УДК 517.95

О. М. Бугрій[1✉], Н. В. Бугрій[2], О. Т. Холявка[3]

ГІПЕРБОЛІЧНІ СИСТЕМИ СТОКСА ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМ ПОКАЗНИКОМ НЕЛІНІЙНОСТІ

Досліджується задача для еволюційної системи Стокса третього порядку, що містить змінний показник нелінійності. Встановлено достатні умови існування та єдиності слабкого розв'язку такої задачі у відповідних функційних просторах.

Ключові слова: *гіперболічні системи Стокса, третій порядок рівнянь, слабкий розв'язок, змінний показник нелінійності, нелокальний інтегральний доданок.*

Вступ. У статті розглянуто задачу про знаходження пари функцій $\{u, \pi\}$, що задовольняє такі співвідношення:

$$u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(A_{ij}(x,t) u_{tx_i}\right)_{x_j} - \sum_{i,j=1}^{n} \left(B_{ij}(x,t) u_{x_i}\right)_{x_j} + G(x,t,u_t) +$$

$$+ \int_{\Omega} \zeta(x,t,y) u_t(y,t)\, dy + \nabla\pi = f(x,t) \qquad \text{в} \quad Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} u = 0 \qquad \text{в} \qquad Q_{0,T}, \tag{2}$$

$$\int_{\Omega} \pi(x,t)\, dx = 0, \qquad t \in (0,T), \tag{3}$$

$$u\big|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{4}$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \qquad \text{в} \qquad \Omega, \tag{5}$$

$$u_t\big|_{t=0} = u_1(x) \qquad \text{в} \qquad \Omega, \tag{6}$$

де $u = (u_1, \ldots, u_n) \colon Q_{0,T} \to \mathbb{R}^n$, $\pi \colon Q_{0,T} \to \mathbb{R}$, $\nabla\pi = \left(\dfrac{\partial\pi}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial\pi}{\partial x_n}\right)$, $G(x,t,u_t) = \left(g_1(x,t)\left|(u_1)_t\right|^{q(x)-2}(u_1)_t, \ldots, g_n(x,t)\left|(u_n)_t\right|^{q(x)-2}(u_n)_t\right)$, A_{ij}, B_{ij} , $i,j = 1,\ldots,n$, – деякі матриці, f – деяка вектор-функція, $\operatorname{div} u = \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \ldots + \dfrac{\partial u_n}{\partial x_n}$; $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, – обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T)$. Функцію $q = q(x)$ називають змінним показником нелінійності системи (1).

Встановлено достатні умови існування та єдиності слабкого розв'язку задачі (1)–(6). Стаття складається з двох розділів. У першому з них подано потрібні надалі допоміжні твердження і зауваження. Основні результати досліджень представлено і доведено в розділі 2.

Системи рівнянь Нав'є – Стокса описують рух і теплопередачу в'язкої нерозривної рідини. Крім того, їх використовують для моделювання різних процесів і технічних задач. Тому задачі для параболічних систем Нав'є – Стокса зі сталим показником нелінійності широко представлено у математичній літературі (див., наприклад, праці [2, 11, 14, 18, 20] та бібліографію до них).

У роботах [15–17] автори отримали та дослідили гіперболічно збурену

✉oleh.buhrii@lnu.edu.ua

систему рівнянь Нав'є – Стокса зі сталим показником нелінійності. Встановлено умови існування локального та глобального гладкого розв'язку задачі при малих вхідних даних. Задачі для нестаціонарних систем рівнянь Нав'є – Стокса зі змінними показниками нелінійності вивчено у праці [8].

Слабкі розв'язки задач для параболічних систем Стокса зі сталими та змінними показниками нелінійності досліджено в роботах [3, 6] відповідно.

Деякі класи нелінійних інтегро-диференціальних систем четвертого порядку зі змінними показниками нелінійності вивчено у праці [4].

У статті [9] розглянуто змішану задачу для лінійних систем Стокса гіперболічного типу та одержано певні локальні оцінки для розв'язків таких задач.

Наскільки відомо авторам, задачі для гіперболічних систем Стокса третього порядку з нелокальним інтегральним доданком раніше ніким не розглядалися. Тому доцільним є вивчення таких задач.

1. Допоміжні твердження. Для представлення та доведення основних результатів наведемо потрібні надалі твердження та зауваження.

Позначимо $\Omega_\tau = \{(x,t) \,|\, x \in \Omega,\, t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$. Нехай $q \in [1,\infty]$, $\Lambda = \Omega$ або $\Lambda = Q_{0,T}$. Через $\mathcal{M}(\Lambda)$ позначимо множину всіх вимірних функцій $v : \Lambda \to \mathbb{R}$. Нехай $\mathcal{B}_+(\Lambda) := \{q \in L^\infty(\Lambda) \,|\, \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\Lambda} q(y) > 0\}$. Для всіх $q \in \mathcal{B}_+(\Lambda)$ введемо також позначення:

$$q_0 := \operatorname*{ess\,inf}_{y\in\Lambda} q(y), \qquad q^0 := \operatorname*{ess\,sup}_{y\in\Lambda} q(y), \tag{7}$$

$$\rho_q(v;\Lambda) := \int_\Lambda |v(y)|^{q(y)}\, dy, \qquad v \in \mathcal{M}(\Lambda), \tag{8}$$

$$q'(y) := \frac{q(y)}{q(y)-1} \quad \text{для майже всіх} \quad y \in \Lambda$$

(зазначимо, що $\dfrac{1}{q(y)} + \dfrac{1}{q'(y)} = 1$ для майже всіх $y \in \Lambda$ і $q' \in \mathcal{B}_+(\Lambda)$, якщо $q_0 > 1$).

Нехай $q \in \mathcal{B}_+(\Lambda)$ і $q_0 > 1$. Множину функцій

$$L^{q(y)}(\Lambda) := \{v \in \mathcal{M}(\Lambda) \,|\, \rho_q(v;\Omega) < +\infty\}$$

разом із введеною на ній нормою Luxembury [7, с. 430]

$$\left\| v; L^{q(y)}(\Lambda) \right\| := \inf\{\lambda > 0 \,|\, \rho_q(v/\lambda;\Lambda) \le 1\}$$

називають узагальненим простором Лебеґа зі змінним показником нелінійності. Властивості просторів Лебеґа та Соболєва зі змінними показниками нелінійності вивчено, зокрема, у працях [7, 10]. Також відомо, що, якщо $q \in \mathcal{B}_+(\Lambda)$ і $q_0 > 1$, то $L^{q(y)}(\Lambda)$ є банаховим рефлексивним простором (див. [7, с. 427, теорема 1.10, с. 430]).

Твердження 1 (див., наприклад, [13], зауваження 3.1, с. 453**).** *Нехай* $r \in \mathcal{B}_+(\Lambda)$, $r_0 \ge 1$,

$$S_r(z) := \max\{z^{r_0}, z^{r^0}\}, \qquad S_{1/r}(z) := \max\{z^{1/r_0}, z^{1/r^0}\}, \qquad z \ge 0.$$

Тоді для довільних функцій $v \in \mathcal{M}(\Omega)$ *справджується*

(***i***) *якщо* $\rho_r(v,\Lambda) < +\infty$, *то* $\|v\|_{L^{r(x)}(\Lambda)} \le S_{1/r}(\rho_r(v,\Lambda))$;

(***ii***) *якщо* $\|v\|_{L^{r(x)}(\Lambda)} < +\infty$, *то* $\rho_r(v,\Lambda) \le S_r\left(\|v\|_{L^{r(x)}(\Lambda)}\right)$.

Тут ρ_r *таке, як у* (8).

Для банахових просторів X та Y через $X \circlearrowleft Y$ позначимо неперервне вкладення просторів, а через $X \overset{-}{\circlearrowleft} Y$ – неперервне та щільне вкладення. Нехай $\mathcal{H}$ – гільбертовий простір зі скалярним добутком $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$, $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – ортонормована база в $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$ –рефлексивний сепарабельний банахів простір, $\mathcal{V} \overset{-}{\circlearrowleft} \mathcal{H} \cong \mathcal{H}^* \overset{-}{\circlearrowleft} \mathcal{V}^*$, $\mathfrak{M}$ – лінійна оболонка над $\{w^1,\dots,w^m\}$, $m \in \mathbb{N}$ – деяке фіксоване число. Єдину ортогональну проекцію $P_m : \mathcal{H} \to \mathfrak{M}$ означимо рівністю (див. [19, с. 527])

$$P_m h := \sum_{j=1}^{m} (h, w^j)_{\mathcal{H}} w^j, \qquad h \in \mathcal{H}.$$

Відомо, що P_m – лінійний самоспряжений неперервний оператор (див. [19, теорема 7.3.6, с. 515]). Для функцій $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ означимо оператор $\tilde{P}_m : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ (необов'язково самоспряжений) за таким правилом:

$$\tilde{P}_m v := P_m v \qquad \text{для всіх} \qquad v \in \mathcal{V}.$$

Відомо, що для спряженого оператора $\tilde{P}_m^* : \mathcal{V}^* \to \mathcal{V}^*$ виконується вкладення $\tilde{P}_m^*(\mathcal{V}^*) \subset \mathcal{V}$ (див. [4, с. 865]).

Твердження 2 (див. [4, лема 3.9, с. 865–866]**).** *Припустимо, що $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ – ортонормована база в $\mathcal{H}$ така, що $\{w^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$, $\psi_1^m,\dots,\psi_m^m \in \mathbb{R}$ – деякі числа і $F \in \mathcal{V}^*$. Тоді, якщо для $z^m := \sum_{s=1}^{m} \psi_s^m w^s \in \mathcal{V}$ справджуються рівності*

$$\left\langle z^m, w^1 \right\rangle_{\mathcal{V}} = \left\langle F, w^1 \right\rangle_{\mathcal{V}},$$
$$\vdots$$
$$\left\langle z^m, w^m \right\rangle_{\mathcal{V}} = \left\langle F, w^m \right\rangle_{\mathcal{V}},$$

то виконується рівність $z^m = \tilde{P}_m^* F$ у просторі $\mathcal{V}^*$.

Скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$ позначимо через $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}$. Приймемо також, що

$$(u,v)_\Omega := \int_\Omega \big(u(x), v(x)\big)_{\mathbb{R}^n} dx, \qquad u = (u_1,\dots,u_n), \quad v = (v_1,\dots,v_n),$$
$$u, v : \Omega \to \mathbb{R}^n.$$

Нехай $k \in \mathbb{N}$. Розглянемо простір Соболєва $[H^k(\Omega)]^n$ зі скалярним добутком

$$((u,v))_k := \sum_{i=1}^{n} (u_i, v_i)_{H^k(\Omega)}, \qquad u, v \in [H^k(\Omega)]^n.$$

Нехай $C_{\mathrm{div}} := \{u \in [C_0^\infty(\Omega)]^n \mid \operatorname{div} u = 0\}$ і нехай

H – замикання C_{div} у просторі $[L^2(\Omega)]^n$,

Z_k – замикання C_{div} в просторі $[H^k(\Omega)]^n$, де

$$\| h; H \| := \left\| h; [L^2(\Omega)]^n \right\| = \sum_{\ell=1}^{n} \left\| h_\ell; L^2(\Omega) \right\|, \qquad h = (h_1,\dots,h_n) \in H,$$

і

$$\| z; Z_k \| := \sqrt{((z,z))_k}, \qquad z = (z_1,\dots,z_n) \in Z_k.$$

Нехай $\mathbb{Z}_{\geq -1} := \{s \in \mathbb{Z} \mid s \geq -1\}$. Далі сформулюємо потрібне нам твердження для знаходження функції π.

Твердження 3 (узагальнення теореми de Rham-a, див. [11, теорема 4.1 і зауваження 4.3]**).** *Нехай* Ω *− відкрита обмежена однозв'язна ліпшицева підмножина в* $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_{\geq -1}$, $h_1, h_2 \in [1, \infty]$ *і*

$$\mathcal{F} \in W^{s_1,h_1}\big(0,T;[W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n\big).$$

Тоді, якщо

$$\langle \mathcal{F}(\cdot), v\rangle_{[D(\Omega)]^n} = 0 \quad \text{в} \quad D^*(0,T) \quad \text{для всіх} \quad v \in C_{\mathrm{div}}, \tag{9}$$

то існує єдина функція $\pi \in W^{s_1,h_1}\big(0,T;W^{s_2+1,h_2}(\Omega)\big)$ *така, що*

$$\nabla\pi = \mathcal{F} \quad \text{в} \quad [D^*(Q_{0,T})]^n, \tag{10}$$

$$\int_\Omega \pi(\cdot)\,dx = 0 \quad \text{в} \quad D^*(0,T). \tag{11}$$

Більше того, існує така додатна стала C_1 *(незалежна від* $\mathcal{F}$ *і* π*), що справджується нерівність*

$$\left\|\pi; W^{s_1\ h_1}\big(0,T;W^{s_2+\ \ h_2}(\Omega)\big)\right\| \leq C_1 \left\|\mathcal{F}; W^{s_1\ h_1}\big(0,T;[W^{s_2,h_2}(\Omega)]^n\big)\right\|.$$

Введемо простори

$$V = Z_1 \cap [L^{q(x)}(\Omega)]^n, \qquad U(Q_{0,T}) = L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q(x)}(Q_{0,T})]^n,$$

де

$$\|v;V\| = \|v;Z_1\| + \left\|v;[L^{q(x)}(\Omega]^n\right\|,$$

$$\left\|w;U(Q_{0,T})\right\| = \left\|w;L^2(0,T;Z_1)\right\| + \left\|w;[L^{q(x)}(Q_{0,T})]^n\right\|.$$

Припустимо, що виконуються умови:

(A): A_{ij} − квадратні матриці порядку n з елементами з $L^\infty(Q_{0,T})$, $A_{ij} = A_{ji}$, $i,j = 1,\dots,n$, для всіх $\xi^1,\dots,\xi^n \in \mathbb{R}^n$ та майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$ виконуються оцінки

$$a_{00}\sum_{i=1}^n \left|\xi^i\right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j\right)_{\mathbb{R}^n} \leq a^{00}\sum_{i=1}^n \left|\xi^i\right|^2,$$

де $a_{00} > 0$, $a^{00} < +\infty$;

(B): B_{ij}, B_{ijt} − квадратні матриці порядку n з елементами, що належать до простору $L^\infty(Q_{0,T})$, $B_{ij} = B_{ji}$, $i,j = 1,\dots,n$, для всіх $\xi^1,\dots,\xi^n \in \mathbb{R}^n$ та майже для всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$ виконуються оцінки

$$b_{00}\sum_{i=1}^n \left|\xi^i\right|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x,t)\xi^i,\xi^j\right)_{\mathbb{R}^n} \leq b^{00}\sum_{i=1}^n \left|\xi^i\right|^2,$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^n \left(B_{ijt}(x,t)\xi^i,\xi^j\right)_{\mathbb{R}^n}\right| \leq b^1\sum_{i=1}^n \left|\xi^i\right|^2,$$

де $b_{00} > 0$, $b^{00} < +\infty$, $b^1 < +\infty$;

(G): $g_\ell \in L^\infty(Q_{0,T})$, $\ell = 1,\dots,n$, $0 < g_0 \leq g_\ell(x,t) \leq g^0 < +\infty$ для майже всіх

$(x,t) \in Q_{0,T}$, $\ell = 1,\dots,n$;

(Q): $q \in \mathcal{B}_+(\Omega)$, $q_0 > 1$ (див. (7));

(E): ζ – квадратна матриця порядку n з елементами з простору $L^\infty(Q_{0,T} \times \Omega)$;

(F): $f, f_t \in [L^2(Q_{0,T})]^n$;

(U): $u_0 \in Z_1 \cap [H^2(\Omega)]^n$, $u_1 \in Z_1 \cap [H^2(\Omega)]^n \cap [L^{q(x)}(\Omega)]^n$.

Означимо оператори $A(t): V \to V^*$, $\mathcal{A}: U(Q_{0,T}) \to \left[U(Q_{0,T})\right]^*$, $B(t): V \to V^*$, $\mathcal{B}: U(Q_{0,T}) \to \left[U(Q_{0,T})\right]^*$, $E(t): [L^2(\Omega)]^n \to [L^2(\Omega)]^n$ і $\mathcal{E}: [L^2(Q_{0,T})]^n \to [L^2(Q_{0,T})]^n$ таким чином:

$$\langle A(t)z, w\rangle_V := \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left(A_{ij}(x,t) z_{x_i}(x), w_{x_j}(x)\right)_{\mathbb{R}^n} dx, \qquad z, w \in V, \tag{12}$$

$$\langle \mathcal{A}u, v\rangle_{U(Q_{0,T})} := \int\limits_0^T \langle Au(t), v(t)\rangle_V \, dt, \qquad u, v \in U(Q_{0,T}), \tag{13}$$

$$\langle B(t)z, w\rangle_V := \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left(B_{ij}(x,t) z_{x_i}(x), w_{x_j}(x)\right)_{\mathbb{R}^n} dx, \qquad z, w \in V, \tag{14}$$

$$\langle \mathcal{B}u, v\rangle_{U(Q_{0,T})} := \int\limits_0^T \langle B(t)u(t), v(t)\rangle_V \, dt, \qquad u, v \in U(Q_{0,T}), \tag{15}$$

$$\left(E(t)z\right)(x) := \int\limits_\Omega \zeta(x,t,y) z(y)\, dy, \qquad x \in \Omega, \qquad z \in [L^2(\Omega)]^n, \tag{16}$$

$$(\mathcal{E}u)(x,t) := \left(E(t)u(t)\right)(x) = \int\limits_\Omega \zeta(x,t,y) u(y,t)\, dy,$$

$$(x,t) \in Q_{0,T}, \qquad u \in [L^2(Q_{0,T})]^n. \tag{17}$$

Зауваження 1 **(**див. [6, лема 2, с. 112]**)**. Якщо виконується умова **(E)**, то оператори $E(t): [L^2(\Omega)]^n \to [L^2(\Omega)]^n$, $t \in (0,T)$, і $\mathcal{E}: [L^2(Q_{0,T})]^n \to [L^2(Q_{0,T})]^n$, означені в (16), (17), є лінійними обмеженими та неперервними. Крім того, для всіх $v \in [L^2(\Omega)]^n$ і $z \in [L^2(Q_{0,\tau})]^n$, $\tau \in (0,T]$, справджуються оцінки

$$\left\| |E(t)v|; L^2(\Omega) \right\| \le E^{00} \left\| v; [L^2(\Omega)]^n \right\|, \tag{18}$$

$$\left\| |\mathcal{E}z|; L^2(Q_{0,\tau}) \right\| \le E^{00} \left\| z; [L^2(Q_{0,\tau})]^n \right\|, \tag{19}$$

де стала $E^{00} > 0$ не залежить від z, v, τ.

Зауваження 2 **(**див. [6, зауваження 6, с. 112]**)**. Легко перевірити, що для $v \in [L^2(Q_{0,T})]^n$ справджується оцінка

$$\left\| |v|; L^2(Q_{0,\tau}) \right\|^2 \le n \left\| v; [L^2(Q_{0,\tau})]^n \right\|^2, \qquad \tau \in [0,T]. \tag{20}$$

Означення 1. Пару функцій $\{u, \pi\}$ називатимемо *слабким розв'язком* задачі (1)–(6), якщо $u \in L^\infty(0,T;V) \cap C([0,T];H)$, $u_t \in L^2(0,T;Z_1) \cap [L^{q(x)}(Q_{0,T})]^n \cap$ $\cap\, C([0,T];Z_1)$, $u_{tt} \in L^2(0,T;Z_1)$, $\pi \in L^{q^0/(q^0-1)}(Q_{0,T})$, u задовольняє початкові умови (5), (6) для всіх $v \in V$, і майже всіх $t \in (0,T)$ виконується рівність

$$(u_{tt}(t), v)_\Omega + \langle A(t)u_t(t), v\rangle_V + \langle B(t)u(t), v\rangle_V + (G(x,t,u_t), v)_\Omega +$$
$$+ (Eu_t(t), v)_\Omega = \langle f(t), v\rangle_V, \qquad t \in (0,T), \tag{21}$$

π задовольняє рівність (3) у сенсі простору $D^*(0,T)$ та рівність

$$u_{tt} + \mathcal{A}u_t + \mathcal{B}u + G(x,t,u_t) + \mathcal{E}u_t + \nabla\pi = f$$
$$\text{у просторі} \quad [D^*(Q_{0,T})]^n. \tag{22}$$

2. Формулювання та доведення основних результатів.

Теорема 1 (єдиність розв'язку**).** *Нехай виконуються умови* **(A)–(U)**. *Тоді задача* (1)–(6) *не може мати більше одного слабкого розв'язку* $\{u,\pi\}$.

Д о в е д е н н я. Використаємо метод від супротивного. Для цього припустимо, що $\{u,\pi\}$, $\{\tilde u,\tilde\pi\}$ – два різні слабкі розв'язки задачі (1)–(6) ($u \ne \tilde u$, $\pi \ne \tilde\pi$ на підмножині області $Q_{0,T}$ додатної міри). Приймемо, що $\omega := u - \tilde u$. Тоді для кожного $\tau \in (0,T]$ легко отримати таку рівність:

$$\int_0^\tau \Big[(\omega_{tt}(t), \omega_t(t))_\Omega + \langle A(t)\omega_t(t), \omega_t(t)\rangle_V + \langle B(t)\omega(t), \omega_t(t)\rangle_V +$$
$$+ ((G(x,t,u_t(t)) - G(x,t,\tilde u_t(t))), \omega_t(t))_\Omega +$$
$$+ (E(t)\omega_t(t), \omega_t(t))_\Omega \Big] dt = 0. \tag{23}$$

Перетворимо доданки рівності (23). Проінтегруємо частинами за t:

$$\int_0^\tau (\omega_{tt}(t), \omega_t(t))_\Omega \, dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_t} |\omega_t|^2 \, dx \Big|_{t=0}^{t=\tau} = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} |\omega_t|^2 \, dx.$$

На підставі умов **(A)**, **(B)** отримаємо оцінки

$$\int_0^\tau \langle A(t)\omega_t(t), \omega_t(t)\rangle_V \, dt \ge a_{00} \int_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n |\omega_{tx_i}|^2 \, dx\, dt,$$

$$\int_0^\tau \langle B(t)\omega(t), \omega_t(t)\rangle_V \, dt = \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t)\omega_{x_i}, \omega_{x_j})_{\mathbb{R}^n} \, dx \Big|_{t=0}^{t=\tau} -$$
$$- \frac{1}{2}\int_{Q_{0,\tau}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ijt}(x,t)\omega_{x_i}, \omega_{x_j})_{\mathbb{R}^n} \, dx\, dt \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} b_{00} \sum_{i=1}^n |\omega_{x_i}|^2 \, dx - \frac{1}{2}\int_{Q_{0,\tau}} b^1 \sum_{i=1}^n |\omega_{x_i}|^2 \, dx\, dt.$$

З умови **(G)** матимемо, що

$$((G(x,t,u_t(t)) - G(x,t,\tilde u_t(t))), \omega_t(t))_\Omega \ge 0.$$

З використанням нерівності Коші – Буняковського, оцінки (20) (див. зауваження 2) та оцінки (19) (див. зауваження 1) отримаємо таку нерівність:

$$\int_{Q_{0,\tau}} (E\omega_t, \omega_t)_{\mathbb{R}^n} \, dx\, dt \le \big\| |E\omega_t|; L^2(Q_{0,\tau}) \big\| \cdot \big\| |\omega_t|; L^2(Q_{0,\tau}) \big\| \le$$
$$\le n \big\| E\omega_t; [L^2(Q_{0,\tau})]^n \big\| \cdot \big\| \omega_t; [L^2(Q_{0,\tau})]^n \big\| \le$$

$$\le nE^{00}\left\|\omega_t;[L^2(Q_{0,\tau})]^n\right\|\cdot\left\|\omega_t;[L^2(Q_{0,\tau})]^n\right\| =$$

$$= nE^{00}\left\|\omega_t;[L^2(Q_{0,\tau})]^n\right\|^2 = nE^{00}\left(\sum_{\ell=1}^{n}\left\|\omega_{\ell t};L^2(Q_{0,\tau})\right\|\right)^2 \le$$

$$\le nE^{00}\left(n\max_{1\le\ell\le n}\left\|\omega_{\ell t};L^2(Q_{0,\tau})\right\|\right)^2 =$$

$$= n^3E^{00}\max_{1\le\ell\le n}\int_{Q_{0,\tau}}\left|\omega_{\ell t}\right|^2dx\,dt \le n^3E^{00}\int_{Q_{0,\tau}}\sum_{\ell=1}^{n}\left|\omega_{\ell t}\right|^2dx\,dt =$$

$$= n^3E^{00}\int_{Q_{0,\tau}}\left|\omega_t\right|^2dx\,dt. \tag{24}$$

Отже, з рівності (23) отримаємо нерівність

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left[\left|\omega_t\right|^2 + b_{00}\sum_{i=1}^{n}\left|\omega_{x_i}\right|^2\right]dx + a_{00}\int_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}\left|\omega_{tx_i}\right|^2dx\,dt \le$$

$$\le C_2\int_{Q_{0,\tau}}\left[\left|\omega_t\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|\omega_{x_i}\right|^2\right]dx\,dt, \qquad \tau\in(0,T], \tag{25}$$

де $C_2 > 0$ – деяка стала.

Позначимо $y(\tau) = \int_{\Omega_\tau}\left[\left|\omega_t\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|\omega_{x_i}\right|^2\right]dx$, $\tau\in(0,T]$. Тоді на підставі (25) матимемо, що

$$y(\tau)\le 2C_2\int_0^\tau y(t)\,dt, \qquad \tau\in(0,T].$$

Звідси, згідно з лемою Ґронуолла – Белмана, отримуємо, що $y(\tau)\le 0$, $\tau\in[0,T]$. Отже, $u=\tilde u$. Далі, на підставі (22), одержимо рівність $\nabla(\pi-\tilde\pi)=0$ у сенсі простору $[D^*(Q_{0,T})]^n$. Тоді з умови (3) матимемо, що $\pi=\tilde\pi$.

Теорему 1 доведено. ♦

Теорема 2 (існування слабкого розв'язку**)**. *Нехай виконуються умови* **(A)–(U)** *і, крім того,* A_{ij}, $i,j=1,\dots,n$, g_ℓ, $\ell=1,\dots,n$, *та* ζ *не залежать від* t, *і нехай* $q_0>2$, $q^0\le 3$. *Тоді задача* (1)–(6) *має слабкий розв'язок.*

Д о в е д е н н я. Використаємо метод Фаедо – Гальоркіна [12].

Крок 1 (побудова гальоркінських наближень). Нехай $\{w^j\}_{j\in\mathbb N}$ – база простору V, яку для спрощення вважатимемо ортогональною в просторі H. Розв'язок задачі (1)–(3) будемо шукати у вигляді

$$u^m(x,t)=\sum_{j=1}^{m}\varphi_j^m(t)w^j(x), \qquad (x,t)\in Q_{0,T}, \qquad m\in\mathbb N,$$

де невідомі скалярні функції $\varphi_1^m,\dots,\varphi_m^m$ задовольняють такі умови:

$$(u_{tt}^m(t),w^\mu)_\Omega + \left\langle Au_t^m(t),w^\mu\right\rangle_V + \left\langle B(t)u^m(t),w^\mu\right\rangle_V +$$
$$+\left(G(x,u_t^m(t)),w^\mu\right)_\Omega + \left(Eu_t^m(t),w^\mu\right)_\Omega = \left\langle f(t),w^\mu\right\rangle_\Omega,$$
$$t\in(0,T), \qquad \mu=1,\dots,m, \tag{26}$$

$$\varphi_1^m(0) = \alpha_1^m, \qquad \ldots, \qquad \varphi_m^m(0) = \alpha_m^m, \tag{27}$$

$$(\varphi_1^m)_t(0) = \beta_1^m, \qquad \ldots, \qquad (\varphi_m^m)_t(0) = \beta_m^m. \tag{28}$$

Тут $\alpha_1^m, \ldots, \alpha_m^m \in \mathbb{R}$, $\beta_1^m, \ldots, \beta_m^m \in \mathbb{R}$ такі, що

$$u_0^m(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j^m w^j(x), \qquad u_1^m(x) = \sum_{j=1}^m \beta_j^m w^j(x), \qquad x \in \Omega,$$

$$u_0^m \underset{m\to\infty}{\to} u_0 \quad \text{в} \quad V \cap [H^2(\Omega)]^n,$$

$$u_1^m \underset{m\to\infty}{\to} u_1 \quad \text{в} \quad H \cap [H^2(\Omega)]^n \cap [L^{q(x)}(\Omega)]^n.$$

Тоді

$$u^m\Big|_{t=0} = u_0^m, \tag{29}$$

$$u_t^m\Big|_{t=0} = u_1^m. \tag{30}$$

На підставі теореми 6 з [5, с. 11] отримуємо, що задача (26)–(28) має розв'язок такий, що $\varphi^m \in H^2(0,T;\mathbb{R}^m)$.

Крок 2 (отримання апріорних оцінок). Домножимо μ-те рівняння системи (26) на функцію $(\varphi_\mu^m)_t(t)$, підсумуємо за μ від 1 до m та проінтегруємо за $t \in (0,\tau) \subset [0,T]$. На підставі (12)–(15) отримаємо таку рівність:

$$\int_{Q_{0,\tau}} \Big[(u_{tt}^m, u_t^m)_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x) u_{tx_i}^m, u_{x_j t}^m)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t) u_{x_i}^m, u_{x_j t}^m)_{\mathbb{R}^n} + (G(x, u_t^m), u_t^m)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ (E u_t^m, u_t^m)_{\mathbb{R}^n} \Big] dx\,dt = \int_{Q_{0,\tau}} (f, u_t^m)_{\mathbb{R}^n}\, dx\,dt. \tag{31}$$

Перетворимо доданки цієї рівності. Проінтегруємо частинами за t, враховуючи (29), (30):

$$\int_{Q_{0,\tau}} (u_{tt}^m, u_t^m)_{\mathbb{R}^n}\, dx\,dt = \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} |u_t^m|^2\, dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega_0} |u_1^m|^2\, dx,$$

$$\int_{Q_{0,\tau}} \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(x,t) u_{x_i}^m, u_{x_j t}^m)_{\mathbb{R}^n}\, dx\,dt \ge \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau} b_{00} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^m|^2\, dx -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{\Omega} b^{00} \sum_{i=1}^n |u_{0,x_i}^m|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{Q_{0,\tau}} b^1 \sum_{i=1}^n |u_{0,x_i}^m|^2\, dx\,dt.$$

На підставі умов **(A)**, **(G)** запишемо нерівності

$$\int_{Q_{0,\tau}} \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}(x) u_{tx_i}^m, u_{x_j t}^m)_{\mathbb{R}^n}\, dx\,dt \ge a_{00} \int_{Q_{0,\tau}} \sum_{i=1}^n |u_{tx_i}^m|^2\, dx\,dt,$$

$$(G(x, u_t^m), u_t^m)_{\mathbb{R}^n} = \sum_{\ell=1}^n g_\ell(x)\, |u_{\ell t}^m|^{q(x)-2}\, |u_{\ell t}^m|^2 \ge g_0 \sum_{\ell=1}^n |u_{\ell t}^m|^{q(x)}.$$

Крім того, використавши нерівність Юнґа, матимемо оцінку

$$\left|\left(f, u_t^m\right)_{\mathbb{R}^n}\right| \le \frac{|f|^2}{2} + \frac{\left|u_t^m\right|^2}{2}.$$

Таким чином, з рівності (31) (див. також (24)) одержимо співвідношення

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\left|u_t^m\right|^2 + b_{00}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^m\right|^2\right]dx +$$

$$+ a_{00}\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{tx_i}^m\right|^2 dx\,dt + g_0\int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{\ell=1}^{n}\left|u_{\ell t}^m\right|^{q(x)} dx\,dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left[b^{00}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{0,x_i}^m\right|^2 + \left|u_1^m\right|^2\right]dx + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_{0,\tau}}|f|^2\,dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_{0,\tau}}\left[\frac{b^1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^m\right|^2 + \left(\frac{1}{2} + n^3E^{00}\right)\left|u_t^m\right|^2\right]dx\,dt. \qquad (32)$$

Позначимо

$$y(\tau) = \int\limits_{\Omega_\tau}\left[\left|u_t^m\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^m\right|^2\right]dx, \qquad \tau \in (0,T].$$

Тоді з (32) отримаємо нерівність

$$y(\tau) \le C_3 + C_4\int\limits_0^\tau y(t)\,dt, \qquad \tau \in (0,T], \qquad C_3, C_4 > 0.$$

Із леми Ґронуолла – Беллмана і цієї оцінки випливає, що

$$y(\tau) \le C_5, \qquad \tau \in (0,T], \qquad (33)$$

де стала $C_5 > 0$ не залежить від m. Із (32), (33) отримуємо нерівність

$$\int\limits_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^m(x,\tau)\right|^2 + \left|u_t^m(x,\tau)\right|^2\right]dx + \int\limits_{Q_{0,\tau}}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|u_{tx_i}^m\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^m\right|^2 +\right.$$

$$\left.+\left|u_t^m\right|^2\right]dx\,dt + \int\limits_{Q_{0,\tau}}\sum_{\ell=1}^{n}\left|u_{\ell t}^m\right|^{q(x)}dx\,dt \le C_6, \qquad (34)$$

де стала $C_6 > 0$ не залежить від m, τ.

На підставі (18) та (34) одержимо оцінки:

$$\left\|Eu_t^m; L^2(0,T;H)\right\| \le C_7, \qquad \left\|Eu_t^m; [L^2(Q_{0,T})]^n\right\| \le C_8,$$

де сталі $C_7 > 0$, $C_8 > 0$ не залежать від m.

Крім того, відповідно до леми 2.6 з [1, с. 63]) запишемо нерівності

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left(\left|u^m(x,\tau)\right|^2 + \left|u^m(x,\tau)\right|^{q(x)}\right)dx \le C_9,$$

$$\int\limits_{Q_{0,\tau}}\left|u^m(x,t)\right|^2 dx\,dt \le C_{10},$$

де сталі C_9, $C_{10} > 0$, не залежать від m.

Тоді існує підпослідовність $\{u^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ і функція u такі, що

$$u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} u \quad \text{*-слабко в} \quad L^\infty(0,T;V) \quad \text{і слабко в} \quad L^2(0,T;Z_1),$$

$$u_t^{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} u_t \quad \text{*-слабко в} \quad L^\infty(0,T;H),$$

$$u_t^{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} u_t \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T;Z_1) \quad \text{і слабко в} \quad [L^{q(x)}(Q_{0,T})]^n,$$

$$Eu_t^{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} \chi_1 \quad \text{слабко в} \quad [L^2(Q_{0,T})]^n. \tag{35}$$

Крок 3 (отримання додаткових оцінок). Із рівності (26) маємо співвідношення

$$\begin{gathered}(u_{tt}^m(t), w^\mu)_\Omega = (f(t), w^\mu)_\Omega - \langle Au_t^m(t), w^\mu\rangle_V - \langle B(t)u^m(t), w^\mu\rangle_V - \\ - (G(x, u_t^m(t)), w^\mu)_\Omega - (Eu_t^m(t), w^\mu)_\Omega, \\ t\in(0,T), \quad \mu = 1,\dots,m.\end{gathered} \tag{36}$$

Оскільки $\varphi^m \in H^2(0,T;\mathbb{R}^m) \subset C^1([0,T];\mathbb{R}^m)$, то з умов **(A)–(U)** випливає, що права частина рівності (36) є неперервною функцією за $t\in[0,T]$. Тому $\varphi^m \in C^2([0,T];\mathbb{R}^m)$ і в (36) можна прийняти, що $t = 0$:

$$\begin{gathered}(u_{tt}^m(0), w^\mu)_\Omega = (f(0), w^\mu)_\Omega - \langle Au_1^m, w^\mu\rangle_V - \langle B(0)u_0^m, w^\mu\rangle_V - \\ - (G(x, u_1^m), w^\mu)_\Omega - (Eu_1^m, w^\mu)_\Omega, \quad \mu = 1,\dots,m.\end{gathered}$$

Застосувавши формулу інтегрування частинами у правій частині (36), матимемо рівність

$$\begin{gathered}(u_{tt}^m(0), w^\mu)_\Omega = \Bigg(\Bigg(f(0) - \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}u_{1x_i}^m)_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(0)u_{0x_i}^m)_{x_j} - \\ - G(x,u_1^m) - Eu_1^m\Bigg), w^\mu\Bigg)_\Omega, \quad \mu = 1,\dots,m.\end{gathered}$$

На підставі твердження 2 для $\mathcal{V} = \mathcal{H} = [L^2(\Omega)]^n$ отримаємо рівність

$$\begin{gathered}u_{tt}^m(0) = P_m\Bigg(f(0) - \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}u_{1x_i}^m)_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(0)u_{0x_i}^m)_{x_j} - \\ - G(x,u_1^m) - Eu_1^m\Bigg).\end{gathered}$$

Тоді з умов **(U), (F)** і твердження 1 запишемо оцінку

$$\begin{gathered}\| u_{tt}^m(0);[L^2(\Omega)]^n \| = \Bigg\| P_m\Bigg(f(0) - \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}u_{1x_i}^m)_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(0)u_{0x_i}^m)_{x_j} - \\ - G(x,u_1^m) - Eu_1^m\Bigg);[L^2(\Omega)]^n \Bigg\| \le \\ \le \Bigg\| f(0) - \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}u_{1x_i}^m)_{x_j} - \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}(0)u_{0x_i}^m)_{x_j} - \end{gathered}$$

$$
-G(x,u_1^m)-Eu_1^m\Big);[L^2(\Omega)]^n\Big\| \le C_{11}, \tag{37}
$$

де стала $C_{11}>0$ не залежить від m.

Продиференціюємо (26) за t, домножимо на $(\varphi_\mu^m)_{tt}(t)$, підсумуємо за $\mu=1,\dots,m$ та проінтегруємо за $t\in(0,\tau)\subset[0,T]$. На підставі (12)–(15) та теореми 2.2 з [1, с. 65]) отримаємо рівність

$$
\int_{Q_{0,\tau}}\Big[(u_{ttt}^m,u_{tt}^m)_{\mathbb{R}^n}+\sum_{i,j=1}^n(A_{ij}(x)u_{ttx_i}^m,u_{x_jtt}^m)_{\mathbb{R}^n}+
$$

$$
+\sum_{i,j=1}^n(B_{ijt}(x,t)u_{x_i}^m,u_{x_jtt}^m)_{\mathbb{R}^n}+\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)u_{x_it}^m,u_{x_jtt}^m)_{\mathbb{R}^n}+
$$

$$
+(q(x)-1)\sum_{\ell=1}^n g_\ell(x)\,|u_{\ell t}^m|^{q(x)-2}\,|u_{\ell tt}^m|^2+(Eu_{tt}^m,u_{tt}^m)_{\mathbb{R}^n}\Big]dx\,dt=
$$

$$
=\int_{Q_{0,\tau}}(f_t,u_{tt}^m)_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt,\qquad \tau\in(0,T]. \tag{38}
$$

Зафіксуємо значення $\tau\in(0,T]$ Виконавши в (38) інтегрування частинами за t, одержимо рівності:

$$
\int_{Q_{0,\tau}}(u_{ttt}^m,u_{tt}^m)_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt=\frac12\int_{\Omega_\tau}|u_{tt}^m(x,\tau)|^2\,dx-\frac12\int_{\Omega_0}|u_{tt}^m(x,0)|^2\,dx,
$$

$$
\int_{Q_{0,\tau}}\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)u_{x_it}^m,u_{x_jtt}^m)_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt=
$$

$$
=\frac12\int_\Omega\sum_{i,j=1}^n(B_{ij}(x,t)u_{x_it}^m,u_{x_jt}^m)_{\mathbb{R}^n}dx\Big|_{t=0}^{t=\tau}-
$$

$$
-\frac12\int_{Q_{0,\tau}}\sum_{i,j=1}^n(B_{ijt}(x,t)u_{x_it}^m,u_{x_jt}^m)_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt\ge
$$

$$
\ge\frac12\int_{\Omega_\tau}b_{00}\sum_{i=1}^n|u_{x_it}^m|^2dx-\frac12\int_\Omega b^{00}\sum_{i=1}^n|u_{1,x_i}^m|^2dx-
$$

$$
-\frac12\int_{Q_{0,\tau}}b^1\sum_{i=1}^n|u_{x_it}^m|^2dx\,dt.
$$

З умов **(A)**, **(B)**, **(G)** та нерівності (18) матимемо співвідношення

$$
\int_{Q_{0,\tau}}\Big[\sum_{i,j=1}^n(\mathrm{A}_{ij}(x)u_{ttx_i}^m,u_{x_jtt}^m)_{\mathbb{R}^n}+
$$

$$
+(q(x)-1)\sum_{\ell=1}^n g_\ell(x)|u_{\ell t}^m|^{q(x)-2}|u_{\ell tt}^m|^2\Big]dx\,dt\ge
$$

$$
\ge a_{00}\int_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^n|u_{ttx_i}^m|^2\,dx\,dt,
$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ijt}u_{x_i}^m, u_{x_jtt}^m)_{\mathbb{R}^n}\right| \le C_{12}\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_itt}^m\right|^2 + C(\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^m\right|^2,$$

$$\varepsilon > 0, \qquad C_{12} > 0, \qquad C(\varepsilon) > 0,$$

$$\left|-(Eu_{tt}^m, u_{tt}^m)_{\mathbb{R}^n}\,dx\,dt\right| \le n^3E^{00}\int_{Q_{0,\tau}}\left|u_{tt}^m\right|^2 dx\,dt.$$

Остаточно, (38) перепишемо у вигляді

$$\int_{\Omega_\tau}\left[\frac{1}{2}\left|u_{tt}^m(x,\tau)\right|^2 + \frac{b_{00}}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_it}^m(x,\tau)\right|^2\right]dx +$$

$$+(a_{00} - C_{12}\varepsilon)\int_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{ttx_i}^m\right|^2 dx\,dt \le$$

$$\le C_{13}\left(\int_{\Omega}\left|u_{tt}^m(x,0)\right|^2 dx + \int_{\Omega}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{1,x_i}^m\right|^2 dx +\right.$$

$$+C(\varepsilon)\int_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_i}^m\right|^2 dx\,dt + \int_{Q_{0,\tau}}\left|f_t\right|^2 dx\,dt +$$

$$\left.+\int_{Q_{0,\tau}}\left(\left|u_{tt}^m\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_it}^m\right|^2\right)dx\,dt\right), \tag{39}$$

де стала $C_{13} > 0$.

Нехай

$$y(\tau) = \int_{\Omega_\tau}\left[\left|u_{tt}^m\right|^2 + \sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_it}^m\right|^2\right]dx, \qquad \tau \in (0,T].$$

На підставі (37) запишемо нерівність $\int_{\Omega}\left|u_{tt}^m(x,0)\right|^2 dx \le C_{11}$. Тоді, вибираючи $\varepsilon > 0$ достатньо малим, із (39) отримуємо оцінку

$$y(\tau) \le C_{14} + C_{15}\int_0^\tau y(t)\,dt, \qquad \tau \in (0,T],$$

де сталі C_{14}, $C_{15} > 0$ не залежать від m, τ.

Тоді, згідно з лемою Ґронуолла − Беллмана та (39), матимемо, що

$$\int_{\Omega_\tau}\left[\sum_{i=1}^{n}\left|u_{x_it}^m\right|^2 + \left|u_{tt}^m\right|^2\right]dx + \int_{Q_{0,\tau}}\sum_{i=1}^{n}\left|u_{ttx_i}^m\right|^2 dx\,dt \le C_{16},$$

$$\tau \in (0,T], \tag{40}$$

де стала $C_{16} > 0$ не залежить від m і τ.

Крок 4 (перехід до границі). Оцінка (40) забезпечує збіжності

$$u_{tt}^{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} u_{tt} \quad \text{*-слабко в} \quad L^\infty(0,T;H) \quad \text{і слабко в} \quad L^2(0,T;Z_1),$$

$$u_{ttx_i}^{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} u_{ttx_i} \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T;H), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Тоді з (35) та згідно з теоремою Релліха − Кондрашова (див. [12, с. 25]) одержимо, що

$$u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} u \quad \text{сильно в} \quad \left[L^2(Q_{0,T})\right]^n \quad \text{і майже всюди в} \quad Q_{0,T},$$

$$u_t^{m_k} \underset{k\to\infty}{\to} u_t \quad \text{сильно в} \quad L^2(0,T;Z_1) \quad \text{і майже всюди в} \quad Q_{0,T}.$$

Оскільки оператор E лінійний, то $\chi_1 = Eu_t$ (див. (35)).

Нехай $\psi \in C^1([0,T])$. Домноживши (26) на $\psi(t)$ та проінтегрувавши за $t \in [0,T]$, отримаємо рівність

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[(u_{tt}^m, w^\mu\psi)_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i,j=1}^n (A_{ij}u_{tx_i}^m, w_{x_j}^\mu\psi)_{\mathbb{R}^n} + \sum_{i,j=1}^n (B_{ij}u_{x_i}^m, w_{x_j}^\mu\psi)_{\mathbb{R}^n} +$$

$$+ (G(x,u_t^m), w^\mu\psi)_{\mathbb{R}^n} + (Eu_t^m, w^\mu\psi)_{\mathbb{R}^n}\Big] dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_{0,T}} (f, w^\mu\psi)_{\mathbb{R}^n}\, dx\,dt.$$

Поклавши у цій рівності $m = m_k$ і спрямувавши $k \to \infty$, після деяких перетворень одержимо

$$\langle \mathcal{F}, w\rangle_{U(Q_{0,T})} = 0 \qquad \forall w \in U(Q_{0,T}), \tag{41}$$

де $\mathcal{F} := u_{tt} + \mathcal{B}u_t + \mathcal{A}u + G(x,t,u_t) + \mathcal{E}u_t - f$. Таким чином, виконується рівність (21).

<u>Крок 5</u> (функція π). Покладемо в (41) $w(x,t) = v(x)\varphi(t)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$. Тоді

$$\int\limits_0^T \langle \mathcal{F}(t), v\rangle_{[D(\Omega)]^n}\,\varphi(t)\,dt = 0, \qquad v \in [D(\Omega)]^n, \qquad \varphi \in D(0,T).$$

Звідси отримуємо, що виконується рівність (9).

Легко бачити, що

$$\mathcal{F} \in L^2(0,T;[H^{-1}(\Omega)]^n) + \left[L^{q^0/(q^0-1)}(Q_{0,T})\right]^n \subset$$

$$\subset W^{0,q^0/(q^0-1)}(0,T;\left[W^{-1,q^0/(q^0-1)}(\Omega)\right]^n).$$

Тоді на підставі узагальненої теореми De Rham-a (див. твердження 3 з $s_1 = 0$, $h_1 = h_2 = q^0/(q^0-1)$) існує функція

$$\pi \in W^{0,q^0/(q^0-1)}(0,T;W^{0,q^0/(q^0-1)}(\Omega)) = L^{q^0/(q^0-1)}(Q_{0,T})$$

така, що виконуються рівності (10), (11). Таким чином, π задовольняє (1) у просторі $[D^*(Q_{0,T})]^n$ і умову (3) в просторі $D^*(0,T)$. Крім того,

$$\nabla\pi = F \in L^{q^0/(q^0-1)}(0,T;[W^{-1,q^0/(q^0-1)}(\Omega)]^n).$$

Теорему 2 доведено. ♦

Висновки. У цій роботі досліджується задача для нелінійної гіперболічної системи Стокса третього порядку в обмеженій області. Нелінійний доданок системи містить змінний показник нелінійності q, який задовольняє умову $q \in (2,3]$ і є функцією від просторових змінних. Задача вивчається в звичайних просторах Соболєва та узагальнених просторах Лебеґа, що є цілком природним у цьому випадку. Одержано певні умови існування та єдиності слабкого розв'язку такої задачі. Для доведення теореми існування використано метод Фаедо – Гальоркіна, а для доведення єдиності – метод від супротивного.

1. *Бугрій О. М.* Задачі для нелінійних параболічних рівнянь та варіаційних нерівностей зі змінними показниками нелінійності // Дис. … д-ра фіз.-мат. наук. – Львів, 2017. – 342 с.
2. *Acerbi E., Mingione G., Seregin G. A.* Regularity results for parabolic systems related to a class of non-Newtonian fluids // Annales de l'Institut Henri Poincare. Analyse non linéaire. – 2004. – **21**, No. 1. – P. 25–60. – https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2002.11.002.
3. *Buhrii O. M.* Visco-plastic, newtonian, and dilatant fluids: Stokes equations with variable exponent of nonlinearity // Мат. студії. – 2018. – **49**, № 2. – С. 165–180. – https://doi.org/10.15330/ms.49.2.165-180.
4. *Buhrii O., Buhrii N.* Integro-differential systems with variable exponents of nonlinearity // Open Math. – 2017. – **15**. – С. 859–883. – https:doi.org/10.1515/math-2017-0069.
5. *Buhrii O., Buhrii N., Kholyavka O.* On Caratheodory – Lasalle's theorems for systems of ordinary differential equations and their application // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2019. – Вип. 27. – С. 9–17. – https://doi.org/10.30970/vam.2019.27.10405.
6. *Buhrii O., Khoma M.* On initial-boundary value problem for nonlinear integro-differential Stokes system // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Мех.-мат. – 2018. – Вип. 85. – P. 107–119. – http://doi.org/10.30970/vmm.2018.85.107-119.
7. *Fan X., Zhao D.* On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$ // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – **263**, No. 2. – P. 424–446. – https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.7617.
8. *Kaltenbach A.* Pseudo-monotone operator theory for unsteady problems with variable exponents. – Cham: Springer, 2023. – xiii+358 p.
9. *Kobayashi T., Kubo T., Nakamura K.* On a local energy decay estimate of solutions to the hyperbolic type Stokes equations // J. Differ. Equat. – 2018. – **264**, No. 10. – P. 6061–6081. – https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.01.029.
10. *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. – 1991. – **41**, No. 4. – P. 592–618. – http://doi.org/10.21136/CMJ.1991.102493.
11. *Langa J. A., Real J., Simon J.* Existence and regularity of the pressure for the stochastic Navier – Stokes equations // Appl. Math. Optim. – 2003. – **48**, No. 3. – P. 195–210. – https://doi.org/10.1007/s00245-003-0773-7.
12. *Lions J. L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. – Paris: Dunod, Gauthier-Villars, 1969. – xx+554 p.
13. *Mashiyev R. A., Buhrii O. M.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – **377**, No. 2. – P. 450–463. – https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2010.11.006.
14. *Oliveira H. B.* Existence of weak solutions for the generalized Navier – Stokes equations with damping // Nonlinear Differ. Equat. Appl. – 2013. – **20**. – P. 797–824. – https://doi.org/10.1007/s00030-012-0180-3.
15. *Racke R., Saal J.* Global solutions to hyperbolic Navier – Stokes equations // Konstanzer Schriften in Mathematik. – 2010. – No. 268. – P. 1–20.
16. *Racke R., Saal J.* Hyperbolic Navier – Stokes equations I: Local well-posedness // Evolut. Equat. Control Theory. – 2012. – **1**, No. 1. – P. 195–215. – https://doi.org/10.3934/eect.2012.1.195.
17. *Racke R., Saal J.* Hyperbolic Navier – Stokes equations II: Global existence of small solutions // Evolut. Equat. Control Theory. – 2012. – **1**, No. 1. – P. 217–234. – https://doi.org/10.3934/eect.2012.1.217.
18. *Růžička M.* Electrorheologica fluids: Modeling and mathematical theory. – Lect. Notes in Math. – **1748**. – Berlin: Springer, 2000. – xiv+178 p. – https://doi.org/10.1007/BFb0104029.
19. *Suhubi E.* Functional analysis. – Dordrecht, etc.: Kluwer Acad. Publ., 2003. – 703 p.
20. *Temam R.* Navier – Stokes equations: Theory and numerical analysis. – Amsterdam, etc.: North-Holland Publ. Co., 1979. – 519 p.

HYPERBOLIC STOKES SYSTEM OF THE THIRD ORDER WITH VARIABLE EXPONENT OF NONLINEARITY

The problem for evolution Stokes system of the third order with variable exponent of nonlinearity is investigated. Sufficient conditions of existence and uniqueness of the weak solution for such problem in the corresponding functional spaces are established.

Key words: *hyperbolic Stokes system, equations of third order, weak solution, variable exponent of nonlinearity, nonlocal integral addend.*

[1] Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[3] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
12.01.23