УДК 512.813: 517.957.6

В. М. Федорчук[✉], В. І. Федорчук

ПРО ЧАСТКОВУ ПОПЕРЕДНЮ ГРУПОВУ КЛАСИФІКАЦІЮ ПЕВНОГО КЛАСУ (1+3)-ВИМІРНИХ РІВНЯНЬ МОНЖА – АМПЕРА. I. ОДНОВИМІРНІ АЛГЕБРИ ЛІ

Вивчається часткова попередня групова класифікація певного класу (1+3)-вимірних рівнянь Монжа – Ампера. Наведено результати, отримані з використанням одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ *та нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку цих підалгебр.*

Ключові слова: *попередня групова класифікація, рівняння Монжа – Ампера, неспряжені підалгебри алгебр Лі, диференціальні інваріанти, група Пуанкаре* $P(1,4)$.

Побудова математичних моделей реальних процесів природи досить часто зводиться до побудови класів диференціальних рівнянь. Відомо, що групова класифікація є одним із потужних методів для дослідження класів диференціальних рівнянь. Історія методів групової класифікації сягає Софуса Лі [22]. Сучасне формулювання проблеми групової класифікації диференціальних рівнянь було запропоновано Л. В. Овсянніковим [3].

Для групової класифікації диференціальних рівнянь можна, зокрема, використовувати класичний метод Лі – Овсяннікова [3, 22]. На сьогодні опубліковано багато робіт, пов’язаних із застосуваннями та подальшою розробкою класичного методу Лі – Овсяннікова [1, 2, 11, 12, 24, 30] (див. також цитовану там літературу).

Класи рівнянь Монжа – Ампера в просторах різних вимірностей і різних типів отримуються при розв’язуванні різноманітних задач геометрії, теоретичної фізики, геометричної оптики, оптимального переносу, одновимірної газової динаміки, метеорології та океанографії тощо. На сьогодні опубліковано велику кількість робіт, присвячених дослідженню таких класів рівнянь, зокрема [4, 7–10, 13–15, 18–21, 23, 25–29, 31] (див. також цитовану там літературу).

У цій роботі наводимо деякі результати, що стосуються часткової попередньої групової класифікації певного класу (1+3)-вимірних рівнянь Монжа – Ампера.

Для цього спочатку розглянемо деякі результати, що стосуються алгебри Лі групи $P(1,4)$ та її неспряжених підалгебр.

1. Алгебра Лі групи $P(1,4)$ **та її неспряжені підалгебри.** Група Пуанкаре $P(1,4)$ є групою поворотів і зсувів п’ятивимірного простору Мінковського $M(1,4)$. Серед важливих для теоретичної і математичної фізики груп група $P(1,4)$ посідає особливе місце. Вона є найменшою групою, яка містить як підгрупи групи симетрії релятивістської фізики (група Пуанкаре $P(1,3)$) та нерелятивістської фізики (розширена група Ґалілея $\tilde{G}(1,3)$ [18].

Алгебра Лі групи $P(1,4)$ задається 15-ма базисними елементами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$, $\mu,\nu = 0,1,2,3,4$, і P_μ, $\mu = 0,1,2,3,4$, які задовольняють комутаційні співвідношення

$$[P_\mu, P_\nu] = 0,$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = g_{\nu\sigma}P_\mu - g_{\mu\sigma}P_\nu,$$

✉ vasfed@gmail.com

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho},$$

де $g_{\mu\nu}$ – компоненти метричного тензора, $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$ і $g_{\mu\nu} = 0$, якщо $\mu \neq \nu$, $\mu, \nu, \sigma, \rho = 0, 1, 2, 3, 4$

У цій роботі розглядатимемо таке зображення [6] для алгебри Лі групи $P(1,4)$:

$$P_0 = \frac{\partial}{\partial x_0}, \qquad P_1 = -\frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad P_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$P_3 = -\frac{\partial}{\partial x_3}, \qquad P_4 = -\frac{\partial}{\partial u}, \qquad M_{\mu\nu} = x_\mu P_\nu - x_\nu P_\mu, \qquad x_4 \equiv u.$$

Надалі перейдемо від $M_{\mu\nu}$ і P_μ до таких лінійних комбінацій:

$$G = M_{04}, \qquad L_1 = M_{23}, \qquad L_2 = -M_{13}, \qquad L_3 = M_{12},$$

$$P_a = M_{a4} - M_{0a}, \qquad C_a = M_{a4} + M_{0a}, \qquad a = 1, 2, 3,$$

$$X_0 = \frac{P_0 - P_4}{2}, \qquad X_k = P_k, \qquad k = 1, 2, 3, \qquad X_4 = \frac{P_0 + P_4}{2}.$$

Класифікацію всіх неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ (вимірності яких не перевищують 3) в класи ізоморфних підалгебр проведено у праці [5].

2. Про часткову попередню групову класифікацію деякого класу (1+3)-вимірних рівнянь Монжа – Ампера. У цій роботі розглядаємо клас рівнянь Монжа – Ампера вигляду

$$\det(u_{\mu\nu}) = F(x_0, x_1, x_2, x_3, u, u_0, u_1, u_2, u_3), \tag{1}$$

де

$$u = u(x), \quad x = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in M(1,3), \quad u_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu}, \quad u_\alpha \equiv \frac{\partial u}{\partial x_\alpha},$$

$\mu, \nu, \alpha = 0, 1, 2, 3$. Тут $M(1,3)$ – (1+3)-вимірний простір Мінковського.

Для групової класифікації цього класу використовуємо класичний підхід Лі – Овсяннікова [3, 22].

Із результатів, отриманих В. І. Фущичем і М. І. Сєровим [6], зокрема, випливає, що перетворення групи $P(1,4)$ належать до групи еквівалентності класу (1).

Результати класифікації [5] одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$ сформулюємо наступним чином.

Твердження 1. *Алгебра Лі групи* $P(1,4)$ *містить* 20 *одновимірних неспряжених підалгебр.*

Часткову попередню групову класифікацію класу рівнянь, що розглядається, проведемо з використанням нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Більше деталей про нееквівалентні функціональні базиси можна знайти у [16, 17] (див. також цитовану там літературу).

Із отриманих результатів випливає, що існує 20 підкласів, які є інваріантними відносно одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Всі ці підкласи можемо записати таким чином:

$$\det(u_{\mu\nu}) = \Phi(J_1, J_2, \ldots, J_8),$$

де $\{J_1, J_2, \ldots, J_8\}$ – нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$.

Тому нижче для всіх підкласів наводимо тільки базисні елементи одновимірних неспряжених підалгебр і відповідні їм нееквівалентні функціональні базиси диференціальних інваріантів першого порядку.

1. $\langle G \rangle$:

$$J_1 = x_1, \quad J_2 = x_2, \quad J_3 = x_3, \quad J_4 = (x_0^2 - u^2)^{1/2},$$

$$J_5 = (x_0 + u)^2 \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1}, \quad J_6 = \frac{u_1}{u_2}, \quad J_7 = \frac{u_1}{u_3}, \quad J_8 = \frac{u_1^2}{u_0^2 - 1},$$

2. $\langle L_3 + eG, e > 0 \rangle$:

$$J_1 = x_3, \quad J_2 = (x_0^2 - u^2)^{1/2}, \quad J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},$$

$$J_4 = \ln(x_0 + u) + e \arctan \frac{x_1}{x_2}, \quad J_5 = \frac{u_3^2}{u_0^2 - 1}, \quad J_6 = \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{x_1 u_1 + x_2 u_2},$$

$$J_7 = (x_0 + u)^2 \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1}, \quad J_8 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_0^2 - 1}.$$

3. $\langle P_3 + C_3 + 2L_3 \rangle$:

$$J_1 = x_0, \quad J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_3 = (x_3^2 + u^2)^{1/2}, \quad J_4 = \frac{u_3 u + x_3}{u - x_3 u_3},$$

$$J_5 = \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{x_1 u_1 + x_2 u_2}, \quad J_6 = \frac{u_1 + u_2 u_3}{u_2 - u_1 u_3}, \quad J_7 = \frac{u_3^2 + 1}{u_0^2}, \quad J_8 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_0^2}.$$

4. $\langle P_3 + C_3 + eL_3, e > 2 \rangle$:

$$J_1 = x_0, \quad J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_3 = (x_3^2 + u^2)^{1/2}, \quad J_4 = \frac{u_3 u + x_3}{u - x_3 u_3},$$

$$J_5 = \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{x_1 u_1 + x_2 u_2}, \quad J_6 = 2 \arctan \frac{u_1}{u_2} + e \arctan u_3,$$

$$J_7 = \frac{u_3^2 + 1}{u_0^2}, \quad J_8 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_0^2}.$$

5. $\langle G + cX_1, c < 0 \rangle$:

$$J_1 = x_1 - c \ln(x_0 + u), \quad J_2 = x_2, \quad J_3 = x_3, \quad J_4 = (x_0^2 - u^2)^{1/2},$$

$$J_5 = (x_0 + u)^2 \frac{1 - u_0}{u_0 + 1}, \quad J_6 = \frac{u_1}{u_2}, \quad J_7 = \frac{u_1}{u_3}, \quad J_8 = \frac{u_1^2}{u_0^2 - 1}.$$

6. $\langle L_3 + eG + æ_3 X_3, e > 0, æ_3 < 0 \rangle$:

$$J_1 = (x_0^2 - u^2)^{1/2}, \quad J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_3 = æ_3 \ln(x_0 + u) - e x_3,$$

$$J_4 = x_3 + x_3 \operatorname{arc\,tan} \frac{x_1}{x_2}, \quad J_5 = \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{x_1 u_1 + x_2 u_2},$$

$$J_6 = u_3 \frac{x_0 + u}{u_0 + 1}, \quad J_7 = \frac{u_3^2}{u_0^2 - 1}, \quad J_8 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_3^2}.$$

7. $\langle P_3 + C_3 + eL_3 + \alpha(X_0 + X_4), e > 2, \alpha < 0 \rangle$:

$$J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_2 = (x_3^2 + u^2)^{1/2}, \quad J_3 = \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{x_1 u_1 + x_2 u_2},$$

$$J_4 = 2x_0 + \alpha \operatorname{arc\,tan} u_3, \quad J_5 = 2 \operatorname{arc\,tan} \frac{x_1}{x_2} + e \operatorname{arc\,tan} u_3,$$

$$J_6 = \frac{u_3 u + x_3}{u - x_3 u_3}, \quad J_7 = \frac{u_3^2 + 1}{u_0^2}, \quad J_8 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_0^2}.$$

8. $\langle P_3 + C_3 + 2L_3 + \alpha(X_0 + X_4), \alpha < 0 \rangle$:

$$J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_2 = (x_3^2 + u^2)^{1/2}, \quad J_3 = \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{x_1 u_1 + x_2 u_2},$$

$$J_4 = 2x_0 + \alpha \operatorname{arc\,tan} u_3, \quad J_5 = \frac{u_3 x_2 + x_1}{u_3 x_1 - x_2}, \quad J_6 = \frac{u_3 u + x_3}{u - x_3 u_3},$$

$$J_7 = \frac{u_3^2 + 1}{u_0^2}, \quad J_8 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{u_0^2}.$$

Зауважимо, що наступні 12 неспряжених підалгебр належать до алгебри Лі розширеної групи Ґалілея $\tilde{G}(1,3) \subset P(1,4)$.

1. $\langle P_3 \rangle$:

$$J_1 = x_1, \quad J_2 = x_2, \quad J_3 = x_0 + u,$$

$$J_4 = (x_0^2 - x_3^2 - u^2)^{1/2}, \quad J_5 = \frac{x_3}{x_0 + u} + \frac{u_3}{u_0 + 1},$$

$$J_6 = \frac{u_1}{u_2}, \quad J_7 = \frac{u_1}{u_0 + 1}, \quad J_8 = \frac{u_3^2}{(u_0 + 1)^2} + \frac{2}{u_0 + 1}.$$

2. $\langle L_3 - P_3 \rangle$:

$$J_1 = x_0 + u, \quad J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_3 = (x_0^2 - x_3^2 - u^2)^{1/2},$$

$$J_4 = \operatorname{arc\,tan} \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_3}{x_0 + u}, \quad J_5 = \frac{x_3}{x_0 + u} + \frac{u_3}{u_0 + 1},$$

$$J_6 = \frac{u_3^2}{(u_0 + 1)^2} + \frac{2}{u_0 + 1}, \quad J_7 = \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{x_1 u_1 + x_2 u_2}, \quad J_8 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_0 + 1)^2}.$$

3. $\langle L_3 \rangle$:

$$J_1 = x_0, \quad J_2 = x_3, \quad J_3 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_4 = u,$$

$$J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad J_6 = u_0,$$

$$J_7 = u_3, \quad J_8 = u_1^2 + u_2^2.$$

4. $\langle X_0 + X_4 \rangle$:

$$J_1 = x_1, \quad J_2 = x_2, \quad J_3 = x_3, \quad J_4 = u,$$

$$J_5 = u_0, \quad J_6 = u_1, \quad J_7 = u_2, \quad J_8 = u_3.$$

5. $\langle X_0 - X_4 \rangle$:

$$J_1 = x_0, \quad J_2 = x_1, \quad J_3 = x_2, \quad J_4 = x_3,$$

$$J_5 = u_0, \quad J_6 = u_1, \quad J_7 = u_2, \quad J_8 = u_3.$$

6. $\langle X_4 \rangle$:

$$J_1 = x_1, \quad J_2 = x_2, \quad J_3 = x_3, \quad J_4 = x_0 + u,$$

$$J_5 = u_0, \quad J_6 = u_1, \quad J_7 = u_2, \quad J_8 = u_3.$$

7. $\langle P_3 + X_0 \rangle$:

$$J_1 = x_1, \quad J_2 = x_2, \quad J_3 = (x_0 + u)^2 - 2x_3,$$

$$J_4 = x_0 - u + \frac{2}{3}(x_0 + u)^3 - 2x_3(x_0 + u), \quad J_5 = x_0 + u + \frac{u_3}{u_0 + 1},$$

$$J_6 = \frac{u_1}{u_2}, \quad J_7 = \frac{u_1}{u_0 + 1}, \quad J_8 = \frac{u_3^2}{(u_0 + 1)^2} + \frac{2}{u_0 + 1}.$$

8. $\langle P_3 + X_1 \rangle$:

$$J_1 = x_2, \quad J_2 = x_0 + u, \quad J_3 = x_1(x_0 + u) + x_3,$$

$$J_4 = x_3^2 + 2u(x_0 + u), \quad J_5 = x_1 - \frac{u_3}{u_0 + 1}, \quad J_6 = \frac{u_1}{u_2},$$

$$J_7 = \frac{u_1}{u_0 + 1}, \quad J_8 = \frac{u_3^2}{(u_0 + 1)^2} + \frac{2}{u_0 + 1}.$$

9. $\langle L_3 - P_3 + \alpha_0 X_0, \alpha_0 < 0 \rangle$:

$$J_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_2 = \alpha_0 \arctan \frac{x_1}{x_2} - x_0 - u,$$

$$J_3 = 2(x_0 + u)^3 + 3\alpha_0^2(x_0 - u) + 6\alpha_0 x_3(x_0 + u),$$

$$J_4 = (x_0 + u)^2 + 2\alpha_0 x_3, \quad J_5 = \frac{x_1 u_2 - x_2 u_1}{x_1 u_1 + x_2 u_2},$$

$$J_6 = x_0 + u - \alpha_0 \frac{u_3}{u_0 + 1}, \quad J_7 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_0 + 1)^2}, \quad J_8 = \frac{u_3^2}{(u_0 + 1)^2} + \frac{2}{u_0 + 1}.$$

10. $\left\langle L_3 + \tilde{d}(X_0 + X_4), \tilde{d} < 0 \right\rangle$:

$$J_1 = x_3, \quad J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_3 = x_0 - \tilde{d} \arctan \frac{x_1}{x_2}, \quad J_4 = u,$$

$$J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad J_6 = u_0, \quad J_7 = u_3, \quad J_8 = u_1^2 + u_2^2.$$

11. $\left\langle L_3 + aX_3, a < 0 \right\rangle$:

$$J_1 = x_0, \quad J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_3 = x_3 + a \arctan \frac{u_1}{u_2}, \quad J_4 = u,$$

$$J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad J_6 = u_0, \quad J_7 = u_3, \quad J_8 = u_1^2 + u_2^2.$$

12. $\left\langle L_3 - X_4 \right\rangle$:

$$J_1 = x_0 + u, \quad J_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad J_3 = x_3,$$

$$J_4 = x_0 - u - \arctan \frac{u_2}{u_1}, \quad J_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \quad J_6 = u_0,$$

$$J_7 = u_3, \quad J_8 = u_1^2 + u_2^2.$$

Висновки. З використанням одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ та нееквівалентних функціональних базисів диференціальних інваріантів першого порядку цих підалгебр виконано часткову попередню групову класифікацію певного класу (1+3)-вимірних рівнянь Монжа – Ампера. Наведено 20 підкласів досліджуваного класу, які є інваріантними відносно одновимірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$.

1. *Ибрагимов Н. Х.* К групповой классификации дифференциальных уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. – 1968. – **183**, № 2. – С. 274–277.
   Те саме: *Ibragimov N. H.* On the group classification of differential equations of second order // Sov. Math. Dokl. – 1968. – **9**, No. 6. – P. 1365–1369.
2. *Лагно В. І., Спічак С. В., Стогній В. І.* Симетрійний аналіз рівнянь еволюційного типу // Математика та її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – **45**. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – 360 с.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – Москва: Наука, 1978. – 399 с.
   Те саме: *Ovsiannikov L. V.* Group analysis of differential equations. – New York etc.: Acad. Press, 1982. – xvi+416 p.
4. *Погорелов А. В.* Многомерная проблема Минковского. – Москва: Наука, 1975. – 95 с.
5. *Федорчук В. М., Федорчук В. І.* Про класифікацію низькорозмірних неспряжених підалгебр алгебри Лі групи Пуанкаре $P(1,4)$ // Симетрія і інтегровність рівнянь математичної фізики: Зб. праць Ін-ту математики НАН України / Відп. ред. А. Г. Нікітін. – 2006. – **3**, № 2. – С. 301–307.
6. *Фущич В. И., Серов Н. И.* Симметрия и некоторые точные решения многомерного уравнения Монжа – Ампера // Докл. АН СССР. – 1983. – **273**, № 3. – С. 543–546.
   Те саме: *Fushchich V. I., Serov N. I.* Symmetry and some exact solutions of the multi-dimensional Monge – Ampère equation // Sov. Math. Dokl. – 1983. – **28**, No. 3. – P. 679–682.
7. *Хабиров С. В.* Применение контактных преобразований неоднородного уравнения Монжа – Ампера в одномерной газовой динамике // Докл. АН СССР. – 1990. – **310**, № 2. – С. 333–336.
   Те саме: *Khabirov S. V.* Application of contact transformations of the inhomogeneous Monge–Ampère equation in one-dimensional gas dynamics // Sov.

Phys. Dokl. – 1990. – **35**, No. 1. – P. 29–30.
8. *Arrigo D. J.* Group properties of a Monge–Ampère type equation // Computational and applied mathematics. II. Differential equations: Selected and revised papers from the IMACS World Congress (Dublin, Ireland, July 1991) / W. F. Ames, P. J. van der Houwen (eds). – Amsterdam: North-Holland, 1992. – P. 107–115.
9. *Bakelman I. J.* Convex analysis and nonlinear geometric elliptic equations. – Berlin: Springer, 1994. – xxi+510 p. – https://doi.org/10.1007/978-3-642-69881-1.
10. *Banos B.* On symplectic classification of effective 3-forms and Monge–Ampère equations // Differ. Geom. Appl. – 2003. – **19**, No. 2. – P. 147–166. – https://doi.org/10.1016/S0926-2245(03)00017-2.
11. *Basarab-Horwath P., Lahno V., Zhdanov R.* The structure of Lie algebras and the classification problem for partial differential equations // Acta Appl. Math. – 2001. – **69**, No. 1. – P. 43–94. – https://doi.org/10.1023/A:1012667617936.
12. *Boyko V. M., Lokaziuk O. V., Popovych R. O.* Realizations of Lie algebras on the line and the new group classification of (1+1)-dimensional generalized nonlinear Klein–Gordon equations // Anal. Math. Phys. – 2021. – **11**, No. 3. – Paper No. 127. – 38 p. – https://doi.org/10.1007/s13324-021-00550-z.
13. *Cui Fan, Jian Huaiyu.* Symmetry of solutions to a class of Monge–Ampère equations // Commun. Pure Appl. Anal. – 2019. – **18**, No. 3. – P. 1247–1259. – https://doi.org/10.3934/cpaa.2019060.
14. *Cullen M. J. P.* The mathematics of large-scale atmosphere and ocean. – Hackensack: World Sci. Publ. Co. Pte. Ltd., 2021. – xvi+394 p.
15. *De Paris A., Vinogradov A. M.* Scalar differential invariants of symplectic Monge–Ampère equations // Centr. Eur. J. Math. – 2011. – **9**, No. 4. – P. 731–751. – https://doi.org/10.2478/s11533-011-0046-7.
16. *Fedorchuk V. M., Fedorchuk V. I.* First-order differential invariants of the splitting subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ // Univ. Iagel. Acta Math. – 2006. – **1290**, No. 44. – P. 21–30.
17. *Fedorchuk V. M., Fedorchuk V. I.* On non-equivalent functional bases of first-order differential invariants of the nonconjugate subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ // Acta phys. Debrecina. – 2008. – **42** (XLII). – P. 122–132.
18. *Fushchich V. I., Nikitin A. G.* Reduction of the representations of the generalised Poincare algebra by the Galilei algebra // J. Phys. **A:** Math. Gen. – 1980. – **13**, No. 7. – P. 2319–2330. – https://doi.org/10.1088/0305-4470/13/7/015.
19. *Gutiérrez C. E., van Nguyen T.* On Monge – Ampère type equations arising in optimal transportation problems // Calcul. Var. Partial Differ. Equat. – 2007. – **28**, No. 3. – P. 275–316. – https://doi.org/10.1007/s00526-006-0045-x.
20. *Jiang F., Trudinger N. S.* On the second boundary value problem for Monge–Ampère type equations and geometric optics // Arch. Ration. Mech. Anal. – 2018. – **229**, No. 2. – P. 547–567. – https://doi.org/10.1007/s00205-018-1222-8.
21. *Kushner A., Lychagin V., Slovák J.* Lectures on geometry of Monge–Ampère equations with Maple // Nonlinear PDEs, their Geometry, and Applications / R. A. Kycia, M. Ulan, E. Schneider (Eds.). – Basel: Birkhäuser, 2019. – xvii+279 p. – (Chapt. 2. – P. 53–94. – https://doi.org/10.1007/978-3-030-17031-8_2.)
22. *Lie S.* Über die Integration durch bestimmte Integrale von einer Klasse linearer partieller Differentialgleichungen // Arch. Math. – 1881. – **6**, No. 3. – P. 328–368.
23. *Lychagin V. V., Rubtsov V. N., Chekalov I. V.* A classification of Monge–Ampère equations // Ann. Sci. Ècole Norm. Sup. Ser. 4. – 1993. – **26**, No. 3. – P. 281–308. – https://doi.org/10.24033/asens.1673.
24. *Nikitin A. G.* Symmetries of Schrödinger–Pauli equations for charged particles and quasirelativistic Schrödinger equations // J. Phys. **A**. Math. Theor. – 2022. – **55**, No. 11. – Paper No. 115202. – 24 p. – https://doi.org/10.1088/1751-8121/ac515d.
25. *Popovych R. O.* Point and contact equivalence groupoids of two-dimensional quasilinear hyperbolic equations // Appl. Math. Lett. – 2021. – **116**. – Paper No. 107068, 8 p. – https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107068.
26. *Stępień Ł. T.* On some exact solutions of heavenly equations in four dimensions // AIP Adv. – 2020. – **10**. – Art. 065105. – https://doi.org/10.1063/1.5144327.
27. *Tseluiko D.* On classification of hyperbolic Monge–Ampère equations on 2-dimensional manifolds // Rend. Sem. Mat. Messina Ser. II. – 2001. – **8**(23). – P. 139–150.
28. *Udrişte C., Bîlă N.* Symmetry group of Ţiţeica surfaces PDE // Balkan J. Geom. Appl. – 1999. – **4**, No. 2. – P. 123–140.

29. *Udrişte C., Bîlă N.* Symmetry Lie group of the Monge–Ampère equation // Balkan J. Geom. Appl. – 1998. – **3**, No. 2. – P. 121–134.
30. *Vaneeva O. O., Popovych R. O., Sophocleous C.* Extended symmetry analysis of two-dimensional degenerate Burgers equation // J. Geom. Phys. – 2021. – **169**, Paper No. 104336. – 21 p. – https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2021.104336.
31. *Yau Shing-Tung, Nadis Steve.* The shape of a life. One mathematician's search for the Universe's hidden geometry. – New Haven: Yale Univ. Press, 2019. – 328 p.

ON PARTIAL PRELIMINARY GROUP CLASSIFICATION OF SOME CLASS OF THE (1+3)-DIMENSIONAL MONGE – AMPÈRE EQUATIONS. I. ONE-DIMENSIONAL LIE ALGEBRAS

The partial preliminary group classification of some class of the (1+3)-*dimensional Monge – Ampère equations is studied. The results obtained by using the one-dimensional nonconjugate subalgebras of the Lie algebra of the Poincaré group* $P(1,4)$ *and non-equivalent functional bases of the first-order differential invariants of these subalgebras are presented.*

Key words: *preliminary group classification, Monge – Ampère equation, nonconjugate subalgebras of the Lie algebras, differential invariants, the Poincaré group* $P(1,4)$.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.01.23