

## АНАЛІТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ ЗГИНУ НЕОДНОРІДНОЇ ОРТОТРОПНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗА ЛОКАЛЬНОГО НАГРІВАННЯ І ОСЬОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Досліджено напружено-деформований стан неоднорідної ортотропної кругової замкнутої циліндричної оболонки за початкового осьового навантаження та локального нагрівання шляхом конвективного теплообміну. Матеріальні властивості оболонки експоненційно змінюються за товщиною. Для дослідження використано математичну модель зсувної теорії неоднорідних оболонок типу Тимошенка. Двовимірне рівняння теплопровідності виведено за умови лінійної залежності температури від товщинної координати. З використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом і скінченного перетворення Фур'є за просторовими координатами побудовано аналітичні розв'язки нестационарної задачі теплопровідності та квазістатичної задачі термопружності для скінченної шарнірно опертої кругової циліндричної оболонки. За допомогою числових досліджень проаналізовано вплив початкового плоского напруженого стану, параметра неоднорідності та інших теплофізичних параметрів на переміщення і напруження в оболонці.

**Ключові слова:** термопружність, неоднорідні матеріали, температурне навантаження, циліндрична оболонка.

Неоднорідні композитні матеріали широко використовують в інженерній практиці [2]. Зокрема, для виготовлення елементів конструкцій з підвищеними вимогами щодо міцності та термоопору використовують функціонально-градієнтні матеріали, для яких характерна неперервна зміна їхніх пружних та теплофізичних властивостей в одному з просторових напрямків. Для аналізу поведінки таких матеріалів потрібні удосконалені моделі та методи, які давали б можливість урахування зміни механічних та теплофізичних характеристик. В [1, 4, 13] побудовано математичні моделі термопружності неоднорідних анізотропних пружних оболонок. Аналітичні розв'язки нестационарних задач про визначення температурних напружень у циліндричних функціонально-градієнтних ізотропних оболонках отримано в [3]. У [8, 11] для дослідження неоднорідних оболонок в рамках теорії зв'язаної термопружності застосовано метод скінченних елементів. Точний розв'язок стаціонарної задачі для температурних напружень товстої циліндричної оболонки подано в працях [6, 12]. Для дослідження деформування товстостінної труби, виготовленої з двокомпонентного функціонально-градієнтного матеріалу, за дії механічних і теплових навантажень використано метод Морі – Такера [17]. На основі уточнених теорій вищих порядків досліджено температурну стійкість [5, 7] та термопружний згин [13, 14] неоднорідних оболонок. Детальний огляд різних моделей і методів розв'язування задач про відповідь неоднорідних оболонок на температурно-силове навантаження наведено в працях [15, 16].

У цій статті на основі рівнянь термопружності та теплопровідності зсувної (п'ятимодальної) теорії оболонок досліджено вплив параметрів неоднорідності та попереднього осьового навантаження на напружено-деформований стан ортотропної кругової циліндричної оболонки за її нагріву шляхом конвективного теплообміну.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо неоднорідну ортотропну кругову циліндричну оболонку радіуса серединної поверхні  $R$ , сталої товщини  $2h$  і

✉ uliana.v.zhydyk@lpnu.ua

довжини  $\ell$ . Оболонку віднесено до циліндричної системи координат  $x, \theta, z$ , де  $x$  – осьова,  $\theta$  – колова, а  $z$  – радіальна координати. Надалі цим координатам відповідатимуть індекси 1, 2, 3.

Нехай у початковий момент часу на оболонку діють сталі зусилля  $N_1^0$  і  $N_2^0$  відповідно у напрямках  $x$  і  $\theta$ , а її температура дорівнює нулю. При  $\tau > 0$  оболонка нагрівається середовищем, температура якого на поверхні  $z = h$  дорівнює  $t_z^+(x, \theta, \tau) = t_c(x, \theta) t^+(\tau)$ , а на поверхні  $z = -h$  –  $t_z^-(x, \theta, \tau) = 0$ . Через поверхні  $z = h$  і  $z = -h$  відбувається конвективний теплообмін із зовнішнім середовищем із коефіцієнтами тепловіддачі  $\alpha^+$  і  $\alpha^-$  відповідно. Термопружну поведінку такої оболонки дослідимо на основі рівнянь зсувної теорії оболонок першого порядку [1] в узагальнених переміщеннях  $u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2$  з урахуванням початкового плоского напруженого стану [9]. Ці рівняння запишемо в операторній формі:

$$L_{k1}u_1 + L_{k2}u_2 + L_{k3}w + L_{k4}\gamma_1 + L_{k5}\gamma_2 = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, 5. \quad (1)$$

Тут диференціальні оператори  $L_{kj} = L_{jk}$  і вільні члени  $b_k$  мають вигляд

$$\begin{aligned} L_{11} &= (A_{11} + N_1^0)\partial_{11}^2 + \frac{A_{66} + N_2^0}{R^2}\partial_{22}^2, \\ L_{12} &= \frac{A_{12} + A_{66}}{R}\partial_{12}^2, \quad L_{13} = \frac{A_{12}}{R}\partial_1, \quad L_{14} = B_{11}\partial_{11}^2 + \frac{B_{66}}{R^2}\partial_{22}^2, \\ L_{15} &= \frac{B_{12} + B_{66}}{R}\partial_{12}^2, \quad L_{22} = (A_{66} + N_1^0)\partial_{11}^2 + \frac{A_{22} + N_2^0}{R^2}\partial_{22}^2 - \frac{k'A_{55} + N_2^0}{R^2}, \\ L_{23} &= \frac{A_{22} + k'A_{55} + 2N_2^0}{R^2}\partial_2, \quad L_{24} = \frac{B_{12} + B_{66}}{R}\partial_{12}^2, \\ L_{25} &= B_{66}\partial_{11}^2 + \frac{B_{22}}{R^2}\partial_{22}^2 + \frac{k'A_{55}}{R}, \\ L_{33} &= -(k'A_{44} + N_1^0)\partial_{11}^2 - \frac{k'A_{55} + N_2^0}{R^2}\partial_{22}^2 + \frac{A_{22} + N_2^0}{R^2}, \\ L_{34} &= \left(\frac{B_{12}}{R} - k'A_{44}\right)\partial_1, \quad L_{35} = \frac{1}{R}\left(\frac{B_{22}}{R} - k'A_{55}\right)\partial_2, \\ L_{44} &= D_{11}\partial_{11}^2 + \frac{D_{66}}{R^2}\partial_{22}^2 - k'A_{44}, \quad L_{45} = \frac{D_{12} + D_{66}}{R}\partial_{12}^2, \\ L_{55} &= D_{66}\partial_{11}^2 + \frac{D_{22}}{R^2}\partial_{22}^2 - k'A_{55}, \\ b_1 &= A_{11}^t\partial_1 T_1 + \frac{B_{11}^t}{h}\partial_1 T_2, \quad b_2 = \frac{A_{22}^t}{R}\partial_2 T_1 + \frac{B_{22}^t}{Rh}\partial_2 T_2, \\ b_3 &= \frac{A_{22}^t}{R}T_1 + \frac{B_{22}^t}{Rh}T_2, \quad b_4 = B_{11}^t\partial_1 T_1 + \frac{D_{11}^t}{h}\partial_1 T_2, \\ b_5 &= \frac{B_{22}^t}{R}\partial_2 T_1 + \frac{D_{22}^t}{Rh}\partial_2 T_2, \end{aligned}$$

$$\begin{Bmatrix} A_{ij} & B_{ij} & D_{ij} \\ A_{ii}^t & B_{ii}^t & D_{ii}^t \end{Bmatrix} = \int_{-h}^h \begin{Bmatrix} c_{ij}(z) \\ \beta_{ii}^t(z) \end{Bmatrix} \{1 \ z \ z^2\} dz,$$

$$\beta_{ii}^t(z) = c_{i1}(z)\alpha_{11}^t(z) + c_{i2}(z)\alpha_{22}^t(z),$$

$$T_i = \frac{2i-1}{2h^i} \int_{-h}^h tz^{i-1} dz, \quad i = 1, 2, \quad t = T_1 + \frac{z}{h} T_2,$$

$\partial_1 = \partial / \partial x$ ,  $\partial_2 = \partial / \partial \theta$ ,  $c_{ij}(z)$  – коефіцієнти пружності ортотропного тіла,  $\alpha_{ii}^t(z)$  – коефіцієнти лінійного теплового розширення;  $t(x, \theta, z, \tau)$  – функція приросту температури;  $k'$  – коефіцієнт зсуву [10];  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w$  – переміщення точок серединної поверхні;  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  – кути повороту нормалі.

Для однозначності розв'язку системи (1) на краях замкнутої циліндричної оболонки  $x = 0$  і  $x = \ell$  задаємо по одній величині з кожної пари  $\{N_{11}, u_1\}$ ,  $\{N_{12}, u_2\}$ ,  $\{N_{13}, w\}$ ,  $\{M_{11}, \gamma_1\}$ ,  $\{M_{12}, \gamma_2\}$ , де  $N_{ij}$  і  $M_{ij}$  – внутрішні зусилля і моменти.

Система рівнянь (1) разом із граничними умовами формує крайову задачу про знаходження температурних напружень для ортотропних неоднорідних циліндричних оболонок у термінах узагальнених переміщень з початковими напруженнями. За відомими переміщеннями визначаємо напруження  $\sigma_{ij}$  і деформації  $e_{ij}$  в довільній точці оболонки за формулами:

$$\sigma_{11} = c_{11}(\partial_1 u_1 + z\partial_1 \gamma_1) + \frac{c_{12}}{R+z}(\partial_2 u_2 + w + z\partial_2 \gamma_2) - \beta_{11}^t t,$$

$$\sigma_{22} = c_{12}(\partial_1 u_1 + z\partial_1 \gamma_1) + \frac{c_{22}}{R+z}(\partial_2 u_2 + w + z\partial_2 \gamma_2) - \beta_{22}^t t,$$

$$\sigma_{12} = c_{66} \left( \partial_1 u_2 + z\partial_1 \gamma_2 + \frac{1}{R+z}(\partial_2 u_1 + z\partial_2 \gamma_1) \right),$$

$$\sigma_{13} = c_{44}(\gamma_1 + \partial_1 w), \quad \sigma_{23} = \frac{c_{55}}{R+z}(\gamma_2 R + \partial_2 w - u_2),$$

$$e_{11} = \partial_1 u_1 + z\partial_1 \gamma_1, \quad e_{22} = \frac{1}{1+z/R} \left( \partial_2 u_2 + \frac{w}{R} + z\partial_2 \gamma_2 \right),$$

$$e_{13} = \gamma_1 + \partial_1 w, \quad e_{23} = \frac{1}{1+z/R} \left( \gamma_2 + \partial_2 w - \frac{u_2}{R} \right),$$

$$e_{12} = \partial_1 u_2 + \frac{1}{1+z/R} \partial_2 u_1 + z \left( \partial_1 \gamma_2 + \frac{1}{1+z/R} \partial_2 \gamma_1 \right).$$

Інтегральні характеристики температури  $T_1$ ,  $T_2$ , які входять у вільні члени системи (1), визначаємо з відповідних рівнянь теплопровідності за граничних умов, заданих на поверхнях та кінцях оболонки. За конвективного теплообміну на поверхнях оболонки  $z = \pm h$  рівняння теплопровідності мають вигляд [3]

$$\Delta_{(1)} T_1 - \varepsilon_1^t T_1 + \Delta_{(2)} T_2 + \frac{A_{33}^\lambda}{hR} T_2 - \varepsilon_2^t T_2 - A^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau} - B^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = -f_1,$$

$$\begin{aligned} \Delta_{(2)}T_1 - \varepsilon_2^t T_1 + \Delta_{(3)}T_2 + \left( \frac{B_{33}^\lambda}{hR} - \frac{A_{33}^\lambda}{h^2} \right) T_2 - \\ - \varepsilon_1^t T_2 - B^c \frac{\partial T_1}{\partial \tau_1} - D^c \frac{\partial T_2}{\partial \tau} = -f_2, \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\Delta_{(1)} = A_{11}^\lambda \partial_{11}^2 + \frac{A_{22}^\lambda}{R^2} \partial_{22}^2, \quad \Delta_{(2)} = B_{11}^\lambda \partial_{11}^2 + \frac{B_{22}^\lambda}{R^2} \partial_{22}^2,$$

$$\Delta_{(3)} = D_{11}^\lambda \partial_{11}^2 + \frac{D_{22}^\lambda}{R^2} \partial_{22}^2,$$

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A_{ii}^\lambda & B_{ii}^\lambda & D_{ii}^\lambda \\ A^c & B^c & D^c \end{array} \right\} = \int_{-h}^h \left\{ \begin{array}{c} \lambda_{ii}(z) \\ c_v(z) \end{array} \right\} \left\{ 1 \quad \frac{z}{h} \quad \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right\} dz,$$

$$f_j = t_1^z \varepsilon_j^t + t_2^z \varepsilon_{3-j}^t, \quad \varepsilon_j^t = \alpha^+ - (-1)^j \alpha^-, \quad t_j^z = \frac{1}{2} (t_z^+ - (-1)^j t_z^-), \quad j = 1, 2,$$

$\lambda_{jj}(z)$  – коефіцієнти теплопровідності,  $t_z^+$ ,  $t_z^-$  – температури середовищ на поверхнях  $z = h$  і  $z = -h$  відповідно,  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  – коефіцієнти тепловіддачі з цих поверхонь,  $c_v(z)$  – об'ємна питома теплоємність,  $\tau$  – часова змінна.

Для однозначності розв'язку системи (2) на краях  $x = 0$  і  $x = \ell$  потрібно задати вирази  $a_1 T_1 + a_2 \partial_1 T_1$  і  $a_3 T_2 + a_4 \partial_1 T_2$ ,  $a_i = \text{const}$ , а в початковий момент – значення температурних характеристик  $T_1$  і  $T_2$ .

**2. Метод розв'язування.** Нехай замкнуту ортотропну циліндричну оболонку виготовлено з неоднорідного матеріалу зі зміною фізико-механічних властивостей у поперечному напрямку за експоненціальним законом. Тоді для модулів пружності  $E_i(z)$ , модулів зсуву  $G_{ij}(z)$ , коефіцієнтів лінійного теплового розширення  $\alpha_{jj}^t(z)$ , теплопровідності  $\lambda_{jj}(z)$  та теплоємності  $c_v(z)$  задаємо таку залежність від координати  $z$ :

$$\begin{aligned} \{E_i(z), G_{ij}(z), \alpha_{jj}^t(z), \lambda_{jj}(z), c_v(z)\} = \\ = \{E_i^0, G_{ij}^0, \alpha_{jj}^0, \lambda_{jj}^0, c_v^0\} \exp\left(\frac{r}{2} \left(1 + \frac{z}{h}\right)\right), \end{aligned}$$

де  $r$  – параметр неоднорідності,  $E_i^0$ ,  $G_{ij}^0$ ,  $\alpha_{jj}^0$ ,  $\lambda_{jj}^0$ ,  $c_v^0$  – відомі сталі, які характеризують властивості ортотропного матеріалу. Коефіцієнти Пуассона вважаємо сталими  $\nu_{ij} = \text{const}$ .

Нехай на краях  $x = 0$  і  $x = \ell$  оболонки задано такі граничні умови:

$$w = u_2 = \gamma_2 = 0, \quad N_{11} = M_{11} = 0, \quad (3)$$

$$T_1 = T_2 = 0, \quad (4)$$

а в момент часу  $\tau = 0$  – початкові умови:

$$T_1(x, \theta, 0) = T_2(x, \theta, 0) = 0. \quad (5)$$

Розв'язок системи рівнянь теплопровідності (2) за умов (4) і (5) знаходимо з використанням інтегрального перетворення Лапласа за часом і скінченного перетворення Фур'є за координатами. Тоді одержимо:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{C^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{Q_{nm} Z_j(\tau') \text{Bi}^+}{p_j - p_i} (C_3 p_j - g_4 - \\
&\quad - C_2 p_j + g_2) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \cos m \theta, \\
T_2 &= \frac{1}{C^*} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i \neq j=1}^2 \frac{Q_{nm} Z_j(\tau') \text{Bi}^+}{p_j - p_i} (C_1 p_j - g_1 - \\
&\quad - C_2 p_j + g_3) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \cos m \theta, \tag{6}
\end{aligned}$$

де

$$Q_{mn} = \frac{k_m}{\pi \ell} \int_0^{\ell} \int_{-\pi}^{\pi} t_c(x, \theta) \sin \frac{\pi n}{\ell} x \cos m \theta dx d\theta, \quad k_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \neq 0, \end{cases} \tag{7}$$

$$Z_j(\tau') = \int_0^{\tau'} t^+(v) e^{-p_j(\tau'-v)} dv, \quad j = 1, 2, \tag{8}$$

$$g_1 = (\Lambda_{11}^{(1)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(1)} m^2) \delta^2 + \text{Bi}_1, \quad g_2 = (\Lambda_{11}^{(2)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(2)} m^2) \delta^2 - \delta \Lambda_{33}^{(1)} + \text{Bi}_2,$$

$$g_3 = (\Lambda_{11}^{(2)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(2)} m^2) \delta^2 + \text{Bi}_2,$$

$$g_4 = (\Lambda_{11}^{(3)} \mu_n^2 + \Lambda_{22}^{(3)} m^2) \delta^2 + \Lambda_{33}^{(1)} - \delta \Lambda_{33}^{(2)} + \text{Bi}_1,$$

$$\delta = \frac{h}{R}, \quad \mu_n = \frac{\pi n R}{\ell},$$

$$\text{Bi}_i = \text{Bi}^+ - (-1)^i \text{Bi}^-, \quad \text{Bi}^+ = \frac{\alpha^+ h}{\lambda_0}, \quad \text{Bi}^- = \frac{\alpha^- h}{\lambda_0}, \quad i = 1, 2,$$

$$\tau' = \frac{\lambda_0}{c_0 h^2} \tau, \quad C^* = C_1 C_3 - C_2^2,$$

$$\Lambda_{ii}^{(k)} = \frac{2\lambda_{ii}^0}{\lambda_0} \beta_k, \quad C_k = \frac{2c_v^0}{c_0} \beta_k, \quad k = 1, 2, 3,$$

$$\beta_1 = -\frac{1-e^r}{r}, \quad \beta_2 = \frac{1}{r} \left( e^r + 1 + \frac{2}{r} (1-e^r) \right),$$

$$\beta_3 = -\frac{1}{r} \left( \left( 1 + \frac{8}{r^2} \right) (1-e^r) + \frac{4}{r} (1+e^r) \right),$$

$\lambda_0$  і  $c_0$  – характерні коефіцієнти теплопровідності і теплоємності відповідно;  $-p_1$  і  $-p_2$  – корені квадратного рівняння

$$C^* p^2 + (C_1 g_4 + C_3 g_1 - C_2 (g_3 + g_2)) p + g_1 g_4 - g_2 g_3 = 0,$$

які, як випливає з числового аналізу, є дійсними.

Розв'язок системи рівнянь рівноваги (1), який задовольняє граничні умови (3), за відомого температурного поля (6) знаходимо з використанням подвійних скінченних перетворень Фур'є. Тоді вирази для узагальнених переміщень матимуть вигляд

$$\{u_1, \gamma_1\} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \{U_{1nm}, \Gamma_{1nm}\} \cos \frac{\pi n x}{\ell} \cos m\theta,$$

$$\{u_2, \gamma_2\} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{U_{2nm}, \Gamma_{2nm}\} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \sin m\theta,$$

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} W_{nm} \sin \frac{\pi n x}{\ell} \cos m\theta,$$

де коефіцієнти Фур'є  $U_{1nm}$ ,  $U_{2nm}$ ,  $W_{nm}$ ,  $\Gamma_{1nm}$ ,  $\Gamma_{2nm}$  знаходимо за формулою  $\mathbf{U} = |\mathbf{M}|^{-1} \mathbf{M}^* (\mathbf{V} \mathbf{T}_{1mn} + \mathbf{S} \mathbf{T}_{2mn})$ . Тут  $\mathbf{U} = \{U_{1nm}, U_{2nm}, W_{nm}, \Gamma_{1nm}, \Gamma_{2nm}\}^T$ ,  $\mathbf{M} = [m_{ij}]_{5 \times 5}$ ,  $\mathbf{V} = [v_i]_{5 \times 1}$ ,  $\mathbf{S} = [s_i]_{5 \times 1}$ ,  $\mathbf{M}^*$  – приєднана матриця;  $|\mathbf{M}|$  – визначник матриці  $\mathbf{M}$ . Коефіцієнти матриць  $m_{ij}$ ,  $v_i$  і  $s_i$  обчислюємо із системи (1).

**3. Числовий приклад та аналіз результатів.** Числові дослідження виконано для оболонки, зовнішня поверхня  $z = h$  якої нагрівається середовищем з температурою  $t_z^+(x, \theta, \tau) = t_c(x, \theta, \tau) t^+(\tau)$ , де

$$t_c(x, \theta, \tau) = t^*(S_-(x - (x_0 - d)) - S_+(x - (x_0 + d))) \times \\ \times (S_-(\theta + \eta) - S_+(\theta - \eta)),$$

$$t^+(\tau) = 1 - e^{-\beta^* \tau}, \quad (9)$$

$t^*$ ,  $\beta^* = \text{const}$ ,  $S_{\pm}(x)$  – асиметричні одиничні функції [2],  $(x_0, 0)$  – координати середини ділянки нагріву,  $2d$  – її ширина,  $2\eta$  – її кут.

Зі співвідношень (7)–(9) одержуємо вирази для коефіцієнтів Фур'є  $Q_{nm}$  і функції часу  $Z_j(\tau')$ :

$$Q_{n0} = \frac{4\eta t^*}{\pi^2} \sin \frac{\pi n d}{\ell} \sin \frac{\pi n x_0}{\ell}, \quad Q_{nm} = \frac{8t^*}{\pi n \pi^2} \sin \frac{\pi n d}{\ell} \sin \frac{\pi n x_0}{\ell} \sin m\eta,$$

$$Z_j(\tau') = \frac{1}{p_j} \left( 1 - e^{-p_j \tau'} \right) + \frac{1}{\beta^* - p_j} \left( e^{-\beta^* \tau'} - e^{-p_j \tau'} \right).$$

Числовий аналіз виконували для ортотропного матеріалу з такими фізико-механічними властивостями [14]:

$$E_1^0 = 172.4 \text{ ГПа}, \quad G_{12}^0 = G_{13}^0 = 3.45 \text{ ГПа},$$

$$E_2^0 = 6.89 \text{ ГПа}, \quad G_{23}^0 = 1.38 \text{ ГПа},$$

$$\alpha_{11}^0 = 0.57 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \lambda_{11}^0 = 36.42 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}),$$

$$\alpha_{22}^0 = 35.6 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \quad \lambda_{22}^0 = \lambda_{33}^0 = 0.96 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К}),$$

$$c_v^0 = 1.64 \cdot 10^6 \text{ Дж}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}), \quad \nu_{12} = 0.25.$$

Значення інших параметрів взято такі:  $h/R = 0.05$ ,  $\ell/R = 3$ ;  $\eta = \pi/4$ ,  $d/\ell = 1/4$ ,  $x_0 = \ell/2$ ,  $\lambda_0 = \lambda_{11}^0$ ,  $c_0 = c_v^0$ ,  $k' = 5/6$ ,  $\text{Bi}^+ = \text{Bi}^- = \text{Bi}$ ,  $N_2^0 = 0$ .

Обчислено безрозмірні прогини  $w' = w/(R\alpha_{11}^0 t^*)$  на серединній поверхні та нормальні напруження  $\sigma'_i = \sigma_{ii}/(E_1^0 \alpha_{11}^0 t^*)$  на поверхні  $z = h$ .

На рис. 1, рис. 2 і рис. 3 зображено залежність відповідно прогину  $w'$ , осьового  $\sigma'_1$  і колового  $\sigma'_2$  напружень від змінної  $x' = x/\ell$ ,  $0.5 \leq x' \leq 1$ ,

уздовж твірної  $\theta = 0$ , а на рис. 4, рис. 5 і рис. 6 – залежність цих величин від  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ , уздовж напрямної  $x' = 0,5$ . Для обчислень взято  $Vi = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $\tau' = 1$ ,  $\beta^* = 1$  і значення безрозмірного початкового нормального зусилля  $N_1^{\prime 0} = N_1^0 / (E_1^0 h) = 0, 0.01, 0.02, 0.03$ .

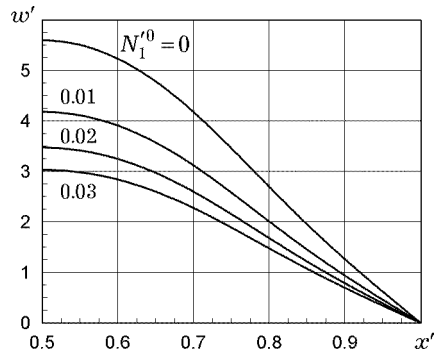


Рис. 1

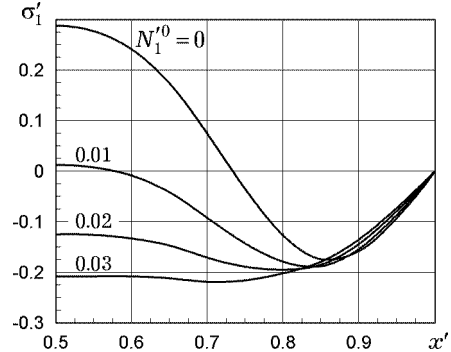


Рис. 2

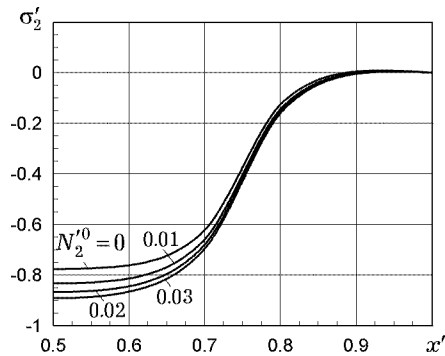


Рис. 3

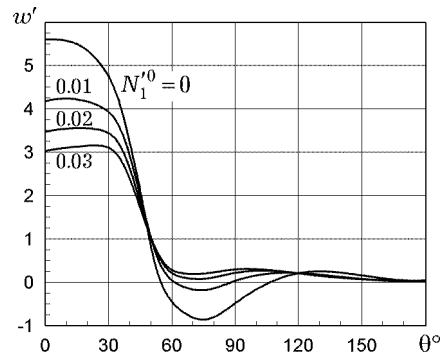


Рис. 4

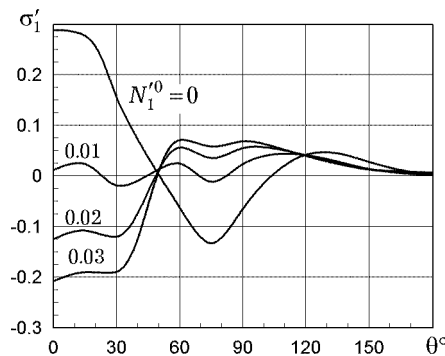


Рис. 5

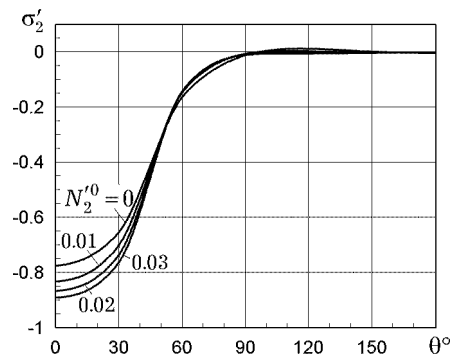


Рис. 6

Як бачимо, початкове нормальне зусилля суттєво впливає на прогини та осьове напруження і незначно на колове. Зі збільшенням початкового зусилля оболонка стає жорсткішою. Осьові напруження мають коливний характер. Максимальні значення досягаються в центрі області нагріву. Для початково ненапруженої оболонки  $N_1^{\prime 0} = 0$  вони розтягувальні, а зі збільшенням  $N_1^{\prime 0}$  переходять у стискальні. Колові напруження є монотонними.

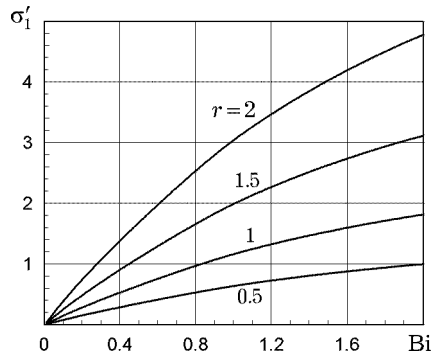


Рис. 7

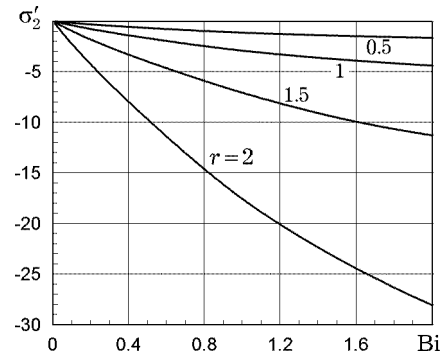


Рис. 8

Залежність напружень від коефіцієнта тепловіддачі  $Bi$  за відсутності початкових зусиль  $N_1^0 = N_2^0 = 0$  для  $\tau' = 1$ ,  $\beta^* = 1$ ,  $x' = 0.5$ ,  $\theta = 0$  і для значень параметра неоднорідності  $r = 0.5, 1, 1.5, 2$  показано на рис. 7 і рис. 8. Зі збільшенням параметра неоднорідності напруження монотонно зростають, причому інтенсивніше з підвищенням тепловіддачі.

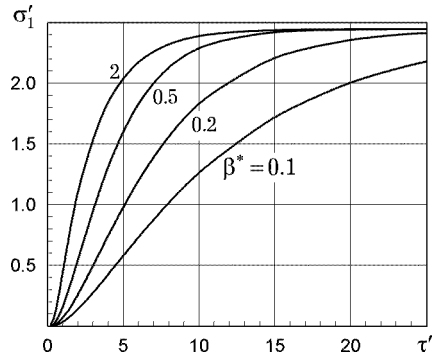


Рис. 9

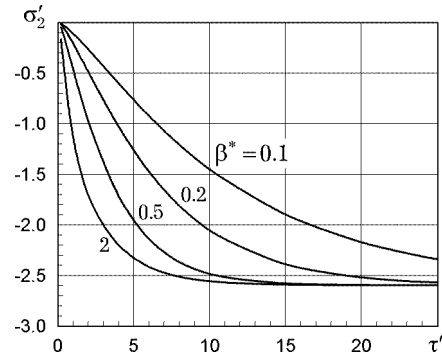


Рис. 10

Зміну напружень залежно від часу  $\tau'$  для значень параметра  $\beta^* = 0.1, 0.2, 0.5, 2.0$  ілюструють рис. 9 і рис. 10. Значення інших параметрів такі:  $Bi = 0.2$ ,  $r = 1$ ,  $x' = 0.5$ ,  $\theta = 0$ . З плином часу напруження прямують до сталого значення, причому інтенсивніше зі збільшенням параметра  $\beta^*$ .

**Висновки.** На основі уточненої зсувної теорії першого порядку розвинуто методику розв'язування задач теплопровідності та термопружності неоднорідних ортотропних замкнутих циліндричних оболонок зі скінченною довжиною, які вільно оперті на краях і початково знаходяться у плоскому напруженому стані. Досліджували вплив параметрів неоднорідності, часу, коефіцієнта тепловіддачі та попереднього напруження на напружено-деформований стан функціонально-градієнтної ортотропної циліндричної оболонки за локального нагрівання конвективним теплообміном. З числового аналізу випливає, що параметр неоднорідності, а також попереднє осьове навантаження суттєво впливають на напруження і прогини.

1. Жидик У. В. Математичне моделювання термомеханічної поведінки неоднорідних анізотропних оболонок // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 57. – С. 72–75.
2. Коляно Ю. М. Методи теплопровідності и термоупругости неоднородного тела. – Киев: Наук. думка, 1992. – 280 с.
3. Кушнір Р. М., Жидик У. В. Температурні напруження у функціонально-градієнтній циліндричній оболонці // Фіз.-хім. мех. матер. – 2018. – 54, № 5. – С. 56–65.

- Te same: *Kushnir R. M., Zhydyk U. V.* Temperature stresses in a functionally graded cylindrical shell // *Mater. Sci.* – 2019. – **54**, No. 5. – P. 666–677. – <https://doi.org/10.1007/s11003-019-00231-0>.
4. *Кушнір Р. М., Николішин М. М., Жидик У. В., Флячок В. М.* Моделювання термомпружних процесів в неоднорідних анізотропних оболонках з початковими деформаціями // *Мат. методи і фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 2. – С. 122–136. Te same: *Kushnir R. M., Nykolishyn M. M., Zhydyk U. V., Flyachok V. M.* Modeling of thermoelastic processes in heterogeneous anisotropic shells with initial deformations // *J. Math. Sci.* – 2011. – **178**, No. 5. – P. 512–530. – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0566-5>.
  5. *Ahmadi H., Foroutan K.* Nonlinear static and dynamic thermal buckling analysis of imperfect multilayer FG cylindrical shells with an FG porous core resting on nonlinear elastic foundation // *J. Therm. Stresses.* – 2020. – **43**, No. 5. – P. 629–649. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1727802>.
  6. *Ayoubi P., Alibeigloo A.* Three-dimensional transient analysis of FGM cylindrical shell subjected to thermal and mechanical loading // *J. Therm. Stresses.* – 2017. – **40**, No. 9. – P. 1166–1183. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1325720>.
  7. *Chen X., Nie G., Yang X.* Thermal postbuckling analysis of variable angle tow composite cylindrical panels // *J. Therm. Stresses* – 2021. – **44**, No. 7. – P. 850–882. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2021.1923429>.
  8. *Esmaeili H. R., Arvin H., Kiani Y.* Axisymmetric nonlinear rapid heating of FGM cylindrical shells // *J. Therm. Stresses.* – 2019. – **42**, No. 4. – P. 490–505. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1498756>.
  9. *Kalnins A., Biricikoglu V.* Theory of vibration of initially stressed shells // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1972. – **51**, No. 5B. – P. 1697–1704. – <https://doi.org/10.1121/1.1913017>.
  10. *Mirsky I.* Vibrations of orthotropic, thick, cylindrical shells // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1964. – **36**, No. 1. – P. 41–51. – <https://doi.org/10.1121/1.1918910>.
  11. *Pandey S., Pradyumna S.* Transient stress analysis of sandwich plate and shell panels with functionally graded material core under thermal shock // *J. Thermal Stresses.* – 2018. – **41**, No. 5. – P. 543–567. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1422999>.
  12. *Pelletier J. L., Vel S. S.* An exact solution for the steady-state thermoelastic response of functionally graded orthotropic cylindrical shells // *Int. J. Solids Struct.* – 2006. – **43**, No. 5. – P. 1131–1158. – <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.03.079>.
  13. *Punera D., Kant T., Desai Y. M.* Thermoelastic analysis of laminated and functionally graded sandwich cylindrical shells with two refined higher order models // *J. Therm. Stresses.* – 2018. – **41**, No. 1. – P. 54–79. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1373379>.
  14. *Shinde B. M., Sayyad A. S.* Thermoelastic analysis of laminated composite and sandwich shells considering the effects of transverse shear and normal deformations // *J. Therm. Stresses.* – 2020. – **43**, No. 10. – P. 1234–1257. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1786484>.
  15. *Swaminathan K., Sangeetha D. M.* Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods // *Compos. Struct.* – 2017. – **160**. – P. 43–60. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.047>.
  16. *Thai H. T., Kim S. E.* A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells // *Compos. Struct.* – 2015. – **128**. – P. 70–86. – <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.03.010>.
  17. *Xin L., Xu J., Li Z., Li Y.* A Mori – Tanaka method based theoretical approximation for functionally graded thick wall tube under combined thermal and mechanical loads // *J. Therm. Stresses.* – 2023. – **46**, No. 3. – P. 229–250. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2022.2155743>.

#### AN ANALYTIC SOLUTION TO THE BENDING PROBLEM FOR AN INHOMOGENEOUS ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL UNDER LOCAL HEATING AND AXIAL LOADING

*The stress-strain state of an inhomogeneous orthotropic circular closed cylindrical shell under the action of the initial axial loading and local heating due to the convective heat exchange is investigated. The material properties of the shell vary exponentially with the thickness. The mathematical model of the shear theory of inhomogeneous shells of the Timoshenko type is used. The two-dimensional equation of thermal conductivity is*

*derived under the condition of linear dependence of temperature on the thickness coordinate. Using the Laplace integral transform by the time variable and the finite Fourier transform by the spatial coordinates, the analytic solutions to the non-stationary heat conduction problem and the quasi-static thermoelasticity problem for a finite hinged circular cylindrical shell are found. By implementing the numerical analysis, the influence of the initial plane stress state, the inhomogeneity parameter, and other parameters on the displacement and stress in the shell is evaluated.*

**Key words:** *thermoelasticity, heterogeneous materials, temperature load, cylindrical shell.*

<sup>1</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів  
<sup>2</sup> Нац. ун-т «Львівська політехніка», Львів

Одержано  
25.02.24