

ПОПЕРЕЧНІ КОЛИВАННЯ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З ПРУЖНО ЗАКРІПЛЕНИМ КОНТУРОМ

Досліджено власні частоти поперечних коливань круглої попередньо нагрітої у площині пластини з пружно закріпленим краєм. Відповідну осесиметричну задачу термопружності сформульовано з використанням теорії пластин та побудовано її аналітичний розв'язок з урахуванням теплообміну з поверхонь за законом Ньютона та пружної податливості на зовнішньому контурі пластини. Побудовано частотні рівняння поперечних коливань для попередньо напруженої внаслідок рівномірного нагріву пластини при крайових умовах пружного закріплення краю. Проаналізовано вплив температури та пружних властивостей кріплення на вібраційні характеристики круглої пластини.

Ключові слова: теплообмін, термопружність, пластини, кругла пластини, власні частоти.

Вступ. Пластини широко використовують як конструктивний елемент в аерокосмічній техніці, машинобудуванні, електроніці, будівництві тощо. Станом на середину минулого століття підсумок досліджень круглих пластин при дії динамічних навантажень наведено в [6]. Триває розробка нових числових та аналітично числових методів дослідження вібраційної поведінки круглих та кільцевих пластин [3] постійної [4] та змінної [5] товщини з урахуванням взаємодії із зовнішнім середовищем [9]. При цьому задачі динаміки формують у нелінійній постановці [8], а також вивчають вплив попередніх напружень у площині пластини на динамічні характеристики її поперечних коливань [6, 7].

Зазвичай задачі про поперечні коливання круглих пластин розглядаються в припущенні, що край пластини є жорстко защемленим, вільно опертим чи вільним. Однак для багатьох практичних випадків доводиться враховувати обмеження поступального та обертального руху на краю пластини, внаслідок чого крайові умови відрізняються від «класичних». Формулювання задачі про коливання за таких умов наведено, зокрема, в [6]. Вплив жорсткості кріплення на власні частоти поперечних коливань в аналогічній постановці досліджено в [10].

Особливий інтерес дослідників викликає вивчення впливу напружень, які виникають у пластині внаслідок теплових градієнтів чи гідростатичного навантаження, на власні частоти поперечних коливань. Розрахунок власних частот поперечних коливань круглої пластини показує суттєвий вплив на них температурних напружень у площині пластини [1]. Для круглих пластин найчастіше досліджують вібрації для випадку сталих напружень у площині пластини у випадку «класичних» крайових умов. Наближений розв'язок аналогічної задачі для змінних напружень наведено в [7].

У статті розглянуто задачу знаходження власних частот поперечних коливань круглої пластини при пружному закріпленні по периферійному краю при попередньому навантаженні в площині внаслідок нагріву рівномірними джерелами тепла за умов теплообміну із зовнішнім середовищем.

1. Формулювання задачі. Розглянемо задачу про поперечні коливання круглої пластини зовнішнього радіуса r_0 та товщини h , віднесеної до циліндричної системи координат $r\theta z$. Пластину попередньо нагріто рівномір-

✉ nadiyahor@gmail.com

но розподіленими джерелами тепла. Край пластини вважатимемо пружно закріпленим як для деформацій у площині пластини внаслідок нагріву, так і для поперечних деформацій і поворотів при її згинальних коливаннях. Задачу зводимо до послідовного розв'язування задач статичної термопружності з метою визначення температурних напружень у площині пластини та поперечних коливань при наявності попередньо напруженого стану. Схематичний вигляд поперечного перерізу круглої пластини та її кріплення на межі зображено на рис. 1.

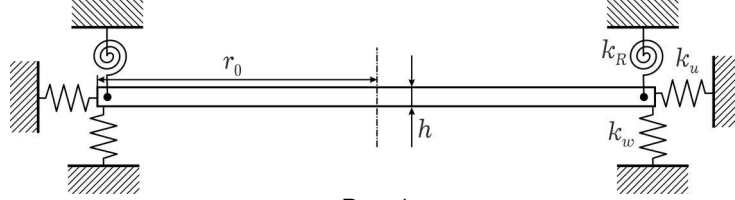


Рис. 1

Статичну осесиметричну задачу термопружності в припущенні, що коефіцієнти теплообміну пластини з навколишнім середовищем та інтенсивність джерел тепла є сталими, а межа – податливою з коефіцієнтом пружності k_u (рис. 1) сформулюємо на основі теорії Кірхгофа [2] у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{q_v}{\lambda} + \frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h} \left(t - \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) &= 0, \\ \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right) \Big|_{r=r_0} &= -\frac{\alpha_0}{\lambda} (t|_{r=r_0} - t_e), \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 \sigma_r) + \alpha_L E \Theta \right) &= 0, \quad \sigma_\theta = \frac{d}{dr} (r \sigma_r), \\ \varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \alpha_L \Theta, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \alpha_L \Theta, \quad \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \\ h \sigma_r \Big|_{r=r_0} &= -k_u u_r \Big|_{r=r_0}. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут t – температура пластини, q_v – об'ємна густина джерел тепла, λ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу, α_1 і α_2 – коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь $z = \pm h/2$, t_1 і t_2 – температури середовища біля поверхонь $z = \pm h/2$, t_e – температура зовнішнього до диска середовища, α_0 – коефіцієнт тепловіддачі з поверхні $r = r_0$, σ_r, σ_θ і $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ – температурні напруження і деформації, $\Theta = t - t_e$, α_L – коефіцієнт лінійного теплового розширення матеріалу пластини, E і ν – модуль Юнга і коефіцієнт Пуассона, k_u – жорсткість пружного кріплення в радіальному напрямку.

Після знаходження на основі задачі (1) осесиметричних полів температури та термонапружень у круглій пластині при пружному кріпленні відносно повороту та нормальних переміщень зовнішнього контуру задачу про поперечні коливання сформулюємо [6] так:

$$\begin{aligned} D \Delta \Delta w - \rho h \omega^2 w &= \frac{h}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(\sigma_r r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sigma_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right), \\ D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right) \Big|_{r=r_0} &= -k_R \frac{\partial w}{\partial r} \Big|_{r=r_0}, \end{aligned}$$

$$D \left(\frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) + (1 - \nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right) \Big|_{r=r_0} = k_w w(r_0, \theta), \quad (2)$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2},$$

де $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$ – циліндрична жорсткість пластини, w – нормальне переміщення точок пластини, ρ – густина матеріалу пластини, k_R , k_w – жорсткості пружного кріплення на поворот та прогин.

У задачі (2) йдеться про пошук значень власних частот ω_{mn} , для яких існує нетривіальний розв'язок рівняння при заданих умовах пружного закріплення. На основі послідовного розв'язування задач (1) і (2) дослідимо вплив осесиметричного температурного поля у круглій пластині на значення власних частот її поперечних коливань.

2. Побудова розв'язку. Розв'язок задачі термопружності (1) знаходимо у вигляді [2]:

$$\begin{aligned} t &= \frac{q_v}{\lambda \varepsilon^2} + t_\infty - \frac{\alpha_0 (q_v / (\lambda \varepsilon^2) + t_\infty - t_e)}{\lambda \varepsilon I_1(\varepsilon r_0) + \alpha_0 I_0(\varepsilon r_0)} I_0(\varepsilon r), \\ \sigma_r &= \alpha_L \left(\frac{q_v}{\lambda \varepsilon^2} + t_\infty - t_e \right) \left(C_1 - \frac{E}{r^2} \left(\frac{1}{2} r^2 - A_0 \frac{r}{\varepsilon} I_1(\varepsilon r) \right) \right), \\ \sigma_\theta &= \alpha_L \left(\frac{q_v}{\lambda \varepsilon^2} + t_\infty - t_e \right) \left(C_1 - E \left(\frac{1}{2} - A_0 I_0(\varepsilon r) + A_0 \frac{1}{\varepsilon r} I_1(\varepsilon r) \right) \right), \\ C_1 &= \frac{r_0}{h + k_u (1 - \nu) r_0 / E} \left(\frac{h}{r_0} E \left(\frac{1}{2} - A_0 \frac{1}{\varepsilon r_0} I_1(\varepsilon r_0) \right) - \right. \\ &\quad \left. - k_u \frac{1 + \nu}{2} \left(1 + A_0 {}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 2; \left(\frac{\varepsilon r_0}{2} \right)^2 \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2A_0 {}_1F_2 \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}, 1; \left(\frac{\varepsilon r_0}{2} \right)^2 \right) \right) \right), \quad (3) \end{aligned}$$

де $t_\infty = \frac{\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $\varepsilon^2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\lambda h}$, $A_0 = \frac{\alpha_0}{\lambda \varepsilon I_1(\varepsilon r_0) + \alpha_0 I_0(\varepsilon r_0)}$, $I_n(x)$ – модифіковані функції Бесселя 1-го роду, ${}_1F_2(a; b, c; x)$ – вироджена гіпергеометрична функція.

Наявність у виразах (3) розв'язку задачі термопружності (1) спеціальних функцій суттєво ускладнює їхнє теоретичне та практичне використання для розрахунку власних частот на основі задачі (2). Використання виразів (3) для побудови навіть числового розв'язку задачі (2), наприклад на основі методу скінченних елементів, призводить до обчислення спеціальних функцій, які не завжди фігурують у переліку функцій універсальних математичних пакетів.

Деякі часткові випадки виразів (3) записуються через елементарні функції. Наприклад, за умови відсутності теплообміну з плоских поверхонь $\alpha_\ell \rightarrow 0$, $\ell = 1, 2$, звідки $\varepsilon r_0 = r_0 \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2) / (\lambda h)} \rightarrow 0$, вирази (3) набувають вигляду

$$t - t_e = \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left(\left(1 + \frac{2\lambda}{\alpha_0 r_0} \right) - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right) = \frac{q_v r_0}{2\alpha_0} + \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left(1 - \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{\alpha_L r_0}{h + k_u(1-\nu)r_0/E} \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left(\frac{h}{r_0} E \left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} \right) - \right. \\
&\quad \left. - k_u \frac{1+\nu}{4} \left(1 + \frac{4\lambda}{\alpha_0 r_0} \right) \right) - \alpha_L E \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right), \\
\sigma_\theta &= \frac{d}{dr} (r\sigma_r) = \frac{\alpha_L r_0}{h + k_u(1-\nu)r_0/E} \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left(\frac{h}{r_0} E \left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} \right) - \right. \\
&\quad \left. - k_u(1+\nu) \frac{1}{4} \left(1 + \frac{4\lambda}{\alpha_0 r_0} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \alpha_L E \frac{q_v r_0^2}{4\lambda} \left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{\alpha_0 r_0} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right) \right). \tag{4}
\end{aligned}$$

У цьому випадку маємо справу лише з квадратичними функціями, однак і такі вирази не дають можливості побудувати розв'язок задачі (2) аналітично. За аналогією до [6] можна реалізувати розв'язок задачі (4) методом Релея – Рітца.

Найпростіші вирази для температурних напружень отримано у випадку однорідної температури пластини, тобто коли

$$\Theta = t - t_e = \frac{q_v r_0}{2\alpha_0} = \Theta_0 = \text{const}.$$

Тоді нормальні температурні напруження є рівномірно розподілені, постійні і мають вигляд

$$\sigma_r = \sigma_\theta = - \frac{\alpha_L \Theta_0 k_u}{h/r_0 + (1-\nu)k_u/E}.$$

Для таких напружень диференціальний оператор задачі (2) допускає факторизацію, а власні форми коливань набувають вигляду

$$W_n(\rho) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} = (A_n J_n(\xi\rho) + C_n I_n(\eta\rho)) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix}, \tag{5}$$

де

$$\begin{aligned}
\xi^2 &= \frac{S}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\Omega^2}{S^2}} - 1 \right), \quad \eta^2 = \frac{S}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4\Omega^2}{S^2}} + 1 \right), \\
S &= \frac{h\sigma_r r_0^2}{D} = -12(1-\nu^2) \frac{r_0^2}{h^2} \frac{\alpha_L \Theta_0}{1 + (1-\nu)r_0 k_u/E} \frac{r_0 k_u}{hE}, \\
\Omega^2 &= \frac{\rho h r_0^4}{D} \omega^2,
\end{aligned}$$

Ω – безрозмірна частота коливань пластини, а частотне рівняння для умов задачі (2) має вигляд

$$\det(\mathbf{F}) = 0, \quad \mathbf{F} = \{f_{ij}\}_{i,j=1,2}, \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned}
f_{11} &= 2(n^2(1-\nu) - \xi^2)J_n(\xi) + \xi(K_R - 1 + \nu)(J_{n-1}(\xi) - J_{n+1}(\xi)), \\
f_{12} &= 2(n^2(1-\nu) + \eta^2)I_n(\eta) + \eta(K_R - 1 + \nu)(I_{n-1}(\eta) + I_{n+1}(\eta)), \\
f_{21} &= 2((1-\nu)n^2 - K_w)J_n(\xi) - \xi((1-\nu)n^2 + \xi^2)(J_{n-1}(\xi) - J_{n+1}(\xi)),
\end{aligned}$$

$$f_{22} = 2((1 - \nu)n^2 - K_w)I_n(\eta) - \eta((1 - \nu)n^2 - \eta^2)(I_{n-1}(\eta) + I_{n+1}(\eta)),$$

Тут $K_R = r_0 k_R / D$ і $K_w = r_0^3 k_w / D$ – безрозмірні жорсткості пружного кріплення на поворот та прогин відповідно.

З частотного рівняння (6) отримуються класичні [6] часткові випадки частотних рівнянь для випадків жорсткого защемлення зовнішнього контуру $K_R = K_w = \infty$, його опирання $K_R = 0$, $K_w = \infty$ чи вільного краю $K_R = K_w = 0$. Вони є ідентичними до класичних рівнянь, за винятком того, що на відміну від відомих задач вібрації попередньо навантажених пластин, у цьому випадку температурного навантаження пластини ξ та η залежать не лише від фізико-механічних властивостей матеріалу пластини, частоти і навантаження в її площині, але й від податливості кріплення k_u .

3. Числові результати. Проаналізуємо залежність власних частот круглої пластини з попереднім рівномірним нагрівом від температури та жорсткостей пружного кріплення зовнішнього контуру.

На рис. 2 зображено графіки залежності чотирьох найнижчих безрозмірних власних частот круглої рівномірно прогрітої пластини, защемленої на краю $K_R = K_w = \infty$, при її однорідному нагріві температурою Θ_0 . Кріплення вважалось неподатливим у радіальному напрямку, тобто $k_u = \infty$. Графіки відносної зміни власних частот такої пластини з попереднім нагрівом $\delta_\Omega(\Theta_0) = \frac{\Omega(\Theta_0) - \Omega(0)}{\Omega(0)}$ наведено на рис. 3.

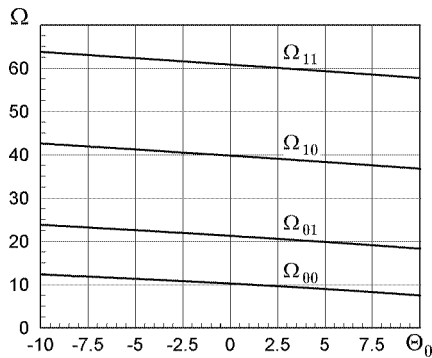


Рис. 2

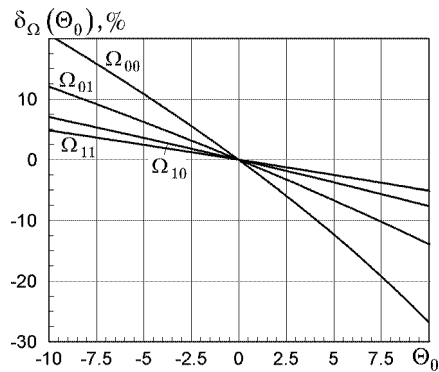


Рис. 3

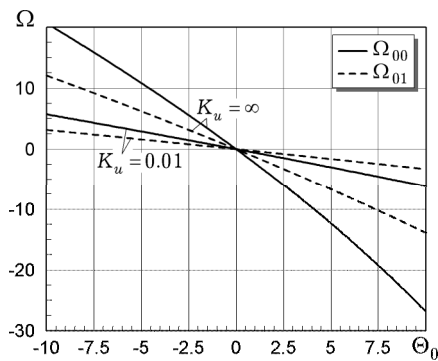


Рис. 4

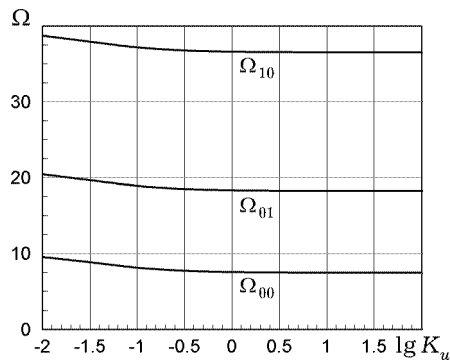


Рис. 5

Чутливість власних частот до температури спадає зі зменшенням податливості в радіальному напрямку k_u , адже зі зменшенням цього параметра температурні напруження прямують до нуля. На рис. 4 зобра-

жено графіки відносної зміни $\delta_{\Omega}(\Theta_0)$ двох власних частот з нагрівом при $K_u = k_u/E$ та $K_R = K_w = \infty$.

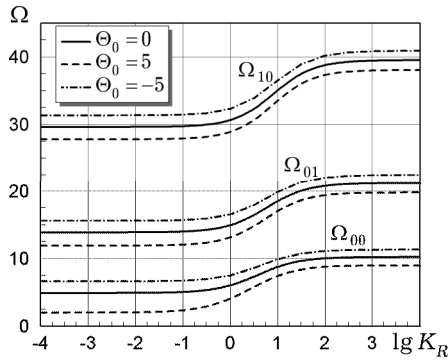


Рис. 6

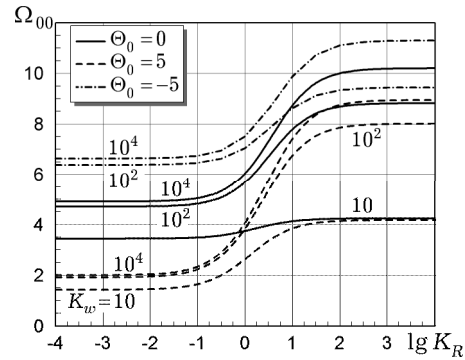


Рис. 7

Залежності власних частот від K_u при $\Theta_0 = 10^\circ\text{K}$, $K_R = K_w = 10^4$ зображено на рис. 5. Вираз для безрозмірних зусиль у площині пластини S у (5) залежить від комбінованого параметра $r_0 K_u / h = r_0 k_u / (Eh)$. Оскільки для пластин параметр r_0/h не можна вважати малим, то навіть при $K_u = 1$ значення напружень у площині S є близькими до отриманих у випадку, коли зовнішній контур є неподатливим. Тобто, при аналізі жорсткості податливого закріплення суттєва зміна власних частот відбувається при $K_u = k_u/E < 1$, що проілюстровано на рис. 5.

Вплив жорсткості пружного кріплення щодо повороту K_R при $K_w = 10^4$ на три найнижчі власні частоти пластини при її однорідному нагріві температурою Θ_0 показано на рис. 6. Аналогічні графіки для основної частоти при різних жорсткостях нормального переміщення K_w наведено на рис. 7. Результати, зображені на рис. 6, рис. 7, отримано при $K_u = \infty$.

Як бачимо з наведених графіків, при зміні коефіцієнта K_R нижчі власні частоти змінюються на 25–50% при високих значеннях жорсткості нормального переміщення K_w . Власні частоти є більш чутливими до зміни температури нагріву при високих K_w та низьких K_R , що відповідає аналізу коливань круглих пластин при опиранні та защемленні їхнього краю [1]. Характеристики області переходу від шарнірного краю до защемлення при зміні K_R залежать від Θ_0 . Для незначних нагрівів це відбувається на проміжку $10^{-2} < K_R < 10^3$.

Висновки. Побудовано розв'язок задачі статичної термопружності для круглої пластини з тепловіддачею за законом Ньютона з її плоских поверхонь та по зовнішньому контуру при пружній податливості в радіальному напрямку на контурі. Проаналізовано часткові випадки цього розв'язку. У випадку однорідної температури пластини побудовано аналітичний розв'язок задачі про її поперечні коливання при пружному закріпленні контуру. Проаналізовано вплив нагріву пластини на нижчі власні частоти, а також податливості у радіальному напрямку, жорсткостей на поворот та нормальне переміщення краю. Вплив температури на частоти є більш суттєвим для пластин з низькою жорсткістю на поворот кріплення при високій жорсткості на нормальні переміщення і є найбільшим для опертих пластин. Лише незначна податливість кріплення в радіальному напрямку впливає на частоти.

1. Горечко О. М., Заводовська Н. О. Вібраційна термочутливість попередньо нагрітої круглій пластини // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2023. – **66**, № 3–4. – С. 86–92. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2023.66.3-4.86-92>.
2. Коваленко А. Д. Термоупругість. – Київ: Вища школа, 1975. – 216 с.
3. Чемерис О. М. Коливання круглих кільцевих пластин // *Вісник НТУУ «КПІ». Машинобудування: зб. наук. праць.* – 2013. – № 3(69). – С. 98–105.
4. Bakhtiari-Nejad F., Saffari R., Zhu W. Free vibrations of circular and sectorial plates by using the shape functions with trigonometric and hyperbolic terms // *J. Vib. Control.* – 2023. – **29**, Nos. 21–22. – P. 5021–5034. – <https://doi.org/10.1177/10775463221129148>.
5. Bhardwaj R., Sharma A., Ghosh S., Mani N., Kumar K. Time period of the vibration of the circular plate with circular variation both in thickness and density // *Math. Probl. Eng.* – 2021, No. 1. – Article ID 4723759. – 11 p. – <https://doi.org/10.1155/2021/4723759>.
6. Leissa A. W. Vibration of plates. – NASA SP-160. – Washington: NASA, 1969. – vii+353 p.
7. Luyun C., Hong Y. Vibration approximate analytical solutions of circular plate consideration of complex pre-stress distribution // *J. Low Freq. Noise Vib. Act. Control.* – 2020. – **39**, No. 4. – P. 987–1001. – <https://doi.org/10.1177/1461348419852456>.
8. Xu P., Wellens P. Effects of static loads on the nonlinear vibration of circular plates // *J. Sound Vib.* – 2021. – **504**. – Article ID 116111. – 17 p. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2021.116111>.
9. Yao S., Fu A., Xing J., Zhou J., Tian B. Fluid-structure coupling vibration of an elastically restrained circular plate // *2020 IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* – 2020. – **772**. – Article ID 012017. – 8 p. – <https://doi.org/10.1088/1757-899X/772/1/012017>.
10. Zagrai A., Donskoy D. A “soft table” for the natural frequencies and modal parameters of uniform circular plates with elastic edge support // *J. Sound Vib.* – 2005. – **287**, Nos. 1–2. – P. 343–351. – <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2005.01.021>.

TRANSVERSE VIBRATIONS OF A CIRCULAR PLATE WITH AN ELASTICALLY RESTRAINED EDGE

The natural frequencies of transverse vibrations of a circular in-plane preheated plate with an elastically restrained edge have been investigated. The corresponding axisymmetric thermoelastic problem is formulated using plate theory, and its analytic solution is constructed taking into account heat exchange on the surfaces according to Newton's law and the elastic compliance at the outer edge of the plate. Frequency equations of transverse vibrations are derived for a plate pre-stressed due to uniform heating under boundary conditions of elastic edge restraint. The influence of temperature and the elastic properties of the restraint on the vibrational characteristics of the circular plate is analyzed.

Key words: heat exchange, thermoelasticity, plates, circular plate, natural frequencies.

¹ Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів