

ПРО ПОБУДОВУ І КЛАСИФІКАЦІЮ СПІЛЬНИХ ІНВАРІАНТНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ (1+3)-ВИМІРНИХ РІВНЯНЬ ОЙЛЕРА – ЛАГРАНЖА – БОРНА – ІНФЕЛЬДА ТА ОДНОРІДНОГО РІВНЯННЯ МОНЖА – АМПЕРА

Робота присвячена побудові та класифікації спільних інваріантних розв'язків (1+3)-вимірних рівнянь Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда та однорідного рівняння Монжа – Ампера. Виконано класифікацію та встановлено деякі спільні інваріантні розв'язки цих рівнянь, які отримано з використанням інваріантних розв'язків рівняння Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда та класифікації низьковимірних ($\dim L \leq 3$) неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$.

Ключові слова: симетрійна редукція, класифікація інваріантних розв'язків, спільні інваріантні розв'язки, рівняння Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда, однорідне рівняння Монжа – Ампера, класифікація алгебр Лі, неспряжені підалгебри алгебр Лі, група Пуанкаре $P(1,4)$.

У багатьох випадках розв'язування задач теорії мінімальних поверхонь, геометрії, нелінійної електродинаміки, теорії гравітації, космології, теорії струн, єдиної теорії поля, геометричної оптики, оптимального переносу, газової динаміки, метеорології та океанографії зводиться до вивчення рівнянь Ойлера – Лагранжа [7, 10, 19, 23, 24], Борна – Інфельда [8, 9, 12, 20, 22, 26], Монжа – Ампера [1, 2, 5, 6, 11, 18, 21, 25, 27–31] у просторах різних вимірностей і різних типів (див. також цитовану там літературу).

У роботі [16] для класифікації симетрійних редукцій (інваріантних розв'язків) диференціальних рівнянь з нетривіальними групами симетрії авторами запропоновано використовувати структурні властивості низьковимірних неспряжених підалгебр того самого рангу алгебр Лі груп симетрії досліджуваних рівнянь.

Результати класифікації симетрійних редукцій (інваріантних розв'язків) для (1+3)-вимірного рівняння Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда, які отримані з використанням класифікації низьковимірних ($\dim L \leq 3$) неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$, можна знайти в [13, 14].

В [15] побудовано та наведено класифікацію деяких спільних інваріантних розв'язків (1+3)-вимірних рівнянь ейконала, Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда, однорідного та неоднорідного рівнянь Монжа – Ампера, які отримано з використанням інваріантних розв'язків рівняння ейконала.

У цій роботі наведемо деякі спільні інваріантні розв'язки (1+3)-вимірних рівнянь Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда та однорідного рівняння Монжа – Ампера, які отримано з використанням інваріантних розв'язків рівняння Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда безпосередньо перевіркою. Проведено класифікацію цих спільних розв'язків.

Спочатку розглянемо деякі результати, що стосуються алгебри Лі групи $P(1,4)$ та її неспряжених підалгебр.

1. Алгебра Лі групи $P(1,4)$ та її неспряжені підалгебри. Група Пуанкаре $P(1,4)$ є групою поворотів і зсувів п'ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Серед важливих для теоретичної і математичної фізики груп група $P(1,4)$ посідає особливе місце: вона є найменшою групою, яка містить

[✉] vasfed@gmail.com

як підгрупи групи симетрії релятивістської фізики (групу Пуанкаре $P(1,3)$) та нерелятивістської фізики (розширену групу Галілея $\tilde{G}(1,3)$ [17]).

Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15-ма базисними елементами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4$, і P_μ , $\mu = 0, 1, 2, 3, 4$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[P_\mu, P_\nu] = 0,$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\mu\sigma}P_\nu,$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho},$$

де $g_{\mu\nu}$ – компоненти метричного тензора, $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$ і $g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \nu$, $\mu, \nu, \sigma, \rho = 0, 1, 2, 3, 4$.

У цій роботі розглядатимемо таке зображення [4] для алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \quad P_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad P_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$P_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad P_4 = -\frac{\partial}{\partial u}, \quad M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \quad x_4 \equiv u.$$

Надалі перейдемо від $M_{\mu\nu}$ і P_μ до таких лінійних комбінацій:

$$G = M_{04}, \quad L_1 = M_{23}, \quad L_2 = -M_{13}, \quad L_3 = M_{12},$$

$$P_a = M_{a4} - M_{0a}, \quad C_a = M_{a4} + M_{0a}, \quad a = 1, 2, 3,$$

$$X_0 = \frac{P_0 - P_4}{2}, \quad X_k = P_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad X_4 = \frac{P_0 + P_4}{2}.$$

У праці [3] проведено класифікацію всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ (вимірності яких не перевищують 3) в класи ізоморфних підалгебр.

2. Про побудову та класифікацію спільних інваріантних розв'язків (1+3)-вимірних рівнянь Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда та однорідного рівняння Монжа – Ампера. У цій роботі розглядаємо такі диференціальні рівняння:

$$\square u(1 - u_\nu u^\nu) + u^\mu u^\nu u_{\mu\nu} = 0,$$

$$\det(u_{\mu\nu}) = 0,$$

де

$$u = u(x), \quad x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in M(1,3), \quad u_\mu \equiv \frac{\partial u}{\partial x^\mu}, \quad u_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^\mu \partial x^\nu},$$

$$u^\mu = g^{\mu\nu} u_\nu, \quad g_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)\delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

Тут $M(1,3)$ – (1+3)-вимірний простір Мінковського, $R(u)$ – дійсна числова вісь залежної змінної u , $\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ – оператор Д'Аламбера.

Із результатів, отриманих в монографії В. І. Фуцича, В. І. Штеленя, М. І. Серова [5], випливає, зокрема, що спільна група симетрії рівнянь, які розглядаються, містить як підгрупу групу Пуанкаре $P(1,4)$.

Для проведення класифікації симетричних редукцій (1+3)-вимірного рівняння Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда використаємо класифікацію низьковимірних ($\dim L \leq 3$) неспряжених підалгебр [3] алгебри Лі групи $P(1,4)$. В результаті виконаної класифікації встановлено, що низьковимірні неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ є таких типів: $A_1, 2A_1, A_2, 3A_1, A_2 \oplus A_1, A_{3,1}, A_{3,2}, A_{3,3}, A_{3,4}, A_{3,6}, A_{3,7}^a, A_{3,8}, A_{3,9}$.

Наведемо деякі побудовані класи спільних інваріантних розв'язків (1+3)-вимірних рівнянь Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда та однорідного рівняння Монжа – Ампера.

2.1. Одновимірні неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$.

2.1.1 Підалгебри типу A_1 :

1°. $\langle X_0 + X_4 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$u = c_1 \tanh^3 \left(c_2 x_1 + c_3 x_2 - i \sqrt{c_2^2 + c_3^2} x_3 + c_4 \right) + c_5 \tanh \left(c_2 x_1 + c_3 x_2 - i \sqrt{c_2^2 + c_3^2} x_3 + c_4 \right) + c_6,$$

де c_1, \dots, c_6 – довільні сталі.

2°. $\langle X_4 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3 = c_1 \tanh^3 (c_2 x_1 - i c_2 x_2 + c_3 (x_0 + u) + c_4) + c_5 \tanh (c_2 x_1 - i c_2 x_2 + c_3 (x_0 + u) + c_4) + f(x_0 + u) + c_6,$$

де c_1, \dots, c_6 – довільні сталі, f – довільна гладка функція.

2.2. Двовимірні неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$.

2.2.1. Підалгебри типу $2A_1$.

1°. $\langle P_3 - 2X_0 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$(x_0 + u)^2 + 4x_3 = c_1 \tanh^3 (c_2 (x_1 - i x_2) + c_3) + c_4 \tanh (c_2 (x_1 - i x_2) + c_3) + c_5,$$

де c_1, \dots, c_5 – довільні сталі.

2°. $\langle P_3 - X_1 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_1 - \frac{x_3}{x_0 + u} = x_2 f_1(x_0 + u) + f_2(x_0 + u),$$

де f_1 і f_2 – довільні гладкі функції.

3°. $\langle P_3 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_1 = x_2 f_1(x_0 + u) + f_2(x_0 + u),$$

де f_1 і f_2 – довільні гладкі функції.

$$4^\circ. \quad \langle X_1 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3 = x_2 f_1(x_0 + u) + f_2(x_0 + u),$$

де f_1 і f_2 – довільні гладкі функції.

2.2.2. Підалгебри типу A_2 .

$$1^\circ. \quad \langle -G - \alpha X_1, X_4, \alpha > 0 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_1 - \alpha \ln(x_0 + u) = c_1 \tanh^3(c_2 x_2 - i c_2 x_3 + c_3) + \\ + c_4 \tanh(c_2 x_2 - i c_2 x_3 + c_3) + c_5,$$

де c_1, \dots, c_5 – довільні сталі.

2.3. Тривимірні неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$.

2.3.1. Підалгебри типу $3A_1$.

$$1^\circ. \quad \langle P_1 - \gamma X_3, \gamma > 0 \rangle \oplus \langle P_2 - X_2 - \delta X_3, \delta \neq 0 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3(x_0 + u)^2 - (\gamma x_1 + \delta x_2 - x_3)(x_0 + u) - \gamma x_1 = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

$$2^\circ. \quad \langle P_1 - \gamma X_3, \gamma > 0 \rangle \oplus \langle P_2 - X_2 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3(x_0 + u)^2 - (\gamma x_1 - x_3)(x_0 + u) - \gamma x_1 = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

$$3^\circ. \quad \langle P_1 \rangle \oplus \langle P_2 - X_2 - \delta X_3, \delta > 0 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3(x_0 + u) - \delta x_2 + x_3 = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

$$4^\circ. \quad \langle P_1 - X_3 \rangle \oplus \langle P_2 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3 - \frac{x_1}{x_0 + u} = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

$$5^\circ. \quad \langle P_3 - X_2 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_2 - \frac{x_3}{x_0 + u} = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

$$6^\circ. \quad \langle P_1 \rangle \oplus \langle P_2 \rangle \oplus \langle X_3 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - u^2 = c_1(x_0 + u)^6 + c_2(x_0 + u),$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

$$7^\circ. \quad \langle P_1 \rangle \oplus \langle P_2 - X_2 \rangle \oplus \langle X_3 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$\frac{x_0^2 - x_1^2 - u^2}{x_0 + u} - \frac{x_2^2}{x_0 + u + 1} = c_1(x_0 + u)^3(6(x_0 + u)^2 + 15(x_0 + u) + 10) + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

$$8^\circ. \quad \langle P_3 - 2X_0 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle \oplus \langle X_2 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$\frac{1}{6}(x_0 + u)^3 + x_3(x_0 + u) + x_0 - u = c_1((x_0 + u)^2 + 4x_3)^{3/2} + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

$$9^\circ. \quad \langle P_3 - 2X_0 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$u = \varepsilon(c_1 x_2 - 4x_3 + c_2)^{1/2} - x_0,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $\varepsilon = \pm 1$.

$$10^\circ. \quad \langle G \rangle \oplus \langle X_2 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3 = \frac{\varepsilon}{c_1} \arctan \left(\frac{c_1^2(x_0^2 - u^2) - 2}{c_1 \sqrt{(x_0^2 - u^2)(4 - c_1^2(x_0^2 - u^2))}} \right) + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $c_1 \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$.

$$11^\circ. \quad \langle G + \alpha X_3, \alpha > 0 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle \oplus \langle X_2 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$\begin{aligned} x_3 - \alpha \ln(x_0 + u) = \varepsilon \frac{\alpha}{2} \ln \left(4\alpha \sqrt{c(x_0^2 - u^2) + 4} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{x_0^2 - u^2 + \alpha^2} + \alpha^2(c(x_0^2 - u^2) + 8) + 4(x_0^2 - u^2) \right) - \\ - \frac{\varepsilon}{\sqrt{c}} \ln \left(\sqrt{c(x_0^2 - u^2) + 4} \sqrt{x_0^2 - u^2 + \alpha^2} + \frac{2}{\sqrt{c}} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{c}}{2} (2(x_0^2 - u^2) + \alpha^2) \right) - \alpha \frac{\varepsilon + 1}{2} \ln(x_0^2 - u^2), \end{aligned}$$

де $c \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$.

$$12^\circ. \quad \langle L_3 + \alpha(X_0 + X_4), \alpha > 0 \rangle \oplus \langle X_3 \rangle \oplus \langle X_4 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$u + \alpha \arctan \frac{x_2}{x_1} = i\alpha \varepsilon_1 \ln \left(\frac{2(\varepsilon_2 c_1 \sqrt{c_1(c_1 - x_1^2 - x_2^2)} - c_1^2)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $c_1 \neq 0$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$.

$$13^\circ. \quad \langle L_3 \rangle \oplus \langle -P_3 + 2X_0 \rangle \oplus \langle 2X_4 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$u = \left(4\varepsilon c_1 \ln \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{c_1} + \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{c_1^2} - 1} \right) - 4x_3 + c_2 \right)^{1/2} - x_0,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $c_1 \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$.

$$14^\circ. \quad \langle P_3 \rangle \oplus \langle X_1 \rangle \oplus \langle X_2 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_0^2 - x_3^2 - u^2 = c_2(x_0 + u)^4 + c_1(x_0 + u),$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

2.3.2. Підалгебри типу $A_2 \oplus A_1$.

$$1^\circ. \quad \left\langle -\frac{1}{\lambda} L_3 - G, 2X_4, \lambda > 0 \right\rangle \oplus \langle X_3 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$\ln(x_0 + u) + \lambda \arctan \frac{x_1}{x_2} = i\varepsilon\lambda \ln \left(2 \frac{\sqrt{c_1^3(c_1 - x_1^2 - x_2^2) - c_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $c_1 \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$.

$$2^\circ. \quad \langle -(G + \alpha X_3), X_4, \alpha > 0 \rangle \oplus \langle L_3 + \beta X_3, \beta > 0 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$\begin{aligned} x_3 - \alpha \ln(x_0 + u) + \beta \arctan \frac{x_1}{x_2} = & i \frac{\beta}{2} \ln \left(c_1 \beta^2 - 1 + \right. \\ & \left. + \frac{2i\beta \sqrt{(c_1(x_1^2 + x_2^2) - 1)(x_1^2 + x_2^2 + \beta^2) - 2\beta^2}}{x_1^2 + x_2^2} \right) + \\ & + \frac{1}{2\sqrt{c_1}} \ln \left(2\sqrt{(c_1(x_1^2 + x_2^2) - 1)(x_1^2 + x_2^2 + \beta^2)} + \right. \\ & \left. + \sqrt{c_1}(\beta^2 + 2(x_1^2 + x_2^2)) - \frac{1}{\sqrt{c_1}} \right) - \frac{\ln 2}{2\sqrt{c_1}} + c_2, \end{aligned}$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $c_1 \neq 0$.

$$3^\circ. \quad \langle -(G + \alpha X_3), X_4, \alpha > 0 \rangle \oplus \langle L_3 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$u = \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 - c_1^2} + \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^{\frac{\varepsilon c_1}{\alpha}} e^{\frac{\varepsilon(x_3 - c_2)}{\alpha}} - x_0,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $\varepsilon = \pm 1$.

2.3.3. Підалгебри типу $A_{3,1}$.

$$1^\circ. \quad \langle 4X_4, P_1 - X_2 - \gamma X_3, P_2 + X_1 - \mu X_2 - \delta X_3, \gamma > 0, \delta \neq 0, \mu > 0 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$\begin{aligned} x_3(x_0 + u)^2 - (\gamma x_1 + \delta x_2 - \mu x_3)(x_0 + u) + (\delta - \gamma\mu)x_1 - \gamma x_2 + x_3 = \\ = \varphi(x_0 + u), \end{aligned}$$

де φ – довільна гладка функція.

2°. $\langle 4X_4, P_1 - X_2 - \gamma X_3, P_2 + X_1 - \mu X_2, \gamma > 0, \mu > 0 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3(x_0 + u)^2 - (\gamma x_1 - \mu x_3)(x_0 + u) - \gamma \mu x_1 - \gamma x_2 + x_3 = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

3°. $\langle 4X_4, P_1 - X_2, P_2 + X_1 - \mu X_2 - \delta X_3, \delta > 0, \mu \neq 0 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3(x_0 + u)^2 - (\delta x_2 - \mu x_3)(x_0 + u) + \delta x_1 + x_3 = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

4°. $\langle 4X_4, P_1 - X_2, P_2 + X_1 - \delta X_3, \delta > 0 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3(x_0 + u)^2 - \delta x_2(x_0 + u) + \delta x_1 + x_3 = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

5°. $\langle 4X_4, P_1 - X_2 - \beta X_3, P_2 + X_1, \beta > 0 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3(x_0 + u)^2 - \beta x_1(x_0 + u) - \beta x_2 + x_3 = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

6°. $\langle 4X_4, P_1 - X_2, P_2 + X_1 - \mu X_2, \mu \neq 0 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_3(x_0 + u)^2 + \mu x_3(x_0 + u) + x_3 = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

7°. $\langle 4\mu X_4, P_3 - X_2, X_1 + \mu X_3, \mu > 0 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_2 - \frac{x_3 - \mu x_1}{x_0 + u} = \varphi(x_0 + u),$$

де φ – довільна гладка функція.

8°. $\langle 2\mu X_4, P_3 - 2X_0, X_1 + \mu X_3, \mu > 0 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$u = \varepsilon (4\mu x_1 + c_1 x_2 - 4x_3 + c_2)^{1/2} - x_0,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $\varepsilon = \pm 1$.

9°. $\langle 2X_4, P_3 - L_3 - 2\alpha X_0, X_3, \alpha > 0 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$u = 2i\varepsilon\alpha \ln \left(2 \frac{\sqrt{c_1^3(c_1 - x_1^2 - x_2^2) - c_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) + 2\alpha \arctan \frac{x_1}{x_2} - x_0 + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $c_1 \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$.

10°. $\langle -2\beta X_4, L_3 + \beta X_3, P_3 - 2X_0, \beta > 0 \rangle$:

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$\beta \arctan \frac{x_1}{x_2} + \frac{1}{4}(x_0 + u)^2 + x_3 = \frac{i\varepsilon\beta}{2} \ln \left(c_1\beta^2 - 1 + \frac{2i\beta\sqrt{(c_1(x_1^2 + x_2^2) - 1)(x_1^2 + x_2^2 + \beta^2) - 2\beta^2}}{x_1^2 + x_2^2} \right) + \frac{\varepsilon}{2\sqrt{c_1}} \ln \left(\left(\frac{\beta^2}{2} + x_1^2 + x_2^2 \right) \sqrt{c_1} - \frac{1}{2\sqrt{c_1}} + \sqrt{(c_1(x_1^2 + x_2^2) - 1)(x_1^2 + x_2^2 + \beta^2)} \right) + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $c_1 \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$.

$$11^\circ. \quad \langle 2X_4, P_3, X_3 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_2 = x_1 f_1(x_0 + u) + f_2(x_0 + u),$$

де f_1 і f_2 – довільні гладкі функції.

2.3.4. Підалгебри типу $A_{3,2}$.

$$1^\circ. \quad \left\langle 2\alpha X_4, \lambda P_3, \frac{1}{\lambda} L_3 + G + \frac{\alpha}{\lambda} X_3, \alpha > 0, \lambda > 0 \right\rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$u = \exp \left(\varepsilon \lambda \arctan \frac{1}{\sqrt{c_1(x_1^2 + x_2^2) - 1}} - \lambda \arctan \frac{x_1}{x_2} + c_2 \right) - x_0,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $\varepsilon = \pm 1$.

2.3.5. Підалгебри типу $A_{3,3}$.

$$1^\circ. \quad \langle P_3, X_4, G + \alpha X_1, \alpha > 0 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$u = \exp \left(\frac{x_1 - c_1 x_2 - c_2}{\alpha \varepsilon} \right) - x_0,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $\varepsilon = \pm 1$.

$$2^\circ. \quad \left\langle P_3, X_4, \frac{1}{\lambda} L_3 + G, \lambda > 0 \right\rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$u = \exp \left(\varepsilon \lambda \arctan \frac{1}{\sqrt{c_1(x_1^2 + x_2^2) - 1}} - \lambda \arctan \frac{x_1}{x_2} + c_2 \right) - x_0,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $\varepsilon = \pm 1$.

2.3.6. Підалгебри типу $A_{3,6}$.

$$1^\circ. \quad \langle P_1 - X_1, P_2 - X_2, -P_3 + L_3 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0 + u + 1} + \frac{x_3^2}{x_0 + u} + 2u = \frac{c_1}{7}(x_0 + u)^7 + \frac{2}{3}c_1(x_0 + u)^6 + \frac{6}{5}c_1(x_0 + u)^5 + c_1(x_0 + u)^4 + \frac{c_1}{3}(x_0 + u)^3 + x_0 + u + c_2,$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

$$2^\circ. \quad \langle P_1, -P_2, -(L_3 + \alpha X_3), \alpha > 0 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - u^2 = c_1(x_0 + u)^6 + c_2(x_0 + u),$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

$$3^\circ. \quad \langle X_1, -X_2, P_3 - L_3 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$x_0^2 - x_3^2 - u^2 = c_1(x_0 + u)^4 + c_2(x_0 + u),$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

$$4^\circ. \quad \langle X_1, -X_2, P_3 - L_3 - 2\alpha X_0, \alpha > 0 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$\begin{aligned} (x_0 + u)^3 + 6\alpha x_3(x_0 + u) + 6\alpha^2(x_0 - u) = \\ = c_1 \left((x_0 + u)^2 + 4\alpha x_3 \right)^{3/2} + c_2, \end{aligned}$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі.

$$5^\circ. \quad \left\langle X_1, X_2, L_3 + \frac{\lambda}{2}(P_3 + C_3) + \alpha(X_0 + X_4), \alpha > 0, 0 < \lambda < 1 \right\rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$\begin{aligned} \alpha \arctan \frac{x_3}{u} - \lambda x_0 = \varepsilon \frac{\lambda}{2\sqrt{c_1}} \ln \left(\lambda \sqrt{c_1} (x_3^2 + u^2) + \right. \\ \left. + \sqrt{(c_1(x_3^2 + u^2) + 1)(\lambda^2(x_3^2 + u^2) - \alpha^2)} + \right. \\ \left. + \frac{\lambda^2 - c_1\alpha^2}{2\lambda\sqrt{c_1}} \right) - i\varepsilon \frac{\alpha}{2} \ln \left(\lambda^2 - c_1\alpha^2 + \right. \\ \left. + \frac{2i\alpha\sqrt{(c_1(x_3^2 + u^2) + 1)(\lambda^2(x_3^2 + u^2) - \alpha^2)} - 2\alpha^2}{x_3^2 + u^2} \right) + c_2, \end{aligned}$$

де c_1 і c_2 – довільні сталі, $c_1 \neq 0$, $\varepsilon = \pm 1$.

$$6^\circ. \quad \langle X_1, X_2, L_3 \rangle:$$

Спільний інваріантний розв'язок рівнянь, що розглядаються,

$$u = c_3 \tanh^3(c_2 x_0 - c_2 x_3 + c_1) + c_4 \tanh(c_2 x_0 - c_2 x_3 + c_1) + c_5,$$

де c_1, \dots, c_5 – довільні сталі.

Висновки. Побудовано деякі спільні інваріантні розв'язки (1+3)-вимірних рівнянь Ойлера – Лагранжа – Борна – Інфельда та однорідного рівняння Монжа – Ампера.

Для проведення класифікації спільних інваріантних розв'язків цих рівнянь використано класифікацію низьковимірних ($\dim L \leq 3$) неспряжених підалгебр [3] алгебри Лі групи $P(1, 4)$. В результаті виконаної класифікації встановлено, що низьковимірні неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1, 4)$ є таких типів: $A_1, 2A_1, A_2, 3A_1, A_2 \oplus A_1, A_{3,1}, A_{3,2}, A_{3,3}, A_{3,4}, A_{3,6}, A_{3,7}^a, A_{3,8}, A_{3,9}$.

Наведені спільні інваріантні розв'язки рівнянь, що розглядаються, є інваріантними відносно таких типів неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$: A_1 , $2A_1$, A_2 , $3A_1$, $A_2 \oplus A_1$, $A_{3,1}$, $A_{3,2}$, $A_{3,3}$, $A_{3,6}$.

Деякі спільні інваріантні розв'язки рівнянь, що розглядаються, залежать від однієї або двох довільних гладких функцій.

1. *Жданов Р. З.* Общее решение многомерного уравнения Монжа – Ампера // Симметричный анализ и решения уравнений математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 13–16.
2. *Погорелов А. В.* Регулярное решение n -мерной проблемы Минковского // Докл. АН СССР. – 1971. – № 4. – С. 785–788.
Te same: *Pogorelov A. V.* A regular solution of the n -dimensional Minkowski problem // *Sov. Math. Dokl.* – 1971. – **12**, No. 4. – P. 1192–1196.
3. *Федорчук В. М., Федорчук В. І.* Про класифікацію низькорозмірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ // Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. А. Г. Никитін. – 2006. – **3**, № 2. – С. 301–307.
4. *Фуцич В. И., Серов Н. И.* Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа – Ампера // Докл. АН СССР. – 1983. – **273**, № 3. – С. 543–546.
Te same: *Fushchich W. I., Serov N. I.* Symmetry and some exact solutions of the multi-dimensional Monge – Ampère equation // *Sov. Math. Dokl.* – 1983. – **28**, No. 3. – P. 679–682.
5. *Фуцич В. И., Штелен В. М., Серов Н. И.* Симметричный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
Te same: *Fushchich W. I., Shtelen W. M., Serov N. I.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – xxiv+435 p.
– <https://doi.org/10.1007/978-94-017-3198-0>.
6. *Awanou G.* Computational nonimaging geometric optics: Monge – Ampère // *Notices Am. Math. Soc.* – 2021. – **68**, No. 2. – P. 186–193.
– <https://doi.org/10.1090/noti2220>.
7. *Bilă N.* Lie groups applications to minimal surfaces PDE // *Proc. of the Workshop on Global Analysis, Differential Geometry and Lie Algebras (Thessaloniki, Greece, June 24–27, 1998)* / Ed. Gr. Tsagas. – BSG Proceedings, 1999. – **3**. – P. 197–205.
8. *Born M.* On the quantum theory of electromagnetic field // *Proc. R. Soc. A*. – 1934. – **143**, No. 849. – P. 410–437. – <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0010>.
9. *Born M., Infeld L.* Foundations of the new field theory // *Proc. R. Soc. A*. – 1934. – **144**, No. 852. – P. 425–451. – <https://doi.org/10.1098/rspa.1934.0059>.
10. *Caffarelli L. A., Sire Y.* Minimal surfaces and free boundaries: Recent developments // *Bull. Amer. Math. Soc.* – 2020. – **57**, No. 1. – P. 91–106.
– <https://doi.org/10.1090/bull/1673>.
11. *Cullen M. J. P.* The mathematics of large-scale atmosphere and ocean. – Hackensack: World Sci. Publ. Co., Inc., 2021. – xvi+394 p.
12. *Elizalde E., Makarenko A. N.* Singular inflation from Born – Infeld - $f(R)$ gravity // *Modern Phys. Lett. A*. – 2016. – **31**, No. 24. – Art. 1650149.
– <https://doi.org/10.1142/S0217732316501492>.
13. *Fedorchuk V. M., Fedorchuk V. I.* On symmetry reduction of the Euler – Lagrange – Born – Infeld equation to linear ODEs // Симетрія та інтегровність рівнянь математичної фізики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. А. Г. Никитін. – 2019. – **16**, № 1. – С. 193–202.
14. *Fedorchuk V. M., Fedorchuk V. I.* On the classification of symmetry reductions and invariant solutions for the Euler – Lagrange – Born – Infeld equation // *Укр. фіз. журн.* – 2019. – **64**, No. 12. – P. 1103–1107.
– <https://doi.org/10.15407/ujpe64.12.1103>.
15. *Fedorchuk V. M., Fedorchuk V. I.* On the construction and classification of the common invariant solutions for some $P(1,4)$ -invariant partial differential equations // *Appl. Math.* – 2023. – **14**, No. 11. – P. 728–747.
– <https://doi.org/10.4236/am.2023.1411044>.

16. Fedorchuk V., Fedorchuk V. On classification of symmetry reductions for partial differential equations // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць, присвячений 80-річчю Б.Й. Пташника. – Львів: ІППММ ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2017. – С. 241–255.
17. Fushchich V. I., Nikitin A. G. Reduction of the representations of the generalised Poincaré algebra by the Galilei algebra // J. Phys. **A**: Math. Gen. – 1980. – **13**, No. 7. – P. 2319–2330. – <https://doi.org/10.1088/0305-4470/13/7/015>.
18. Fu J.-X., Yau S.-T. The theory of superstring with flux on non-Kähler manifolds and the complex Monge – Ampère equation // J. Differ. Geom. – 2008. – **78**, No. 3. – P. 369–428. – <https://doi.org/10.4310/jdg/1207834550>.
19. Grundland A. M., Hariton A. Algebraic aspects of the supersymmetric minimal surface equation // Symmetry. – 2017. – **9**, No. 12. – Art. 318. – <https://doi.org/10.3390/sym9120318>.
20. Harko T., Lobo F. S. N., Mak M. K., Sushkov S. V. Wormhole geometries in Eddington-inspired Born – Infeld gravity // Modern Phys. Lett. **A**. – 2015. – **30**, No. 35, Art. 1550190. – <https://doi.org/10.1142/S0217732315501904>.
21. Jiang F., Trudinger N. S. On the second boundary value problem for Monge – Ampère type equations and geometric optics // Arch. Ration. Mech. Anal. – 2018. – **229**, No. 2. – P. 547–567. – <https://doi.org/10.1007/s00205-018-1222-8>.
22. Kruglov S. I. Dyonic black holes in framework of Born – Infeld-type electrodynamics // Gen. Relativ. Gravit. – 2019. – **51**, No. 9. – Art. 121. – <https://doi.org/10.1007/s10714-019-2603-5>.
23. Li H., Yan W. Explicit self-similar solutions for a class of zero mean curvature equation and minimal surface equation // Nonlinear Anal. – 2020. – **197**, No. 12. – Art. 111814. – <https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111814>.
24. Lie S. Beiträge zur Theorie der Minimalflächen I. Proektivische Untersuchungen über algebraische Minimalflächen // Math. Ann. – 1878. – **14**, No. 3. – S. 331–416. – <https://doi.org/10.1007/BF01677141>.
25. Lie S. Zur Geometrie einer Monge’schen Gleichung // Ber. Verh. Kon. Ges. Wiss. Leipzig. – 1898. – **50**. – S. 1–2.
26. Makarenko A. N., Odintsov S. D., Olmo G. J. Little Rip, Λ CDM and singular dark energy cosmology from Born – Infeld- $f(R)$ gravity // Phys. Lett. **B**. – 2014. – **734**. – P. 36–40. – <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2014.05.024>.
27. Minkowski H. Volumen und Oberfläche // Math. Ann. – 1903. – **57**, No. 4. – S. 447–495. – <https://doi.org/10.1007/BF01445180>.
28. Mokhov O. I., Nutku Y. Bianchi transformation between the real hyperbolic Monge – Ampère equation and the Born – Infeld equation // Lett. Math. Phys. – 1994. – **32**, No. 2. – P. 121–123. – <https://doi.org/10.1007/BF00739421>.
29. Țițeica G. Sur une nouvelle classe de surfaces // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. – 1907. – **144**. – P. 1257–1259.
30. Udriște C., Bîlă N. Symmetry group of Țițeica surfaces PDE // Balkan J. Geom. Appl. – 1999. – **4**, No. 2. – P. 123–140.
31. Yau S.-T., Nadis S. The shape of a life: One mathematician’s search for the universe’s hidden geometry. – New Haven: Yale Univ. Press, 2019. – 328 p.

ON THE CONSTRUCTION AND CLASSIFICATION OF THE COMMON INVARIANT SOLUTIONS FOR THE (1+3)-DIMENSIONAL EULER – LAGRANGE – BORN – INFELD AND HOMOGENEOUS MONGE – AMPÈRE EQUATIONS

The proposed work is devoted to construction and classification of the common invariant solutions for the (1+3)-dimensional Euler – Lagrange – Born – Infeld and homogeneous Monge – Ampère equations. Some common invariant solutions of these equations, which are obtained from invariant solutions of the Euler – Lagrange – Born – Infeld equation and the classification of low-dimensional ($\dim L \leq 3$) nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the Poincaré group $P(1,4)$ are classified and presented.

Key words: *symmetry reduction, classification of invariant solutions, common invariant solutions, Euler – Lagrange – Born – Infeld equation, homogeneous Monge – Ampère equation, classification of the Lie algebras, nonconjugate subalgebras of the Lie algebras, the Poincaré group $P(1,4)$.*