

## ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ СКЛАДЕНОГО ТІЛА З ЕЛЕМЕНТАМИ РІЗНОЇ ВИМІРНОСТІ

*Досліджено теплову взаємодію тіл з тонкими елементами, що мають інші теплофізичні характеристики. Сформульовано задачу теплопровідності для півсмуги з тонким покриттям на поверхні, що зумовлює використання узагальнених граничних умов, які наближено враховують теплообмін з навколишнім середовищем через покриття. Із застосуванням інтегрального перетворення Лапласа отримано розв'язок такої задачі в замкненому вигляді та здійснено перехід до безрозмірної форми, а також стаціонарного вигляду. Виконано розрахунки та аналіз температури в області тіла та на його поверхні для деяких співвідношень між характеристиками тіла та покриття.*

**Ключові слова:** теплообмін, тонке включення, тонке покриття поверхні, узагальнені теплові граничні умови.

**Вступ.** Значний вплив на термонапружений стан багатошарових конструкцій з елементами різної товщини має температура навколишнього середовища. На поверхнях конструкцій з тонкими антикорозійними покриттями під впливом температурних перепадів зовнішнього середовища виникають дефекти у вигляді тріщин і викришування. Це призводить до зниження довговічності таких конструкцій в умовах експлуатації. Однією з причин є нерівномірність розподілу температури в багатошаровій металевій конструкції, що складається з елементів різної товщини. Тому дослідження температурного поля і теплообміну є необхідною складовою частиною підготовки даних для розрахунку температурних напружень і деформацій конструкцій з тонкими покриттями на поверхні.

В інженерній практиці часто формулюють задачі, які стосуються розрахунку конструкцій з урахуванням нерівномірності розподілу в них температури, що пов'язано з процесами зміцнення деталей. Наприклад, під час роботи можуть виникати цикли нагріву-охолодження або нерівномірний нагрів конструкцій чи деталей. Пошук розв'язку таких задач теплопровідності з урахуванням тонкості покриття є ускладненим у зв'язку з неоднорідністю початкових умов. Тому замкнуті аналітичні розв'язки таких задач отримують лише за сталої початкової температури. Зокрема, у роботі [8] запропоновано математичні моделі для розрахунку температурного поля та термонапруженого стану фрагмента металевієї гофрованої оболонки транспортної конструкції, бічні поверхні якої нагріті до певних температур. За можливий критерій вибору функції розподілу температури конструкції прийнято мінімум функціонала, визначеного на множині допустимих функцій, у вигляді інтеграла по площі тіла від виразу, що задає виробництво ентропії. У праці [3] з використанням узагальненої граничної умови в задачі теплопровідності для тіла з багатошаровим покриттям досліджено його термопружний стан за циклічної кусково-однорідної зміни температури зовнішнього середовища, а в роботі [9] – температурне поле металевих конструкцій при неоднорідному нагріві на одному з країв.

У працях [9, 26] виконано моделювання розподілу температурного поля уздовж поверхні бетонної балки при дії кліматичних температурних впливів. Встановлено, що розподіл температурного поля уздовж бетонної балки має нелінійний характер, що зумовлює необхідність дослідження температурного поля у складних конструкціях з різними геометричними перерізами.

✉ gera-zen@ukr.net

У роботі [18] наведено результати досліджень теплопровідності в тілах з урахуванням внутрішніх неоднорідностей і джерел тепла.

У працях [4, 7] виведено узагальнені граничні умови, які враховують наявність на поверхні тіла покриття, теплофізичні характеристики якого відрізняються від характеристик матеріалу основного тіла. Встановлено, що покриття прогнотних конструкцій істотно впливає на зміну перепадів температури, і наявність покриття спричинює значні температурні градієнти на поверхні тіла.

У випадку підкріплення дефектної залізобетонної труби металевою гофрованою конструкцією виникає нерівномірний розподіл температури та ефект контакту. Зокрема у праці [12] ефект контакту описується неідеальними умовами теплообміну на стику між шарами. Також у праці [13] при дослідженні температурного поля у сталезалізобетонній балці моста та у праці [24] при дослідженні розподілу температурного поля у залізобетонній балці, підсиленій металевою пластиною та метилметакрилатним покриттям, прийнято неідеальні умови теплообміну на стику різних матеріалів.

Дослідженню процесів теплопровідності в тілах з тонкими покриттями або внутрішніми неоднорідностями присвячено також працю [14]. В роботі [23] отримано аналітичні розв'язки крайових задач для тіл з одношаровим покриттям з граничними умовами першого та третього роду, а також зі змішаними умовами і під дією внутрішніх джерел тепла. Основну увагу тут приділено наскрізному нагріву тіла через покриття, але не досліджено поширення тепла у самому покритті внаслідок теплообміну з тілом і навколишнім середовищем.

У роботі [17] досліджено напружено-деформований стан функціонально-градієнтної ізотропної тонкої круглої циліндричної оболонки при локальному нагріванні плоским джерелом тепла. За допомогою методів інтегральних перетворень Фур'є та Лапласа отримано розв'язки нестационарної задачі теплопровідності та квазістатичної задачі термопружності для скінченної замкненої циліндричної шарнірно опертої оболонки.

У працях [10, 21] наведено узагальнені періодичні граничні умови для моделювання теплообміну в пористих і композиційних матеріалах на мікроскопічному рівні. Класичну періодичну граничну умову узагальнено з метою врахування перепадів температур між періодично розміщеними елементами. Глобальний тепловий градієнт може бути спроектований в усіх напрямках відносно структурної періодичності неоднорідностей тіла. Крім того, на границях поділу між компонентами в композиційних матеріалах (або між поверхневою рідиною – твердим тілом в пористих матеріалах) записано умови з відповідним характером їхнього контакту. Цей підхід явно враховує теплофізичні властивості матеріалів окремих компонентів, а також можливий термічний опір на границях поділу між компонентами з різними фізико-механічними властивостями.

Аналітичний розв'язок задачі Лебека з додатковими граничними умовами для температурного поля та товщини приграничного шару через довгу трубу наведено в [10]. Також описано чисельні методи розв'язання задачі взаємодії частинок рідини з повністю розвиненою ламінарною нестисливою ньютонівською течією. У роботі [5] наведено граничні умови конвективного теплообміну розріджених газів у режимі ковзання, і за результатами досліджень встановлено, що такий теплообмін передбачає стрибок як температури, так і потоку тепла на границі між газом і стінкою.

У [19] наведено дослідження нестационарного теплообміну в багатошаровій структурі. Запропоновано два методи визначення теплових властивостей багатошарових стін будівлі: за першим методом можна визначити теплові властивості кожного шару окремо, а за другим – розглядається еквівалентний одношаровий однорідний стан стіни.

Врахування наявності шаруватого покриття на поверхні теплопровідного тіла призводить до ускладнень при розв'язанні задач теплопровідності.

У працях [16, 22] запропоновано ефективні методики отримання розв'язків таких задач. У випадку стаціонарних задач теплопровідності можна використовувати аналітичні розв'язки, отримані в [22]. Крім того, в [15] запропоновано метод розрахунку стаціонарної теплопровідності з узагальненими граничними умовами, де теплообмін у твердих тілах визначається декількома видами граничних умов: коли задано температуру, тепловий потік або конвекцію. Також у статті досліджено взаємозв'язок між цими типами граничних умов при стаціонарному теплообміні. У випадку нестационарної теплопровідності використовують числові підходи скінченноелементного аналізу, інтегральних перетворень тощо [16].

У роботі [6] наведено формулу для прогнозування температурного градієнта у заповненому бетоном сталевому трубчастому елементі з довільним кутом нахилу. Шляхом поетапної регресії накопичених температурних і метеорологічних даних встановлено емпіричну формулу для прогнозування максимального добового перепаду температур елементів конструкції труби, заповненої бетоном.

В [11] наведено застосування узагальнених граничних умов для гомогенізації термофільтраційних властивостей ґрунтів, де довільні композити, в тому числі пористі багатофазні середовища, часто характеризуються високою варіабельністю фільтраційних і теплотехнічних властивостей компонентів. Тому розв'язання задач механіки таких середовищ у макроскопічному масштабі пов'язане з необхідністю об'ємного усереднення їхніх властивостей.

У багатьох випадках для розв'язання лінійних задач нестационарної теплопровідності використовують методи теорії функцій Гріна. Також застосовують методи теплових потенціалів, інтегральних перетворень та ін. [25]. Однак при застосуванні інтегрального перетворення Лапласа виникають труднощі, пов'язані із заданням початкових умов у вигляді функції від просторових координат.

Із наведеного аналізу наукових праць [3–24] випливає, що недостатньо опрацьованими є питання розв'язку задач теплопровідності для складених багатошарових тіл, які мають тонкі покриття на поверхнях і перебувають під дією неоднорідного нагріву. Тому виконання таких досліджень є актуальним, особливо для конструкцій з тонкими антикорозійними покриттями.

**1. Рівняння теплообміну на поверхні контакту частин тіла.** Тонкостінний конструктивний елемент на поверхні тривимірного тіла у випадку, коли один з його розмірів (товщина) є значно меншим від інших, часто моделюють тонкостінною оболонкою. Залежно від специфіки математичної моделі процесу теплопровідності виконують усереднення температури за товщиною тонкостінного елемента або приймають її лінійну чи поліноміальну залежність від координати. Таким чином, зменшується розмірність рівняння теплопровідності, що спрощує отримання його розв'язку аналітичним або чисельним способом. Часто розв'язування рівняння в оболонці розглядають для її серединної поверхні [1] або для поверхні контакту з теплопровідним тілом.

Стосовно методів отримання умов у вигляді рівнянь на поверхні поділу тіла тонким конструктивним елементом звернемось до робіт [1, 2]. Тонкий проміжний елемент будемо інтерпретувати як тонкостінну оболонку і рівняння теплопровідності у ній розглядатимемо у локальній системі криволинійних координат  $(\alpha, \beta)$  на серединній поверхні тонкостінної однорідної оболонки, що займає область  $\Omega_0$ . Координату в напрямку, перпендикулярному до серединної поверхні, позначимо через  $\gamma$ ,  $-\delta \leq \gamma \leq \delta$ .

Температурне поле  $t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$  тонкої оболонки визначимо з рівняння теплопровідності, записаного в змішаній системі координат  $(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$  у вигляді [1]

$$\lambda_0 \left( \Delta_0 t_0 + \frac{\partial^2 t_0}{\partial \gamma^2} \right) - c_0 \frac{\partial t_0}{\partial \tau} = 0, \quad (1)$$

де  $\Delta_0$  – оператор Лапласа в криволінійній системі координат  $(\alpha, \beta)$ ,  $c_0$  – теплоємність,  $\lambda_0$  – теплопровідність оболонки,  $\tau$  – час.

Позначивши

$$p^2 = \Delta_0 - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad (2)$$

де  $a_0 = \frac{c_0}{\lambda_0}$  – коефіцієнт температуропровідності, рівняння (1) можемо подати у компактному вигляді

$$p^2 t_0 + \frac{\partial^2 t_0}{\partial \gamma^2} = 0. \quad (3)$$

Для рівняння теплопровідності (1) або (3) запишемо граничні та початкові умови. Граничні умови потрібні як на поверхнях, так і на краях конструктивних елементів. Залежно від типу граничних умов отримаємо відповідний вигляд розв'язку рівняння.

Зауважимо, що тонкостінну оболонку  $\Omega_0$  віднесено до криволінійних координат  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , а тривимірне тіло надалі розглядаємо в декартовій системі координат  $(x, y, z)$ . Тому на їхній спільній поверхні використовуватимемо обидві системи координат.

Нехай оболонка  $\Omega_0$  контактує вздовж поверхні  $\gamma = \delta$  з теплопровідним тілом, яке в системі координат  $(x, y, z)$  займає область  $\Omega$  і має теплофізичні характеристики  $c$ ,  $\lambda$ ,  $a$  інші, ніж в оболонці. Через  $\partial\Omega_1$  позначимо частину межі області  $\Omega$ , на якій здійснюється контакт з тонкостінним елементом. Припустимо, що на цій межі виконуються умови ідеального теплового контакту:

- рівність температури  $t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$  тонкостінного елемента конструкції і температури  $t(x, y, z, \tau)$  на поверхні контакту  $\partial\Omega_1$ :

$$t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)|_{\gamma=\delta} = t(x, y, z, \tau)|_{\partial\Omega_1}, \quad (4)$$

- рівність потоків тепла у напрямку нормалі до  $\partial\Omega_1$ :

$$\lambda_0 \frac{\partial t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\delta} = \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1}. \quad (5)$$

Враховуючи умови (4), (5), температуру в рівнянні (3) можемо подати через температуру та її похідну за  $\gamma$  на границі  $\gamma = \delta$ , що відповідає частині  $\partial\Omega_1$  границі тіла:

$$\begin{aligned} t(x, y, z, \tau)|_{\partial\Omega_1} &= \cos p(\delta - \gamma) t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)|_{\gamma=\delta} - \\ &- \sin p(\delta - \gamma) \frac{1}{p} \frac{\partial t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=\delta} \end{aligned}$$

або, з огляду на формули (4), (5), –

$$\begin{aligned} t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)|_{\gamma=\delta} &= \cos p(\delta - \gamma) t(x, y, z, \tau)|_{\partial\Omega_1} - \\ &- \sin p(\delta - \gamma) \frac{1}{p} \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1}. \end{aligned} \quad (6)$$

Якщо на поверхні  $\partial\Omega_1$  маємо покриття, яке моделюємо тонкостінним елементом, що відповідає координаті  $\gamma = \delta$ , то на іншій його поверхні  $\gamma = -\delta$  також задамо умову, яку повинна задовольняти температура  $t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$ . Ця умова залежить від вхідних даних задачі теплопровідності: може бути задана температура, функція теплового потоку або умова конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем. Залежно від цього маємо одну з таких трьох граничних умов:

1°) Якщо задана температура:

$$t_0(\alpha, \beta, -\delta, \tau) = \vartheta_c(\alpha, \beta, \tau), \quad (7)$$

де функцію  $\vartheta_c(\alpha, \beta, \tau)$  вважаємо відомою, то підставивши вираз (6) для  $t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)$  у (7), отримаємо операторне рівняння

$$\cos 2p\delta t(x, y, z, \tau)|_{\partial\Omega_1} - \frac{1}{p} \sin 2p\delta \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = \vartheta_c(\alpha, \beta, \tau). \quad (8)$$

З огляду на те, що значення  $\delta$  є малим, розвинемо операторні функції  $\sin 2p\delta$  і  $\cos 2p\delta$  в ряди в околі нуля і обмежимося лінійною частиною цих розвинень. Якщо знехтувати доданками порядку  $O(\delta^2)$ , то при такому перетворенні формули (8) оператор  $p^2$  також відкидаємо, і формула (8) набуває вигляду

$$t(x, y, z, \tau)|_{\partial\Omega_1} - \frac{2\delta\lambda}{\lambda_0} \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = \vartheta_c(\alpha, \beta, \tau). \quad (9)$$

2°) Якщо на поверхні  $\gamma = -\delta$  задано тепловий потік:

$$-\lambda_0 \frac{\partial t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=-\delta} = q_0(\alpha, \beta, \tau),$$

де функцію  $q_0(\alpha, \beta, \tau)$  вважаємо відомою, то, як і в попередньому випадку, отримаємо операторне рівняння

$$p \sin 2p\delta t(x, y, z, \tau)|_{\partial\Omega_1} + \cos 2p\delta \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = -\frac{1}{\lambda_0} q_0(\alpha, \beta, \tau)$$

і, зважаючи на малість  $\delta$ , зведемо його до вигляду

$$\lambda_0 2\delta p^2 t(x, y, z, \tau)|_{\partial\Omega_1} + \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = -q_0(\alpha, \beta, \tau)$$

або, записавши  $p^2$  у вигляді диференціального оператора (2), отримаємо

$$\lambda_0 2\delta \left( \Delta_0 - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_1} + \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = -q_0(\alpha, \beta, \tau). \quad (10)$$

Рівняння (10) на поверхні  $\partial\Omega_0$  є рівнянням теплопровідності, що відповідає узагальненій граничній умові на границі області  $\Omega$ .

3°) Якщо на поверхні  $\gamma = -\delta$  задано конвективний теплообмін, тобто маємо граничну умову

$$-\lambda_0 \frac{\partial t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=-\delta} = \mu(\vartheta_c(\alpha, \beta, \tau) - t_0(\alpha, \beta, -\delta, \tau)), \quad (11)$$

де  $\vartheta_c(\alpha, \beta, \tau)$  і коефіцієнт теплообміну  $\mu$  є відомими, то виключивши  $t_0$  в умові (11), при  $\gamma = -\delta$  отримаємо

$$\begin{aligned}
& (\lambda_0 p \sin 2p\delta - \mu \cos 2p\delta) t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_1} + \\
& + \left( \cos 2p\delta + \frac{\mu}{\lambda_0} \sin 2p\delta \right) \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = -\mu \vartheta_c(\alpha, \beta, \tau). \quad (12)
\end{aligned}$$

Оскільки значення  $\delta$  є малим, обмежимося лінійними доданками розвинення  $\sin 2p\delta$  і  $\cos 2p\delta$  в ряди за  $\delta$  в околі нуля. У такому наближенні умова (12) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
& \lambda_0 2\delta p^2 t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_1} + \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda_0} 2\delta \right) \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} + \\
& + \mu (\vartheta_c(\alpha, \beta, \tau) - t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_1}) = 0
\end{aligned}$$

або

$$\begin{aligned}
& \lambda_0 2\delta \left( \Delta_0 - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_1} + \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda_0} 2\delta \right) \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} + \\
& + \mu (\vartheta_c(\alpha, \beta, \tau) - t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_1}) = 0. \quad (13)
\end{aligned}$$

Рівняння теплопровідності (13) доповнює умову теплообміну на поверхні  $\partial\Omega_1$  теплопровідністю вздовж цієї поверхні. У задачі теплопровідності для тіла, що займає область  $\Omega$ , його можна використати як умову на границі  $\partial\Omega_1$ , що наближено враховує тепловий контакт з тонкостінним елементом і опосередковано – теплообмін із зовнішнім середовищем. Умову (13) також називають узагальненою граничною умовою [2, 4]. Значення зведеної теплопровідності  $2\delta\lambda_0$  і теплового опору оболонки  $\frac{2\delta}{\lambda_0}$  все ж залишаються в

умовах, якщо при моделюванні товщина  $2\delta$  вважається нехтовно малою.

Подібно отримуємо умови теплового спряження частин тіла через тонке включення між ними. Поверхні включення, яке має малу товщину  $2\delta$ , позначимо через  $\partial\Omega_1$  і  $\partial\Omega_2$ . Подання температури прийемо у вигляді (6), яким враховуємо умови на границі  $\partial\Omega_1$ . На поверхні  $\partial\Omega_2$ , що відповідає  $\gamma = -\delta$ , також повинні виконуватись умови теплового контакту

$$t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau) \Big|_{\gamma=-\delta} = t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_2} \quad \text{або} \quad t_0 \Big|_{\gamma=-\delta} = t \Big|_{\partial\Omega_2}, \quad (14)$$

$$\lambda_0 \frac{\partial t_0(\alpha, \beta, \gamma, \tau)}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=-\delta} = \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2} \quad \text{або} \quad \lambda_0 \frac{\partial t_0}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=-\delta} = \lambda \frac{\partial t}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2}. \quad (15)$$

Умови (14), (15) після підстановки  $t_0(\alpha, \beta, -\delta, \tau)$  запишемо відповідно як

$$\begin{aligned}
& \cos 2p\delta t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_1} - \frac{1}{p} \frac{\lambda}{\lambda_0} \sin 2p\delta \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_2}, \\
& \lambda_0 p \sin 2p\delta t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_1} + \lambda \cos 2p\delta \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2}
\end{aligned}$$

або, знехтувавши величинами порядку  $O(\delta^2)$ , як

$$t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_1} - 2\delta \frac{\lambda}{\lambda_0} \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_2}, \quad (16')$$

$$2\delta\lambda_0 p^2 t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_1} + \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2}. \quad (16'')$$

Таким чином, температура і тепловий потік з обох сторін включення відрізняються на величини порядку  $\delta$ .

З огляду на позначення (2) оператора  $p^2$  умова (16'') має вигляд диференціального рівняння теплопровідності

$$2\delta\lambda_0 \left( \Delta_0 - \frac{1}{a_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \right) t(x, y, z, \tau) \Big|_{\partial\Omega_1} + \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_1} = \lambda \frac{\partial t(x, y, z, \tau)}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega_2}, \quad (17)$$

що відповідає неідеальному тепловому контакту між частинами теплопровідного тіла. Для складеного тіла рівняння (17) можна використати як умову на межі поділу.

Якщо температуру подати замість формули (6) через усереднені за товщиною оболонки температурні моменти [1]

$$t_0 = p\delta \frac{\cos p\gamma}{\sin p\delta} T_1 + \frac{1}{3} \frac{p^2 \delta^2 \sin p\gamma}{\sin p\delta - p\delta \cos p\delta} T_2, \\ T_1 = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} t_0 d\gamma, \quad T_2 = \frac{3}{2\delta^2} \int_{-\delta}^{\delta} t_0 \gamma d\gamma, \quad (18)$$

то, використовуючи (4)–(6), отримаємо такі самі умови (9), (10), (13), (17) залежно від умов на зовнішній границі. Для розподілу температури за товщиною тонкостінного елемента, розвинувши рівність (18) у ряд і відкинувши доданки порядку малості  $O(\delta^3)$ , отримаємо квадратичну за  $\gamma$  функцію:

$$t_0 = T_1 - \frac{\gamma^2}{2} p^2 T_1 + \frac{\gamma}{\delta} T_2 - \frac{\gamma^2}{6} p^2 T_2, \quad (19)$$

де  $-\delta \leq \gamma \leq \delta$ . Для спрощення запису в (19) опущено аргументи  $(\alpha, \beta, \delta, \tau)$ .

Приймемо [1], що при малих  $\delta$  лінійне наближення за  $\gamma$

$$t_0 = T_1 + \frac{\gamma}{\delta} T_2 \quad (20)$$

добре описує зміну температури вздовж товщини тонкостінного елемента. Потрібно знайти функції  $T_1$  і  $T_2$ , які на серединній поверхні тонкостінного елемента залежать від координат  $\alpha$ ,  $\beta$  і часу  $\tau$ . Якщо ці функції повільно змінюються за просторовими координатами, то значення  $t_0$ , отримані за формулами (19) і (20), практично збігаються. Зауважимо також, що у випадку однорідного розподілу температури за  $\alpha$ ,  $\beta$  і лінійної залежності температури вздовж товщини  $\gamma$  тонкостінного елемента отримуємо стрибок температури між його поверхнями і неперервність теплового потоку, тобто можемо використовувати умови неідеального теплового контакту через тонкостінне включення [7].

У цій роботі для ілюстрації отримаємо розв'язок задачі теплопровідності у півсмузі з умовою (13) на границі. Узагальнену умову вигляду (13) для задачі у півпросторі за умов конвективного теплообміну на поверхні використано також у роботі [9].

**2. Задача теплопровідності для півсмуги при неоднорідному її нагріванні.** Розглянемо нагрівання тіла, що займає область  $\Omega = \{0 \leq x \leq L, -\infty < y < \infty, 0 \leq z < \infty\}$ , з поверхні  $z = 0$  якого здійснюється теплообмін через

тонке плоске покриття. Граничну умову при  $z = 0$  приймаємо у вигляді (13). Оскільки кривизна покриття відсутня, координати  $\alpha$ ,  $\beta$  на поверхні  $z = 0$  співпадають з координатами  $x$ ,  $y$ . Поверхні тіла  $x = 0$  та  $x = L$  вважаємо теплоізолюваними.

Приймемо, що в умові теплообміну (13) при  $z = 0$  температура зовнішнього середовища  $\vartheta_c$  залежить лише від  $x$  і не залежить від  $y$  і  $\tau$ . Початкову температуру тіла при  $\tau = 0$  приймаємо рівною нулеві.

Оскільки температура не залежить від координати  $y$ , то рівняння теплопровідності для  $t(x, z, \tau)$  матиме вигляд

$$\frac{\partial^2 t(x, z, \tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t(x, z, \tau)}{\partial z^2} - \frac{1}{a} \frac{\partial t(x, z, \tau)}{\partial \tau} = 0, \quad 0 < x < L, \quad 0 < z < \infty, \quad \tau > 0, \quad (21)$$

де  $a = \text{const}$  – коефіцієнт температуропровідності півсмуги.

Узагальнена гранична умова теплообміну (13) набуває вигляду

$$\lambda_0 2\delta \frac{\partial^2 t(x, z, \tau)}{\partial x^2} - \frac{\lambda_0 2\delta}{a_0} \frac{\partial t(x, z, \tau)}{\partial \tau} + (1 + r_0 \mu) \lambda \frac{\partial t(x, z, \tau)}{\partial z} + \mu(\vartheta_c(x) - t(x, z, \tau)) = 0. \quad (22)$$

Поверхні  $x = 0$  і  $x = L$  є теплоізолювані, тобто

$$\left. \frac{\partial t(x, z, \tau)}{\partial x} \right|_{x=0, L} = 0, \quad (23)$$

а при великих  $z$  тепловий потік згасає:

$$\left. \frac{\partial t(x, z, \tau)}{\partial z} \right|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (24)$$

У початковий момент часу  $\tau = 0$  температура дорівнює нулеві:

$$t(x, z, 0) = 0. \quad (25)$$

Потрібно знайти функцію  $t(x, z, \tau)$  з розв'язку відповідної задачі теплопровідності (21)–(25).

Задамо функцію  $\vartheta_c(x)$  на поверхні  $z = 0$  у вигляді скінченного ряду

$$\vartheta_c(x) = t_0 + \sum_{m=1}^M t_m \cos\left(\frac{\omega_m x}{L}\right), \quad (26)$$

де  $t_m$  – задані значення, а  $\omega_m$  – добуток  $\pi$  на ціле число, залежне від  $m$ .

Тоді шукану функцію температури  $t(x, z, \tau)$  можемо подати у вигляді

$$t(x, z, \tau) = \Theta_0(z, \tau) + \sum_{m=1}^M \Theta_m(z, \tau) \cos\left(\frac{\omega_m x}{L}\right). \quad (27)$$

При цьому умови (23) на поверхнях  $x = 0$  та  $x = L$  є виконані.

Підставимо (27) у рівняння (21), граничні і початкові умови задачі теплопровідності. Для визначення кожної із функцій  $\Theta_m(z, \tau)$ ,  $m = 1, \dots, M$ , отримаємо такі задачі математичної фізики :

$$\frac{\partial^2 \Theta_m}{\partial z^2} - \left(\frac{\omega_m}{L}\right)^2 \Theta_m - \frac{1}{a} \frac{\partial \Theta_m}{\partial \tau} = 0, \quad 0 < z < \infty, \quad \tau > 0, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_0 2\delta \left( \frac{1}{a_0} \frac{\partial \Theta_m}{\partial \tau} + \left(\frac{\omega_m}{L}\right)^2 \Theta_m \right) + (1 + r_0 \mu) \lambda \frac{\partial \Theta_m}{\partial z} + \\ + \mu(t_m - \Theta_m) = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{\partial \Theta_m}{\partial z} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty, \quad (30)$$

$$\Theta_m = 0 \quad \text{при} \quad \tau = 0. \quad (31)$$

Для визначення  $\Theta_0$  при  $m = 0$  приймаємо, що  $\omega_0 = 0$ .

Щоб знайти функції  $\Theta_m(z, \tau)$ ,  $m = 1, \dots, M$ , до (28)–(31) застосуємо інтегральне перетворення Лапласа за часом. З перетворених рівнянь знайдемо функції  $\tilde{\Theta}_m(z, s)$  (перетворення Лапласа функцій  $\Theta_m(z, \tau)$ ). Обернене перетворення функцій  $\tilde{\Theta}_m(z, s)$  є аналітичним розв'язком задачі (28)–(31):

$$\begin{aligned} \Theta_m(z, \tau) = & \frac{t_m a_0 \mu}{2\delta \lambda_0 (x_1 - x_2)} \left[ \sum_{i=1}^2 \frac{(-1)^{i-1} x_i}{x_i^2 - \varpi_m^2} \exp\left(-x_i \frac{z}{\sqrt{a}} + x_i^2 \tau - \varpi_m^2 \tau\right) \times \right. \\ & \times \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}} - x_i \sqrt{\tau}\right) + \frac{x_1 - x_2}{2(x_1 + (-1)^{i-1} \varpi_m)(x_2 + (-1)^{i-1} \varpi_m)} \times \\ & \left. \times \exp\left((-1)^{i-1} \varpi_m \frac{z}{\sqrt{a}}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{a\tau}} + (-1)^{i-1} \varpi_m \sqrt{\tau}\right) \right], \\ & m = 1, 2, \dots, M. \end{aligned} \quad (32)$$

Тут  $\varpi_m = \sqrt{a} \omega_m / L$ , а  $x_{1,2}$  – корені квадратного рівняння  $x^2 + bx + c_m = 0$  з коефіцієнтами  $b = \frac{\lambda}{2\delta} \frac{a_0}{\sqrt{a}} (1 + r_0 \mu)$ ,  $c_m = \varpi_m^2 \left(\frac{a_0}{a} - 1\right) + \frac{a_0}{2\delta} \mu$ ,  $r_0 = \frac{2\delta}{\lambda_0}$ .

Для числових досліджень формулу (32) запишемо через безрозмірні параметри  $A_0 = \frac{a_0}{a}$ ,  $\Lambda_0 = \frac{\lambda_0}{\lambda}$ ,  $\delta_L = \frac{2\delta}{L}$ ,  $\text{Bi} = \frac{2\delta\mu}{\lambda_0}$ ,  $\text{Fo} = \frac{a\tau}{L^2}$ ,  $\varepsilon_i = x_i \frac{L}{\sqrt{a_0}}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $\zeta = \frac{z}{L}$ , де  $L$  – масштабний відрізок відстані. Тоді

$$t(\xi, \zeta, \text{Fo}) = \Theta_0(\zeta, \text{Fo}) + \sum_{m=1}^M \Theta_m(\zeta, \text{Fo}) \cos\left(\frac{\omega_m \xi}{L}\right), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_m(\zeta, \text{Fo})}{t_m} = & \frac{\text{Bi}}{\delta_L^2} \sum_{i=1}^2 \left[ \frac{(-1)^{i-1} \varepsilon_i}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \frac{1}{(\varepsilon_i^2 - \omega_m^2 / A_0)} \exp\left(-\varepsilon_i \sqrt{A_0} \zeta + \right. \right. \\ & \left. \left. + (A_0 \varepsilon_i^2 - \omega_m^2) \text{Fo}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\text{Fo}}} - \varepsilon_i \sqrt{A_0} \text{Fo}\right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2\left(\varepsilon_1 + (-1)^{i-1} \omega_m / \sqrt{A_0}\right)\left(\varepsilon_2 + (-1)^{i-1} \omega_m / \sqrt{A_0}\right)} \times \right. \\ & \left. \times \exp\left((-1)^{i-1} \omega_m \zeta\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\zeta}{2\sqrt{\text{Fo}}} + (-1)^{i-1} \omega_m \sqrt{\text{Fo}}\right) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

У стаціонарному випадку маємо

$$\begin{aligned} t(\xi, \zeta) = & t_0 + \sum_{m=1}^M t_m \frac{\text{Bi}}{\delta_L^2 \omega_m^2 + \frac{\delta_L}{\Lambda_0} \omega_m (1 + \text{Bi}) + \text{Bi}} \exp(-\omega_m \zeta) \cos(\omega_m \xi), \\ & 0 < \xi < 1, \quad \zeta > 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\Theta_m(\zeta) = t_m \frac{\text{Bi}}{\delta_L^2 \omega_m^2 + \frac{\delta_L}{\Lambda_0} \omega_m (1 + \text{Bi}) + \text{Bi}} \exp(-\omega_m \zeta), \quad \zeta > 0, \quad (36)$$

За формулами (33)–(36) обчислимо зміну температури в часі та її розподіл за координатами для різних співвідношень параметрів і характеристик компонент складеної системи.

**3. Числові розрахунки.** Для дослідження залежності температури від співвідношень між характеристиками і параметрами тіла і поверхні  $\zeta = 0$  з покриттям використовуємо формули (33)–(36).

У тестових обчисленнях прийнемо, що  $\vartheta_c(\xi)$  змінюється у межах  $0 < \vartheta_c(\xi) < 1$  і задається стрибкоподібною функцією

$$\vartheta_c(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < 0.25, \\ 1, & 0.25 < \xi < 0.75, \\ 0, & 0.75 < \xi < 1. \end{cases}$$

При цьому у формулі (26) для  $\vartheta_c(\xi) = t_0 + \sum_{m=1}^M t_m \cos \omega_m \xi$  маємо

$$t_m = \begin{cases} 0.5, & m = 0, \\ \frac{(-1)^m}{\omega_m}, & m = 1, \dots, M, \end{cases} \quad \omega_m = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ 2\pi(2m - 1), & m = 1, \dots, M. \end{cases}$$

Виконаємо обчислення температури на поверхні  $\zeta = 0$  для різних значень безрозмірного параметра  $\text{Fo} = \frac{a\tau}{L^2} > 0$ . Прийнемо  $A_0 = 34.722$ ,  $\Lambda_0 = 77.5$ ,  $\delta_L = 0.02$ ,  $\text{Bi} = 7.011 \cdot 10^{-3}$ , що відповідає значенням  $\delta = 0.001$  м,  $L = 0.1$  м,  $\lambda = 0.6$  Вт/(м · К),  $\lambda_0 = 46.5$  Вт/(м · К),  $a = 3.6 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с,  $a_0 = 1.25 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с,  $\mu = 163$  Вт/(м<sup>2</sup> · К).

На рис. 1 показано залежність від  $\xi$  температури на поверхні тіла  $\zeta = 0$  для значень  $\text{Fo} = 0.00005, 0.0005, 0.002, 0.01$  в інтервалі  $[0.00005, 0.01]$ .

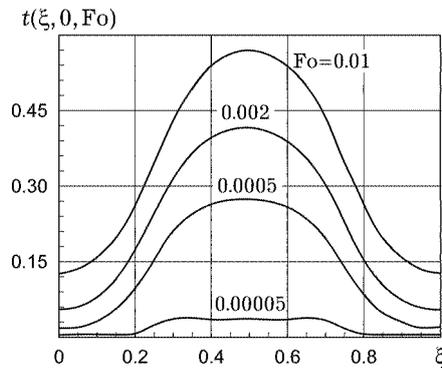


Рис. 1. Розподіл температури на поверхні тіла для вибраних значень змінної  $\text{Fo}$ .

Зміну температури на поверхні тіла при  $\delta_L = 0.02$ ,  $\Lambda_0 = 10$ ,  $\text{Bi} = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\text{Fo} = 0.002$  для різних значень відношення коефіцієнтів теплопровідності  $A_0 = \frac{a_0}{a}$  наведено на рис. 2а (для  $A_0 = 0.2, 0.5, 1.0, 2.0$ ) і на рис. 2б (для  $A_0 = 5.0, 10.0, 20.0, 30.0$ ).

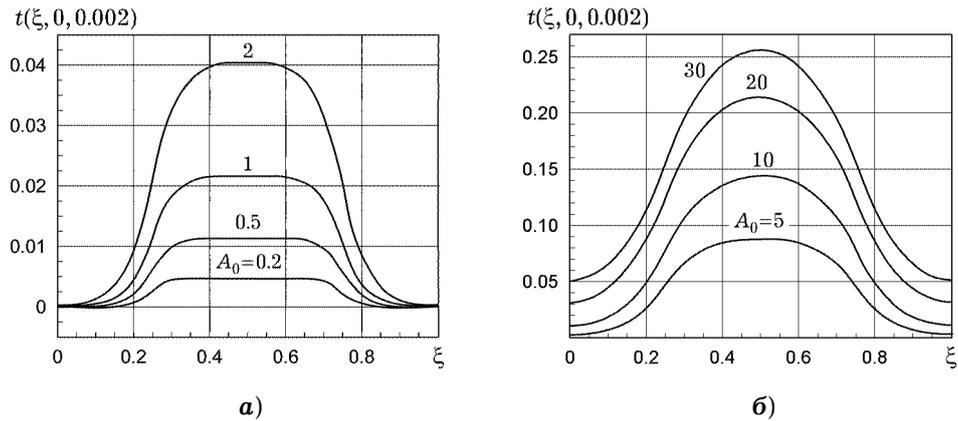


Рис. 2. Розподіл температури на поверхні тіла для деяких значень  $A_0$ .

Якщо  $a_0 < a$ ,  $A_0 = \frac{a_0}{a} < 1$ , тобто температуропровідність тонкого покриття є меншою, ніж температуропровідність тіла, то відбувається теплообмін на поверхні і менше тепла проникає через покриття, тобто маємо ефект теплоізоляції. Якщо  $a_0 > a$ ,  $A_0 = \frac{a_0}{a} > 1$ , тобто температуропровідність тонкого покриття є більшою, ніж температуропровідність тіла, тоді тепло поширюється вздовж поверхні і проникає всередину тіла.

Стационарний розподіл температури на поверхні  $\zeta = 0$  для різних значень  $\Lambda_0$  показано на рис. 3а ( $\Lambda_0 = 0.005, 0.01, 0.02, 0.03$ ) і рис. 3б ( $\Lambda_0 = 0.5, 1.0, 2.0, 3.0$ ). Обчислення за формулами (35), (36) виконано при значеннях інших безрозмірних параметрів  $A_0 = 0.5$ ,  $\delta_L = 0.02$ ,  $Bi = 5 \cdot 10^{-3}$ .

При зміні  $\Lambda_0$  в діапазоні  $[0.005, 0.03]$  температура незначно відрізняється (рис. 3а), а при збільшенні  $\Lambda_0$  ця зміна є відчутною (рис. 3б).

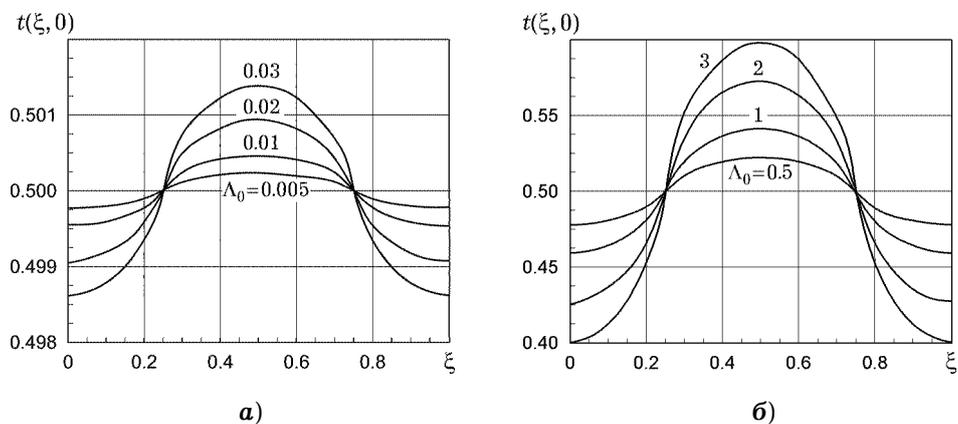


Рис. 3. Розподіл температури на поверхні тіла для деяких значень  $\Lambda_0$ .

На рис. 4 показано зміну потоку тепла  $q_x(\xi, 0)$  на поверхні  $\zeta = 0$  у стаціонарному випадку, якщо  $A_0 = 0.5$ ,  $\delta_L = \frac{2\delta}{L} = 0.02$ ,  $Bi = 5 \cdot 10^{-3}$ , а  $\Lambda_0 = 5, 20, 30, 77.5$ .

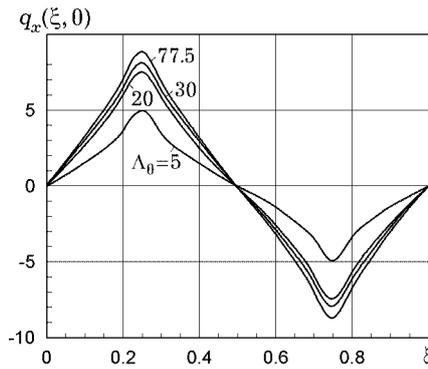


Рис. 4. Тепловий потік  $q_x$  уздовж поверхні  $\zeta = 0$  для деяких значень  $\Lambda_0$ .

Хоча  $\vartheta_c(\xi)$  – стрибкоподібна функція на поверхні, проте ефект наявності покриття приводить до згладжування функції теплового потоку, тому узагальнені дельта-функції тут відсутні.

На рис. 5 показано потік  $q_z(\xi, \zeta)$  на різних відстанях  $\zeta = 0, 0.1, 0.2, 0.3$  від поверхні при  $\zeta = 0$  для стаціонарного розв’язку при  $A_0 = 0.5$ ,  $\Lambda_0 = 0.03$ ,  $\delta_L = 0.02$ ,  $Bi = 5 \cdot 10^{-3}$ . Потік тепла зменшується з віддаленням від поверхні, оскільки відбувається його перерозподіл з поверненням тепла у зовнішнє середовище.

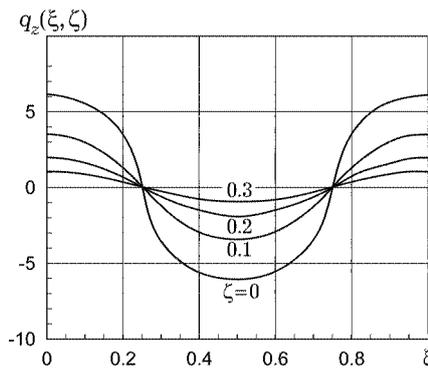


Рис. 5. Тепловий потік  $q_z$  на різних відстанях  $\zeta$  від поверхні  $\zeta = 0$ .

**Висновки.** Наведені в статті узагальнені граничні і контактні умови дають змогу ефективно враховувати наявність тонкого покриття на поверхні тіла або включення всередині. Отриманий аналітичний розв’язок задачі теплопровідності для півсмуги дає можливість детально проаналізувати температурне поле і потоки тепла в тілі та на його поверхні, якщо теплообмін з навколишнім середовищем здійснюється через тонке покриття. Спостерігається, що за неоднорідних умов на поверхні здійснюється перерозподіл тепла в тілі з поверненням його у навколишнє середовище.

1. Підстригач Я. С. Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
2. Шевчук В. А. До побудови узагальнених граничних умов конвективного теплообміну тіл із середовищем через тонкі неплоскі покриття // Доп. НАН України. – 2011. – № 7. – С. 76–82.
3. Шевчук В. А. Дослідження термонапруженого стану півпростору з багатшаровим покриттям за циклічного конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – 65, № 3-4. – С. 136–145. – <https://doi.org/10.15407/mmpmf2022.65.3-4.136-145>.

4. Шевчук В. А. Узагальнені граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через багат шарові неплоскі покриття // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 2. – С. 82–97.  
 The same: *Shevchuk V. A. Generalized boundary conditions of radiant-convection heat exchange of bodies with ambient medium through multilayer nonplanar coatings* // *J. Math. Sci.* – 2022. – **261**, No. 1. – P. 95–114.  
 – <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05741-y>.
5. *Belhocine A., Abdullah O. I.* Similarity and numerical analysis of the generalized Lèvêque problem to predict the thermal boundary layer // *Int. J. Interact. Des. Manuf. (IJIDeM).* – 2018. – **12**, No. 3. – P. 1015–1025.  
 – <https://doi.org/10.1007/s12008-017-0434-8>.
6. *Cole K. D., de Monte F., McMasters R. L., Woodbury K. A., Haji-Sheikh A., Beck J. V.* Steady heat conduction with generalized boundary conditions // *Proc. of the ASME-2016: Int. Mech. Eng. Congr. and Expos. (IMECE-2016).* – 2016. – Vol. 5. – Paper No: IMECE2016-66605, V005T06A021. – 10 p.  
 – <https://doi.org/10.1115/IMECE2016-66605>.
7. *Gera B. V., Dmytruk V. A.* Obtaining and investigation of the conditions of heat transfer through inhomogeneous inclusion with heat sources // *Math. Model. Comput.* – 2015. – **2**, No. 1. – P. 33–47.  
 – <https://doi.org/10.23939/mmc2015.01.033>.
8. *Gera B., Kovalchuk V.* A study of the effects of climatic temperature changes on the corrugated structure of a culvert of a transportation facility // *East.-Europ. J. Enterpr. Technol.* – 2019. – **3**, No. 7(99). – P. 26–35.  
 – <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2019.168260>.
9. *Gera B., Kovalchuk V., Dmytruk V.* Temperature field of metal structures of transport facilities with a thin protective coating // *Math. Model. Comput.* – 2022. – **9**, No. 4. – P. 950–958. – <https://doi.org/10.23939/mmc2022.04.950>.
10. *Jbeili M., Zhang J.* The generalized periodic boundary condition for microscopic simulations of heat transfer in heterogeneous materials // *Int. J. Heat Mass Transfer.* – 2021. – **173**. – Art. 121200.  
 – <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121200>.
11. *Liu J., Liu Y., Zhang G., Jiang L., Yan X.* Prediction formula for temperature gradient of concrete-filled steel tubular member with an arbitrary inclination // *J. Bridge Eng.* – 2020. – **25**, No. 10.  
 – [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)BE.1943-5592.0001599](https://doi.org/10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0001599).
12. *Kovalchuk V., Hnativ Yu., Luchko J., Sysyn M.* Study of the temperature field and the thermo-elastic state of the multilayer soil-steel structure // *Roads and Bridges.* – 2020. – **19**, No. 1. – P. 65–78. – <https://doi.org/10.7409/rabd.020.004>.
13. *Kovalchuk V., Onyshchenko A., Fedorenko O., Habrel M., Parneta B., Voznyak O., Markul R., Parneta M., Rybak R.* A comprehensive procedure for estimating the stressed-strained state of a reinforced concrete bridge under the action of variable environmental temperatures // *East.-Europ. J. Enterpr. Technol.* – 2021. – **2**, No. 7 (110). – P. 23–30. – <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.228960>.
14. *Kovalchuk V., Sobolevska Yu., Onyshchenko A., Fedorenko O., Tokin O., Pavliv A., Kravets I., Lesiv J.* Procedure for determining the thermoelastic state of a reinforced concrete bridge beam strengthened with methyl methacrylate // *East.-Europ. J. Enterpr. Technol.* – 2021. – **4**, No. 7(112). – P. 26–33.  
 – <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.238440>.
15. *Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S. J., Bajkowski A. S.* Semi-analytical solution of three-dimensional thermoelastic problem for half-space with gradient coating // *J. Therm. Stresses.* – 2018. – **41**, No. 9. – P. 1169–1181.  
 – <https://doi.org/10.1080/01495739.2018.1460227>.
16. *Kulchytsky-Zhyhailo R., Matysiak S. J., Perkowski D. M.* On the quasi-stationary problem of heat conduction for a homogeneous half-space with composite coating // *Acta Mech.* – 2020. – **231**, No. 3. – P. 1241–1251.  
 – <https://doi.org/10.1007/s00707-019-02591-9>.
17. *Musii R. S., Zhydyk U. V., Mokryk O. Ya., Melnyk N. B.* Functionally gradient isotropic cylindrical shell locally heated by heat sources // *Math. Model. Comput.* – 2019. – **6**, No. 2. – P. 367–373. – <https://doi.org/10.23939/mmc2019.02.367>.
18. *Mussa F. I., Abid S. R., Tayyi N.* Design temperatures for composite concrete-steel girders: a-verification of the finite element model // *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.* – 2021. – **1090**, No. 1. – Art. 012108.  
 – <https://doi.org/10.1088/1757-899X/1090/1/012108>.

19. Nicolas X., Chénier E., Lauriat G. Thermal boundary conditions for convective heat transfer of dilute gases in slip flow regime // *Int. J. Therm. Sci.* – 2019. – **135**. – P. 298–301. – <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2018.09.016>.
20. Peng G., Nakamura S., Zhu X., Wu Q., Wang H. An experimental and numerical study on temperature gradient and thermal stress of CFST truss girders under solar radiation // *Comput. Concrete.* – 2017. – **20**, No. 5. – P. 605–616. – <https://doi.org/10.12989/cac.2017.20.5.605>.
21. Perkowski D. M. On axisymmetric heat conduction problem for FGM layer on homogeneous substrate // *Int. Commun. Heat Mass Transf.* – 2014. – **57**. – P. 157–162. – <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2014.07.021>.
22. Sassine E., Cherif Y., Antczak E., Dgheim J. An efficient and simple method for investigating dynamic heat transfer in multilayered building components // *Int. J. Mason. Res. Innov.* – 2022. – **7**, No. 3. – P. 281–309. – <https://doi.org/10.1504/IJMRI.2022.122522>.
23. Sokolovskyy Ya. I., Levkovych M. V., Sokolovskyy I. Ya. The study of heat transfer and stress-strain state of a material, taking into account its fractal structure // *Math. Model. Comput.* – 2020. – **7**, No. 2. – P. 400–409. – <https://doi.org/10.23939/mmc2020.02.400>.
24. Wang G., Zhou X., Ding Y., Liu X. Long-term monitoring of temperature differences in a steel truss bridge with two-layer decks compared with bridge codes: Case study // *J. Bridge Eng.* – 2021. – **26**, No. 3. – Art. 05020013. – [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)BE.1943-5592.0001681](https://doi.org/10.1061/(ASCE)BE.1943-5592.0001681).
25. Wojciechowski M. Application of generalized boundary conditions for homogenization of thermal and filtration properties of soils // *Studia Geotechnica et Mechanica.* – 2023. – **45**, No. S1. – P. 362–369. – <https://doi.org/10.2478/sgem-2023-0025>.
26. Yan Y., Wu D., Li Q. A three-dimensional method for the simulation of temperature fields induced by solar radiation // *Adv. Struct. Eng.* – 2019. – **22**, No. 3. – P. 567–580. – <https://doi.org/10.1177/1369433218795254>.

#### A HEAT-CONDUCTION PROBLEM FOR A COMPOSITE BODY WITH ELEMENTS OF DIFFERENT DIMENSIONS

*The thermal interaction of the bodies with thin elements having dissimilar thermo-physical properties is investigated. A heat-conduction problem for a half-strip with a thin coating on the surface is formulated with the use of generalized boundary conditions that approximately take into account the heat exchange with the surrounding medium through the coating. With the use of the integral Laplace transform, a solution to this problem is obtained in a closed form, and the transition to its dimensionless form, as well as for the stationary case, is carried out. Calculations and analysis of the temperature in the area of the body and on its surface are carried out for some ratios between the values of the parameters and characteristics of the body and the surface coating.*

**Key words:** *heat exchange, thin inclusion, thin surface coating, generalized thermal boundary conditions.*

<sup>1</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

<sup>2</sup> Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів