (29) ряди Неймана (28) є абсолютно і рівномірно збіжними. Звідси випливає, що послідовні наближення $c_{i(p)}^{(j)}(t, x)$ формулами (26) при $p \rightarrow \infty$ рівномірно збігаються до шуканих функцій $c_i^{(j)}(t, x)$, $i, j = 1, 2$.

Розрахункові формули для концентрацій домішкової речовини, яка мігрує у двошаровому пористому тілі, одержимо, обмежуючись достатньою кількістю членів рядів Неймана (26) та підставляючи в отримані вирази функції концентрації в однорідних контактуючих середовищах (15)–(18) та відповідні функції Гріна (21), (22).

Висновки. У роботі запропоновано і досліджено нелінійну математичну модель конвективної дифузії домішкової речовини, що супроводжується сорбцією частинок на скелет тіла, у двошаровому пористому тілі. Сорбційні процеси розглядаються як нелінійні внутрішні джерела. На границі контакту двох пористих шарів задано умови ідеального масового контакту для хімічних потенціалів, що за лінійного зв'язку між хімічними потенціалами та концентраціями частинок відповідають умовам неідеального контакту, сформульованим стосовно функції концентрації.

Введено природну безрозмірну форму, в якій виконано постановки нелінійної контактної-крайової задачі масоперенесення та її лінеаризований варіант. Нелінійну контактну-крайову задачу зведено до двох систем взаємозв'язаних інтегральних рівнянь, записаних для кожного з шарів. Розв'язки систем інтегральних рівнянь побудовано методом послідовних ітерацій шляхом розв'язання відповідного рівняння в ряд Неймана в околі розв'язку однорідної лінеаризованої крайової задачі. Показано, що всі ітерації є неперервними та обмеженими. Встановлено оцінки для концентрацій домішkových частинок у розчині та сорбованих на скелеті в обох пористих контактуючих шарах на кожній з ітерацій. Побудовано мажорантні ряди та показано абсолютну і рівномірну збіжність рядів Неймана.

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы. – Москва: Наука, 1974. – 831 с.
Te same: Korn G. A., Korn T. M. Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems and formulas for reference and review. – Mineola–New York: Dover Publ., Inc., 2000. – xvii+1130 p.
2. Краснов М. Л. Интегральные уравнения. Введение в теорию. – Москва: Наука, 1975. – 302 с.
3. Мюнстер А. Химическая термодинамика. – Москва: Мир, 1974. – 295 с.

- Те саме: Münster A. Chemische Thermodynamik. – Berlin: Verlag Chemie, 1969. – ix+261 S.
4. Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И. Введение в статистическую радиофизику. Ч. II. Случайные поля. – Москва: Наука, 1978. – 463 с.
 5. Чапля Є. Я. Математичне моделювання процесів пом'якшення води при фільтрації в пористих середовищах // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2022. – **65**, № 3-4. – С. 224–231. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.3-4.224-231>.
Те саме: Chaplya Ye. Ya. Mathematical modeling of water softening processes during filtration in porous media // *J. Math. Sci.* – 2025. – **287**, No. 2. – P. 380–390. – <https://doi.org/10.1007/s10958-025-07598-3>.
 6. Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Математичне моделювання дифузійних процесів у випадкових і регулярних структурах. – Київ: Наук. думка, 2009. – 302 с.
 7. Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю. Фізико-математичне моделювання гетеродифузного масопереносу. – Львів: Сполом, 2003. – 128 с.
 8. Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю., Білуцjak Ю. І. Нелінійна математична модель конвективної дифузії домішкових компонент у процесі пом'якшення води // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2023. – **66**, № 3-4. – С. 132–155. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.3-4.132-155>.
 9. Brezis H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. – New York: Springer, 2011. – xiv+600 p. – <https://doi.org/10.1007/978-0-387-70914-7>.
 10. Fredholm I. Sur une classe d'équations fonctionnelles // *Acta Math.* – 1903. – **27**. – P. 365–390. – <https://doi.org/10.1007/BF02421317>.
 11. Matheus J., Walker R. Mathematical method of physics. – New York: W. A. Benjamin, 1970. – 501 p.
 12. Meise R., Vogt D. Introduction to functional analysis. – Oxford: Clarendon Press, 1997. – 448 p.
 13. Rudin W. Functional analysis. – New York etc.: McGraw-Hill, 1991. – 424 p.

MATHEMATICAL MODELING OF CONVECTIVE DIFFUSION UNDER CONDITIONS OF NONLINEAR SORPTION IN A TWO-LAYERED POROUS BODY

The processes of convective diffusion of impurities and their sorption by the skeleton are investigated in a two-layered porous body under conditions of nonperfect contact with respect to the concentration function of impurity particles. Statements of contact initial-boundary value problems of diffusion are formulated under the conditions of nonlinear sorption and in the linearized variant. The nonlinear problem is reduced to two coupled systems of integral equations, which are solved by a simple iteration method in the form of Neumann integral series. The absolute and uniform convergence of the integral series constructed in the vicinity of the solutions of the linearized mathematical model is shown.

Key words: *mathematical modeling, convective diffusion, nonlinear sorption, nonlinear contact initial-boundary value problem, Neumann series, two-layered porous body.*

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

Одержано
07.03.23

² Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів