УДК 517.984.54

І. Д. Пукальський, Б. О. Яшан

ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ ДЛЯ $2b$-ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ВИРОДЖЕННЯМ

Для параболічного рівняння порядку $2b$ розглянуто задачу з імпульсною дією. Коефіцієнти рівняння мають степеневі особливості довільного порядку за часовою і просторовими змінними на деякій множині точок. Знайдено оцінки розв'язку поставленої задачі та його похідних в гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги визначається через величини порядків степеневих особливостей і вироджень коефіцієнтів $2b$-параболічного рівняння.

Ключові слова: *степеневі особливості, імпульсний вплив, інтерполяційні нерівності, апріорні оцінки, гельдерові простори, теорема Арцела, борелівська міра, теорема Рісса.*

Вступ. Задачі з імпульсною дією для диференціальних рівнянь є тим математичним апаратом, за допомогою якого вдалося описати чимало нових ефектів та явищ у багатьох прикладних задачах. Дослідження задач теорії ядерних реакторів, динамічних систем приводять до розв'язання задач для диференціальних рівнянь з імпульсною дією. Імпульсні системи виникають також в багатьох задачах природознавства, при вивченні яких математичні моделі містять умови, що описують вплив зовнішніх сил імпульсної природи. Всебічне вивчення розв'язків систем звичайних диференціальних рівнянь з імпульсною дією наведено у монографії [8]. Існування періодичних розв'язків рівнянь гіперболічного типу з імпульсною дією встановлено у роботі [2]. Класичним розв'язкам крайових задач з імпульсною дією для параболічних рівнянь другого порядку, коефіцієнти яких мають степеневі особливості за просторовими змінними, присвячено праці [3, 7]. Умови коректної розв'язності задач для параболічних за Шиловим рівнянь з неперервними коефіцієнтами та імпульсною дією встановлено у [13]. У роботі [12] досліджується нульова наближена керованість вироджених сингулярних параболічних рівнянь під дією імпульсного керування.

У монографії [5] досліджено класичні розв'язки задачі Коші і задачі з імпульсною дією для параболічних задач з інтегральними операторами і ваговими крайовими умовами. Задачі Коші і крайові задачі для $2b$-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок розв'язано в [4, 6]. Дослідженню крайових задач з розривними умовами рівняння змішаного гіперболічно-параболічного типу з виродженням порядку в області гіперболічності присвячено праці [10, 11].

У цій статті розглянемо задачу з імпульсною дією для $2b$-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок. У гельдерових просторах зі степеневою вагою одержано оцінки розв'язку сформульованої задачі.

1. Постановка задачі і основний результат. Нехай η, t_0, t_1, $\ldots$, t_{N+1} – фіксовані числа такі, що $0 \le t_0 < t_1 < \ldots < t_{N+1}$, $\eta \in (t_0, t_{N+1})$, $\eta \ne t_\lambda$, $\lambda \in \{1, \ldots, N\}$, Ω – обмежена область, $\dim \Omega \le n-1$, $D = \{(t,x) \mid t \in [t_0, t_{N+1})$, $x \in \bar{\Omega}\} \cup \{(t,x) \mid t = \eta, x \in \mathbb{R}^n\}$.

Розглянемо в області $\Pi = [t_0, t_{N+1}) \times \mathbb{R}^n$ задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $(t,x) \in \Pi \backslash D$, $t \ne t_\lambda$, задовольняє рівняння

$$(Lu) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\le 2b-1} A_p(t,x)\partial_x^p\right]u(t,x) = f(t,x) \tag{1}$$

і умови за змінною t:

$$u(t_0+0,x) = \varphi_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(t_\lambda+0,x) - u(t_\lambda-0,x) = b_\lambda(x)u(t_\lambda-0,x) + \varphi_\lambda(x),$$
$$x \in \big((\Pi\setminus D)\bigcap (t=t_\lambda)\big), \tag{3}$$

де

$$\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}, \qquad |k| = k_1+\ldots+k_n.$$

Степеневі особливості коефіцієнтів диференціального виразу L у точці $P(t,x)\in\Pi\setminus D$ характеризуватимуть функції $s_1(\beta_i^{(1)},t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)},x)$:

$$s_1(\beta_i^{(1)},t) = \begin{cases}|t-\eta|^{\beta_i^{(1)}}, & |t-\eta|\le 1,\\ 1, & |t-\eta|>1,\end{cases} \qquad s_2(\beta_i^{(2)},x) = \begin{cases}\rho^{\beta_i^{(2)}}(x), & \rho(x)\le 1,\\ 1, & \rho(x)>1,\end{cases}$$

$\rho(x) = \inf\limits_{z\in\Omega}|x-z|$, $\beta_i^{(\nu)}\in(-\infty,\infty)$, $i\in\{1,\ldots,n\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)},\ldots,\beta_n^{(\nu)})$, $\nu\in\{1,2\}$.

Позначимо: $\Pi^{(r)} = [t_r,t_{r+1})\times\mathbb{R}^n$, $r\in\{0,1,\ldots,N\}$, $q^{(\nu)}$, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_{p_i}^{(\nu)}$, $\mu_0^{(\nu)}$ – дійсні невід’ємні числа, $[\ell]$ – ціла частина числа ℓ, $\ell>0$, $\{\ell\} = \ell-[\ell]$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(1)})$, $H_i(t^{(1)},x^{(2)})$ – довільні точки із Π, $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_{i-1}^{(1)},x_i^{(2)},x_{i+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $\beta = (\beta^{(1)},\beta^{(2)})$, Q_r – довільна замкнена область, $\bar{Q}_r\subset\Pi^{(r)}$.

Означимо простори, в яких вивчаємо задачу (1)–(3).

$C^\ell(\gamma;\beta;q;\Pi)$ – множина функцій $u:(t,x)\in\Pi$, які мають неперервні частинні похідні в області $Q_r\setminus D$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $2bj+|k|\le[\ell]$, для яких є скінченною норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_\ell = \sup_r\left\|u;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_\ell =$$
$$= \sup_r\left(\sum_{2bj+|k|\le[\ell]}\left\|u;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{2bj+|k|} + \left\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\rangle_\ell\right),$$

де, наприклад,

$$\left\|u;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\|_0 = \sup_{P\in\bar{Q}_r}|u(P)| \equiv \left\|u;\Pi^{(r)}\right\|_0,$$

$$\left\|u;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{2bj+|k|} = \sup_{P\in\bar{Q}_r} S(q;s_1,s_2;2bj+|k|;t,x)\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P)\right|,$$

$$\left\langle u;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\rangle_\ell = \sum_{2bj+|k|=[\ell]}\left\{\sum_{i=1}^n\sup_{(P_1,H_i)\subset\bar{Q}_r}\Big[S(q;s_1,s_2;[\ell];t^{(1)},\tilde{x})\times\right.$$
$$\times s_1\big(\{\ell\}(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(1)}\big)s_2\big(\{\ell\}(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\tilde{x}\big)\times$$
$$\times\left|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}\right|^{-\{\ell\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u(H_i)\right|\Big]+$$
$$+\sup_{(P_1,P_2)\subset\bar{Q}_r}\Big[S(q;s_1,s_2;[\ell];\tilde{t},x^{(1)})s_1\big(\{\ell\}\gamma^{(1)},\tilde{t}\big)s_2\big(\{\ell\}\gamma^{(2)},x^{(1)}\big)\times$$
$$\left.\times\left|t^{(1)}-t^{(2)}\right|^{-\{\ell/2b\}}\left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_1)-\partial_t^j\partial_x^k u(P_2)\right|\Big]\right\}.$$

Тут позначено

$$s_1(a,\tilde{t}) = \min\{s_1(a,t^{(1)}), s_1(a,t^{(2)})\},$$

$$s_2(a,\tilde{x}) = \min\{s_2(a,x^{(1)}), s_2(a,x^{(2)})\},$$

$$S(q;s_1,s_2;[\ell];t,x) = s_1(q^{(1)}+[\ell]\gamma^{(1)},t)s_2(q^{(2)}+[\ell]\gamma^{(2)},x)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n} s_1(-k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(-k_i\beta_i^{(2)},x).$$

Щодо задачі (1)–(3), вважаємо виконаними такі умови.

1°) Для коефіцієнтів рівняння (1):

$$A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2)},x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi),$$

$$A_p(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(p_i\mu_{p_i}^{(1)},t)s_2(p_i\mu_{p_i}^{(2)},x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi),\qquad 1\le|p|\le 2b-1,$$

$$A_0(t,x)s_1(\mu_0^{(1)},t)s_2(\mu_0^{(2)},x)\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi),\qquad A_0(t,x)\le K<\infty,$$

а для рівняння

$$\left[\partial_t-\sum_{|k|=2b}A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n}s_1(k_i\beta_i^{(1)},t)s_2(k_i\beta_i^{(2)},x)\partial_x^k\right]u(t,x)=\tilde{f}(t,x)$$

виконується умова рівномірної параболічності [5, с. 9].

2°) $f\in C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi)$, $\varphi_0\in C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n)$, $\tilde{\gamma}=(0,\gamma^{(2)})$, $\tilde{\beta}\in(0,\beta^{(2)})$,

$\varphi_\lambda\in C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi\cap(t=t_\lambda))$, $b_\lambda\in C^{2b+\alpha}(\Pi\cap(t=t_\lambda))$,

$$\gamma^{\nu}=\max\left\{\max_i\beta_i^{(\nu)},\max_{p_i}\frac{p_i(\mu_{p_i}^{(\nu)}-\beta_i^{(\nu)})}{2b-|p|},\frac{\mu_0^{(\nu)}}{2b}\right\},\qquad \nu\in\{1,2\}.$$

Справджується така

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконуються умови* ***1°, 2°***. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *із простору* $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ *і правильною є нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;\Pi\|_{2b+\alpha}\le C\left\{\sum_{r=1}^{N}\left[\sum_{\lambda=r}^{N}\left(\|1+b_\lambda\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi\cap(t=t_\lambda))}\right)\times\right.\right.$$
$$\left.\times\left(\left\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r-1)}\right\|_{\alpha}+\left\|\varphi_{r-1};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\cap(t=t_{r-1})\right\|_{2b+\alpha}\right)\right]+$$
$$\left.+\left\|f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(N)}\right\|_{\alpha}+\left\|\varphi_N;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\cap(t=t_N)\right\|_{2b+\alpha}\right\}.\qquad(4)$$

Для д о в е д е н н я **теореми 1** встановимо розв'язність допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами. З множини одержаних розв'язків виділимо збіжну послідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)–(3).

2. Оцінка розв'язків допоміжних задач з гладкими коефіцієнтами. Нерівність (4) одержується тією ж схемою, що і встановлення оцінок для розв'язків задачі Коші із [6].

Нехай $\Pi_m=\Pi\cap\{(t,x)\in\Pi\mid s_1(1,t)\ge m_1^{-1}, s_2(1,x)\ge m_2^{-1}\}$, $m=(m_1,m_2)$, $m_i>1$, $i\in\{1,2\}$, – послідовності областей, які при $m_i\to\infty$ збігаються до Π.

Розглянемо в області Π задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1 u_m)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} a_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\le 2b-1} a_p(t,x)\partial_x^p\right] u_m(t,x) =$$

$$= f_m(t,x), \tag{5}$$

які задовольняють умови за змінною t:

$$u_m(t_0+0,x) = \varphi_m^{(0)}(x), \tag{6}$$

$$u_m(t_\lambda+0,x) - u_m(t_\lambda-0,x) = b_\lambda(x)u_m(t_\lambda-0,x) + \varphi_m^{(\lambda)}(x). \tag{7}$$

Тут коефіцієнти a_k, a_p і функції $\varphi_m^{(0)}$, $\varphi_m^{(\lambda)}$, f_m в областях Π_m співпадають з A_k, A_p та φ_0, φ_λ, f відповідно, а в областях $\Pi\setminus\Pi_m$ є неперервним продовженням коефіцієнтів A_k, A_p і функцій φ_0, φ_λ, f із області Π_m в області $\Pi\setminus\Pi_m$ зі збереженням гладкості і норми [9, с. 82].

Позначимо через $H^\ell(\gamma;\beta;q;\Pi)$ сукупність функцій простору $C^\ell(\Pi)$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi\|_\ell$, еквівалентну при кожному m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка визначається так само, як і $\|u;\gamma;\beta;q;\Pi\|_\ell$, тільки замість функцій $s_1(a^{(1)},t)$, $s_2(a^{(2)},x)$ беремо відповідно $d_1(a^{(1)},t)$ і $d_2(a^{(2)},x)$, де

$$d_1(a^{(1)},t) = \begin{cases} \max\left\{s_1(a^{(1)},t), m_1^{-a^{(1)}}\right\}, & a^{(1)} \ge 0,\\ \min\left\{s_1(a^{(1)},t), m_1^{-a^{(1)}}\right\}, & a^{(1)} < 0,\end{cases}$$

$$d_2(a^{(2)},x) = \begin{cases} \max\left\{s_2(a^{(2)},x), m_2^{-a^{(2)}}\right\}, & a^{(2)} \ge 0,\\ \min\left\{s_2(a^{(2)},x), m_2^{-a^{(2)}}\right\}, & a^{(2)} < 0.\end{cases}$$

Для норми

$$\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi\|_\ell = \sup_r \left\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_\ell$$

правильними є інтерполяційні нерівності.

Лема 1. *Нехай* $u_m \in H^{[\ell]}(\gamma;\beta;q;\Pi)$. *Тоді для* ε, $0<\varepsilon<1$, *існує стала* $C(\varepsilon)$ *така, що виконуються нерівності*

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{[\ell]} \le \varepsilon^\alpha \left\langle u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\rangle_{[\ell]+\alpha} + C(\varepsilon)\left\|u_m;\Pi^{(r)}\right\|_0,$$

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{|k|} \le \varepsilon\left\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{|k|+1} + \frac{C}{\varepsilon}\left\|u_m;\gamma;\beta;q;\Pi^{(r)}\right\|_{|k|-1},$$

$$|k| \le [\ell]-1. \tag{8}$$

Д о в е д е н н я нерівностей (8) виконуємо за схемою доведення леми із [6]. ♦

В області $\Pi^{(r)}$ розглянемо задачу

$$(L_1 u_m)(t,x) = f_m(t,x), \qquad u_m(t_r+0,x) = g_m^{(r)}(t_r,x), \tag{9}$$

де

$$g_m^{(0)}(t_0,x) = \varphi_m^{(0)}(x), \qquad x\in\mathbb{R}^n,$$

$$g_m^{(r)}(t_r,x) = (1+b_r(x))u_m(t_r-0,x) + \varphi_m^{(r)}(x), \quad x \in \Pi\cap(t=t_r),$$

$$r\in\{1,2,\ldots,N\}.$$

В областях $\Pi^{(r)}$ розв'язок задачі (9) існує і є єдиним у просторі $C^{2b+\alpha}(\Pi^{(r)})$ (див. теорему 1 із [5, с. 31]). Встановимо оцінку норми розв'язку $\left\| u_m;\gamma;\beta;0;\Pi \right\|_{2b+\alpha}$.

Правильною є така

Теорема 2. *Якщо для задачі* (5)–(7) *виконуються умови* ***1°***, ***2°***, *то для розв'язку задачі* (5)–(7) *справджується оцінка*

$$\left\| u_m;\gamma;\beta;0;\Pi \right\|_{2b+\alpha} \le C\left\{ \sum_{r=1}^{N}\left[\sum_{\lambda=r}^{N}\left(\left\| 1+b_\lambda \right\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi\bigcap(t=t_\lambda))} \right)\times \right.\right.$$

$$\left.\times\left(\left\| \varphi_m^{(r-1)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\bigcap(t=t_{r-1}) \right\|_{2b+\alpha} + \left\| f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r-1)} \right\|_{\alpha} \right)\right]+$$

$$\left. + \left\| f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(N)} \right\|_{\alpha} + \left\| \varphi_m^{(N)};\gamma;\beta;0;\Pi\bigcap(t=t_N) \right\|_{2b+\alpha} \right\}. \qquad (10)$$

Стала C не залежить від m.

Д о в е д е н н я. Знайдемо оцінку норми $\left\| u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\|_{2b+\alpha}$. Використовуючи інтерполяційні нерівності (8), маємо

$$\left\| u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\|_{2b+\alpha} \le (1+\varepsilon^\alpha)\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\rangle_{2b+\alpha} + C(\varepsilon)\left\| u_m;\Pi^{(r)} \right\|_0 .$$

Тому достатньо оцінити півнорму $\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\rangle_{2b+\alpha}$.

Із означення $\left\langle u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\rangle_{2b+\alpha}$ випливає існування в $\Pi^{(r)}$ точок $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(1)})$, $H_i(t^{(1)},x^{(2)})$, для яких виконується нерівність

$$\frac{1}{2}\left\| u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\|_{2b+\alpha} \le E_1 + E_2 , \qquad (11)$$

де

$$E_1 = \sum_{2bj+|k|=2b}\left[\sum_{i=1}^{n} S(q;d_1,d_2;2b;t^{(1)};\tilde{x})\, d_1\big(\alpha(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)}),t^{(1)}\big)\times \right.$$

$$\times\, d_2\big(\alpha(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)}),\tilde{x}\big)\left| x_i^{(1)}-x_i^{(2)} \right|^{-\alpha}\times$$

$$\left.\times\left| \partial_t^j\partial_x^k u_m(P_1) - \partial_t^j\partial_x^k u_m(H_i) \right|\right],$$

$$E_2 = \sum_{2bj+|k|=2b} S(q;d_1,d_2;2b;\tilde{t};x^{(1)})\, d_1\big(\alpha\gamma^{(1)},\tilde{t}\big)\, d_2\big(\alpha\gamma^{(2)},x^{(1)}\big)\times$$

$$\times\left| t^{(1)}-t^{(2)} \right|^{-\alpha/2b}\left| \partial_t^j\partial_x^k u_m(P_1) - \partial_t^j\partial_x^k u_m(P_2) \right|.$$

Якщо $\left| x_i^{(1)}-x_i^{(2)} \right| \ge \dfrac{\varepsilon_1}{2n} d_1\big(\gamma^{(1)}-\beta_i^{(1)},\tilde{x}\big) d_2\big(\gamma^{(2)}-\beta_i^{(2)},\tilde{x}\big) \equiv N_1$, а ε_1 – довільне дійсне число із $(0,1)$, то

$$E_1 \le c_1\varepsilon_1^{-\alpha}\left\| u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\|_{2b}. \qquad (12)$$

Якщо $\left| t^{(1)}-t^{(2)} \right| \ge \left(\dfrac{\varepsilon_1}{2}\right)^{2b} d_1\big(2b\gamma^{(1)},\tilde{t}\big) d_2\big(2b\gamma^{(2)},\tilde{x}\big) \equiv N_2$, то

$$E_2 \le c_2\varepsilon_1^{-\alpha}\left\| u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\|_{2b}. \qquad (13)$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності (8) до (12), (13), знаходимо

$$E_1 + E_2 \le \varepsilon^{\alpha} \left\| u_m; \gamma; 0; 0; \Pi^{(r)} \right\|_{2b+\alpha} + C(\varepsilon) \left\| u_m; \Pi^{(r)} \right\|_0 . \tag{14}$$

Розглянемо випадок $\left| x_i^{(1)} - x_i^{(2)} \right| \le N_1$, $\left| t^{(1)} - t^{(2)} \right| \le N_2$. Будемо вважати, що

$$d_1(\gamma^{(1)}, \tilde{t}) \equiv d_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)}) = \min\left\{ d_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)}), d_1(\gamma^{(1)}, t^{(2)}) \right\},$$

$$d_2(\gamma^{(2)}, \tilde{x}) \equiv d(\gamma^{(2)}, x^{(1)}) = \min\left\{ d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)}), d_2(\gamma^{(2)}, x^{(2)}) \right\},$$

Нехай точка $P_1(t^{(1)}, x^{(1)}) \in \Pi^{(r)}$. Запишемо задачу (9) у такому вигляді:

$$\partial_t u_m - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) \partial_x^k u_m = f_m(t,x) + \sum_{|p| \le 2b-1} a_p(t,x) \partial_x^p u_m + $$
$$+ \sum_{|k|=2b} \left[a_k(t,x) - a_k(P_1) \right] \partial_x^k u_m \equiv F_m(t, x; u_m), \tag{15}$$

$$u_m(t_r + 0, x) = g_m^{(r)}(t_r, x). \tag{16}$$

У задачі (15), (16) зробимо заміну $u_m(t,x) = v_m(t,y)$, де $y_i = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)}) x_i$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Тоді $\omega_m(t,y) = \eta(t,y) v_m(t,y)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t \omega_m - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) S_1(k; d_1, d_2; t^{(1)}; x^{(1)}) \partial_y^k \omega_m =$$
$$= v_m \partial_t \eta + \eta F_m(t, \tilde{y}; v_m) + \sum_{|k|=2b} a_k(P_1) S_1(k; d_1, d_2; t^{(1)}; x^{(1)}) \times$$
$$\times \left(\sum_{0<|p|<|k|} C_{|k|}^{|p|} \partial_y^{k-p} v_m \partial_y^p \eta \right) \equiv F_m^{(1)}(t, y; v_m), \tag{17}$$

$$\omega_m(t_r + 0, y) = \eta(t_r + 0, y) g_m^{(r)}(t_r, \tilde{y}). \tag{18}$$

Тут позначено

$$\tilde{y} = \left(d_1^{-1}(\beta_1^{(1)}, t^{(1)}), d_2^{-1}(\beta_2^{(1)}, x^{(1)}) x_1, \dots, d_1^{-1}(\beta_n^{(1)}, t^{(1)}), d_2^{-1}(\beta_n^{(2)}, x^{(1)}) x_n \right),$$

$$\eta(t,y) = \begin{cases} 1, & (t,y) \in T_{1/2}, \quad 0 \le \eta(t,y) \le 1, \\ 0, & (t,y) \notin T_{3/4}, \quad \left| \partial_t^j \partial_x^k \eta \right| \le C_{kj} d_1^{-1}((2bj + |k|)\gamma^{(1)}, t^{(1)}) \times \\ & \qquad \times d_2^{-1}((2bj + |k|)\gamma^{(2)}, x^{(1)}), \end{cases}$$

$$T_\delta = \left\{ (t,y), \left| t - t^{(1)} \right| \le 2\delta N_2, \left| y_i - y_i^{(1)} \right| \le \frac{\delta}{n} d_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)}), d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)}) \right\},$$

$$S_1(k; d_1, d_2; t^{(1)}; x^{(1)}) = \prod_{i=1}^{n} d_1(k_i \beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(k_i \beta_i^{(2)}, x^{(1)}),$$

$$y_i^{(1)} = d_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) d_2(\beta_i^{(2)}, x^{(1)}) x_i^{(1)}, \qquad i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Зазначимо, що коефіцієнти рівняння (17) обмежені сталими, не залежними від точки $P_1(t^{(1)}, x^{(1)})$. Тому, з огляду на теорему 1 із [5, с. 31], для довільних точок $M_1 \in T_{1/2}$, $M_2 \in T_{1/2}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2) \left| \partial_t^j \partial_x^k v_m(M_1) - \partial_t^j \partial_x^k u_m(M_2) \right| \le$$
$$\le c \left(\left\| F_m^{(1)} \right\|_{C^{\alpha}(T_{3/4})} + \left\| \eta g_m^{(r)} \right\|_{C^{2b+\alpha}(T_{3/4} \cap (t = t_r))} \right). \tag{19}$$

Тут $2bj+|k|=2b$, а $d(M_1,M_2)$ − параболічна відстань між точками M_1, M_2.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,y)$ і нерівності (8), одержимо

$$\left\|F_m^{(1)}\right\|_{C^{\alpha}(T_{3/4})} \le cW(d_1,d_2)\Big(\left\|v_m;\gamma;0;0;T_{3/4}\right\|_{2b}+$$

$$+\left\|F_m;\gamma;0;2b\gamma;T_{3/4}\right\|_{\alpha}+\left\|v_m;T_{3/4}\right\|_0\Big),$$

$$\left\|\eta g_m^{(r)}\right\|_{C^{2b+\alpha}(T_{3/4}\cap(t=t_r))} \le cW(d_1,d_2)\left\|g_m^{(r)};\tilde{\gamma};0;0;T_{3/4}\cap(t=t_r)\right\|_{2b+\alpha}, \quad (20)$$

де $W(d_1,d_2)=d_1((2b+\alpha)\gamma^{(1)},t^{(1)})d_2((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)})$.

Із означення простору $H^{\ell}(\gamma;\beta;q;\Pi)$ випливає правильність нерівностей

$$c_3\left\|v_m;\gamma;0;q;T_{3/4}\right\|_{\ell} \le \left\|u_m;\gamma;\beta;q;K_{3/4}\right\|_{\ell} \le c_4\left\|v_m;\gamma;0;q;T_{3/4}\right\|_{\ell},$$

$$K_{\delta}=\left\{(t,x)\in\Pi^{(r)}\,\middle|\,\left|x_i-x_i^{(1)}\right|\le\delta N_1,\ \left|t-t^{(1)}\right|\le\delta N_2\right\}.$$

Підставивши (20) у (19) і повернувшись до змінних (t,x), знаходимо

$$E_1+E_2\le c\Big(\left\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_{\alpha}+$$

$$+\left\|g_m^{(r)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;K_{3/4}\cap(t=t_r)\right\|_{2b+\alpha}+\left\|u_m;K_{3/4}\right\|_0\Big). \quad (21)$$

Для встановлення норми $\left\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_{\alpha}$ достатньо оцінити півнорми кожного доданка виразу $F_m(t,x;u_m)$. Скориставшись нерівностями (8), одержимо

$$\left\|F_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_{\alpha}\le c_5\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_{\alpha}+c_6\left\|u_m;K_{3/4}\right\|_0+$$

$$+\varepsilon_2\left\|u_m;\gamma;\beta;0;K_{3/4}\right\|_{2b+\alpha}. \quad (22)$$

Підставляючи (22) у (21), знаходимо

$$E_1+E_2\le c_7\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;K_{3/4}\right\|_{\alpha}+c_8\left\|g_m^{(r)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;K_{3/4}\cap(t=t_r)\right\|_{2b+\alpha}+$$

$$+\varepsilon_2\left\|u_m;\gamma;\beta;0;K_{3/4}\right\|_{2b+\alpha}+c_9\left\|u_m;K_{3/4}\right\|_0. \quad (23)$$

Використовуючи нерівності (11), (14), (23) і вибираючи ε, ε_2 достатньо малими, одержимо нерівність

$$\left\|u_m;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)}\right\|_{2b+\alpha}\le C\Big(\left\|f_m;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r)}\right\|_{\alpha}+\left\|u_m;\Pi^{(r)}\right\|_0+$$

$$+\left\|g_m^{(r)};\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi^{(r)}\cap(t=t_r)\right\|_{2b+\alpha}\Big). \quad (24)$$

Встановимо оцінку норми $\left\|u_m;\Pi^{(r)}\right\|_0$.

В областях $\Pi^{(r)}$ розв'язок задачі (9) існує і, згідно з теоремою 1 із [5, с. 31], є єдиним у просторі $C^{2b+\alpha}(\Pi^{(r)})$ і при кожному фіксованому m_1, m_2 має скінченну норму [5, с. 56]. Використовуючи метод доведення зауваження 2 із [1, с. 79] і теореми 3 із [6], одержуємо оцінку

$$\left\| u_m; \Pi^{(r)} \right\|_0 \le c_{10} \left(\left\| f_m; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi^{(r)} \right\|_\alpha + \right.$$

$$\left. + \left\| g_m^{(r)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi^{(r)} \cap (t = t_r) \right\|_{2b+\alpha} \right). \qquad (25)$$

Враховуючи нерівності (24), (25) при $r = 0$, маємо

$$\left\| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi^{(0)} \right\|_{2b+\alpha} \le c_{11} \left(\left\| f_m; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi^{(0)} \right\|_\alpha + \left\| \varphi_m^{(0)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \mathbb{R}^n \right\|_{2b+\alpha} \right).$$

Знайдемо оцінку розв'язку $u_m(t,x)$ в області $\Pi^{(0)} \cup \Pi^{(1)}$. Враховуючи умову (7), маємо

$$\left\| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi^{(0)} \cup \Pi^{(1)} \right\|_{2b+\alpha} \le c_{12} \left(\left\| f_m; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi^{(1)} \right\|_\alpha + \right.$$

$$\left. + \left\| \varphi_m^{(1)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi \cap (t = t_1) \right\|_{2b+\alpha} \right) + c_{11} \left(\left\| 1 + b_1 \right\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi \cap (t = t_1))} \right) \times$$

$$\times \left(\left\| f_m; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi^{(0)} \right\|_\alpha + \left\| \varphi_m^{(0)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; R^n \right\|_{2b+\alpha} \right).$$

Продовжуючи наведені вище міркування і враховуючи умову (7), одержимо нерівність (10). ♦

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Оскільки

$$\left\| f_m; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi^{(r-1)} \right\|_\alpha \le C \left\| f; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi^{(r-1)} \right\|_\alpha,$$

$$\left\| f_m; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi^{(N)} \right\|_\alpha \le C \left\| f; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi^{(N)} \right\|_\alpha,$$

$$\left\| \varphi_m^{(r-1)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi \cap (t = t_{r-1}) \right\|_{2b+\alpha} \le C \left\| \varphi_{r-1}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi \cap (t = t_{r-1}) \right\|_{2b+\alpha},$$

$$\left\| \varphi_m^{(N)}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi \cap (t = t_N) \right\|_{2b+\alpha} \le C \left\| \varphi_N; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi \cap (t = t_N) \right\|_{2b+\alpha},$$

то, використовуючи нерівність (10), одержуємо

$$\left\| u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi \right\|_{2b+\alpha} \le C \left\{ \sum_{r=1}^{N} \left[\sum_{\lambda=r}^{N} \left(\left\| 1 + b_\lambda \right\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi \cap (t = t_\lambda))} \right) \times \right. \right.$$

$$\left. \times \left(\left\| f; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi^{(r-1)} \right\|_\alpha + \left\| \varphi_{r-1}; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi \cap (t = t_{r-1}) \right\|_{2b+\alpha} \right) \right] +$$

$$\left. + \left\| \varphi_N; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi \cap (t = t_N) \right\|_{2b+\alpha} + \left\| f; \gamma; \beta; 2b\gamma; \Pi^{(N)} \right\|_\alpha \right\}. \qquad (26)$$

Права частина нерівності (26) не залежить від m_1, m_2, і послідовності

$$\left\{ W_m^{(j,k)} \right\} = \left\{ d_1((2bj + |k|)\gamma^{(1)}, t) d_2((2bj + |k|)\gamma^{(2)}, x) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{i=1}^{n} d_1(-k_i \beta_i^{(1)}, t) d_2(-k_i \beta_i^{(2)}, x) \partial_t^j \partial_x^k u(t,x) \right\}, \quad 2bj + |k| \le 2b,$$

є компактними в довільній замкнутій області $\bar{Q}_r \subset \Pi^{(r)}$. За теоремою Арцела, існують підпослідовності $\left\{ W_m^{(j,k)} \right\}$, рівномірно збіжні при $m(\ell) \to \infty$ до $W^{(j,k)}$. Переходячи в задачі (5)–(7) до границі при $m(\ell) \to \infty$, одержуємо, що $u(t,x) = W^{(0,0)}$ – єдиний розв'язок задачі (1)–(3), і оцінка (4) є правильною. ♦

Теорема 3. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконуються умови* ***1°***, ***2°*** *і нехай* $f \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$. *Тоді єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *в областях* $\Pi^{(r)}$ *визначається формулами*

$$\begin{aligned} & u(t,x) = u_r(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi^{(r)}, \\ & u_0(t,x) = \iint\limits_{\Pi^{(0)}} Z_0(t,x;d\tau,d\xi) f(\tau,\xi) + \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z_0(t,x;0,d\xi)\,\varphi_0(\xi), \\ & u_r(t,x) = \iint\limits_{\Pi^{(r)}} Z_r(t,x;d\tau,d\xi) f(\tau,\xi) + \\ & \qquad + \int\limits_{\Pi^{(r)}\bigcap(t=t_r)} Z_r(t,x;0,d\xi)\,(1+b_r(\xi))\big(u_{r-1}(t_r-0,\xi)+\varphi_r(\xi)\big). \end{aligned} \tag{27}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi) \subset C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi)$, то для $f \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi)$ виконується нерівність

$$\left\| f;\gamma;\beta;2b\gamma;\Pi^{(r)} \right\|_{\alpha} \le c \left\| f;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\|_{\alpha}, \qquad r \in \{0,1,\ldots,N\}.$$

Тому з урахуванням теореми 1 для розв'язку задачі (1)–(3) в областях $\Pi^{(r)}$ справджуються нерівності

– при $r = 0$:

$$\left\| u;\gamma;\beta;0;\Pi^{(0)} \right\|_{2b+\alpha} \le C\left(\left\| f;\gamma;\beta;0;\Pi^{(0)} \right\|_{\alpha} + \left\| \varphi_0;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n \right\|_{2b+\alpha} \right).$$

– при $r \ge 1$:

$$\begin{aligned} \left\| u;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\|_{2b+\alpha} \le C\Bigg[\Big(& \left\| 1+b_r \right\|_{C^{2b+\alpha}(\Pi\bigcap(t=t_r))} \Big) \left\| u;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r-1)} \right\|_{2b+\alpha} + \\ & + \left\| \varphi_r;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\bigcap(t=t_r) \right\|_{2b+\alpha} + \left\| f;\gamma;\beta;0;\Pi^{(r)} \right\|_{\alpha} \Bigg], \end{aligned}$$

Зазначимо, що простір

$$\begin{aligned} C_{\alpha} \equiv {} & C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;\Pi) \times C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\mathbb{R}^n) \times C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\bigcap(t=t_1)) \times \\ & \times \ldots \times C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;\Pi\bigcap(t=t_N)) \end{aligned}$$

вкладається в простір $C(\Pi)$, $C_{\alpha} \subset C(\Pi)$. Тому, з огляду на теорему Рісса, можемо вважати, що при фіксованих $(t,x) \in \Pi^{(r)}$ лінійний неперервний функціонал $u_r(t,x)$ породжує борелівську міру $Z_r(t,x;G_r)$, яка визначається на σ-алгебрі підмножин $G_r \subset \Pi^{(r)}$, включаючи $\Pi^{(r)}$ і всі її відкриті підмножини такі, що значення функціонала визначається формулами (27). ♦

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 208 с.
2. *Асанова А. Т.* О нелокальной краевой задаче для систем гиперболических уравнений с импульсными воздействиями // Укр. мат. журн. – 2013. – **65**, № 3. – С. 315–328.

Те саме: *Asanova A. T.* On a nonlocal boundary-value problem for systems of impulsive hyperbolic equations // Ukr. Math. J. – 2013. – **65**, No. 3. – P. 349–365. – https://doi.org/10.1007/s11253-013-0782-x.

3. *Ісарюк І. М., Пукальський І. Д.* Крайові задачі з імпульсними умовами для параболічних рівнянь з виродженнями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59,** № 3. – С. 55–67.
   Те саме: *Isaryuk I. M., Pukal's'kyi I. D.* Boundary-value problems with impulsive conditions for parabolic equations with degenerations // J. Math. Sci. – 2019. – **236**, No. 1. – P. 53–70. – https://doi.org/10.1007/s10958-018-4097-1.
4. *Лусте І. П., Пукальський І. Д.* Загальна крайова задача для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2022. – **65**, № 1-2. – С. 109–120.
5. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні задачі у просторах Діні. – Чернівці: Чернів. нац. ун-т, 2010. – 248 с.
6. *Пукальський І. Д.* Задача Коші для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 2. – С. 31–41.
7. *Пукальський І. Д., Яшан Б. О.* Крайова задача з імпульсною дією для параболічного рівняння з виродженням // Укр. мат. журн. – 2019. – **71**, № 5. – С. 645–655.
   Те саме: *Pukalskyi I. D., Yashan B. O.* Boundary-value problem with impulsive action for a parabolic equation with degeneration // Ukr. Math. J. – 2019. – **71**, No. 5. – P. 735–748.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 287 с.
   Те саме: *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – Singapore: World Sci., 1995. – x+462 p.
9. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 428 с.
   Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv + 347 p.
10. *Ambrosio P., Passarelli di Napoli A.* Regularity results for a class of widely degenerate parabolic equations // Adv. Calcul. Variat. – 2023. – https://doi.org/10.1515/acv-2022-0062.
11. *Khubiev K. U.* Boundary-value problem for a loaded hyperbolic-parabolic equation with degeneration of order // J. Math. Sci. – 2022. – **260,** No. 3. – P. 387–391. – https://doi.org/10.1007/s10958-022-05700-7.
12. *Maarouf H., Maniar L., Ouelddris I., Salhi J.* Impulse controllability for degenerate singular parabolic equations via logarithmic convexity method // IMA J. Math. Control Infor. – 2023. – **40**, No. 4. – P. 593–617. – https://doi.org/10.1093/imamci/dnad025.
13. *Unguryan G.* Modified Cauchy problem with impulse action for parabolic Shilov equations // Hindawi Int. J. Math. Math. Sci. – **2021**. – Article ID 5539676. – 10 p. – https://doi.org/10.1155/2021/5539676.

PROBLEM WITH IMPULSE EFFECT FOR 2*b*-PARABOLIC EQUATION WITH DEGENERACY

For the parabolic equation of order $2b$ *, the problem with impulse action is considered. The coefficients of the equation have power singularities of arbitrary order in time and space variables at some set of points. Estimates of the solution of the given problem and its derivatives in Hölder spaces with power weight are established. The order of the power weight is determined via the values of the orders of the power singularities and the degeneracies of the coefficients of the* $2b$ *-parabolic equation.*

Keywords*: power singularities, impulse influence, interpolation inequalities, a priori estimates, Hölder spaces, Arzelà's theorem, Borel measure, Riesz's theorem.*

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
31.01.23