

### СКІНЧЕННОЕЛЕМЕНТНИЙ АНАЛІЗ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ У ТОНКИХ ПЛАСТИНАХ І ЦИЛІНДРИЧНИХ ОБОЛОНКАХ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ, ОТОЧЕНИМ ВКЛЮЧЕННЯМ ІЗ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО МАТЕРІАЛУ

*Виконано комп'ютерне моделювання та скінченноелементний аналіз напружено-деформованого стану тонких пластин і тонкостінних циліндричних оболонок, послаблених круговим отвором за наявності оточуючого його кільцевого включення із функціонально-градієнтного матеріалу (ФГМ). Досліджено вплив розмірів ФГМ-включення та закону зміни його модуля пружності на концентрацію параметрів напружено-деформованого стану пластин і оболонок в околі отвору. Отримано розподіл інтенсивностей напружень і деформацій у зонах локальної концентрації напружень. Встановлено, що за використання радіально-неоднорідного ФГМ-включення з певними механічними властивостями можна зменшити коефіцієнт концентрації напружень більше, ніж на 50%.*

**Ключові слова:** пружна пластина, тонкостінна циліндрична оболонка, круговий отвір, кільцеве включення, функціонально-градієнтний матеріал, напружено-деформований стан, коефіцієнт концентрації напружень, скінченноелементний аналіз.

**Вступ.** У різних галузях техніки, зокрема, ракетно-космічній, нафтогазовій, енергетичній, будівельній тощо, широко використовують пластини і циліндричні оболонки з отворами. Їхня перевага полягає в тому, що вони мають значну міцність при відносно невеликій вазі. Однак наявність отворів у пластинах і оболонках призводить до різкого збільшення локальних напружень, що впливає на загальну міцність і надійність конструкції [1, 3, 11, 12, 19]. Саме тому пошук способів зниження концентрації напружень у тонкостінних конструкціях є актуальною задачею механіки деформівного твердого тіла. Наявність підкріплювальних елементів або включень із певними механічними властивостями сприяє зниженню концентрації напружень навколо отворів [4–9, 14–16].

Функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ) – це клас матеріалів, у яких властивості чи склад змінюються поступово або плавно по всій їхній товщині або довжині. Це відрізняє їх від традиційних однорідних матеріалів, властивості яких залишаються постійними у всьому об'ємі. У ФГМ можуть бути зміни в таких характеристиках, як хімічний склад, механічні властивості, теплопровідність, електропровідність, оптичні властивості та інші. Це дозволяє створювати матеріали з унікальними комбінаціями властивостей, що відкриває нові можливості для розробки та вдосконалення тонкостінних конструкцій.

Врахування неоднорідності ФГМ суттєво підвищує складність математичної моделі задачі та отримання її розв'язку. Аналітичні методи для розв'язування задач про деформування конструкцій із ФГМ можуть бути використані лише в деяких окремих випадках, тому при дослідженні напружено-деформованого стану (НДС) конструкцій із різними неоднорідностями (отворами, включеннями тощо) більш доцільно застосовувати числові методи механіки, зокрема, метод скінченних елементів (МСЕ), який, на відміну від аналітичних, є достатньо універсальним і ефективним для розв'язування широкого класу задач [23].

У цій роботі як продовження досліджень [6, 16] проведено комп'ютерне моделювання НДС пружних тонких пластин і циліндричних оболонок з

✉ hart@ua.fm

круговим отвором за наявності навколо нього кільцевого радіально-неоднорідного ФГМ-включення. Метою дослідження є знаходження раціональних параметрів ФГМ-включення стосовно зменшення величини коефіцієнта концентрації напружень (ККН). Для цього здійснюємо варіювання геометричних і механічних характеристик ФГМ-включення відповідно до заданого закону зміни його модуля пружності, з'ясуємо вплив величини максимального значення його змінного модуля пружності, а також геометричних розмірів включення та його жорсткості на параметри НДС пластин і оболонок у зоні їхньої локальної концентрації.

**1. Аналіз сучасного стану проблеми.** Питанням дослідження НДС тонкостінних конструкцій з отворами присвячено багато наукових праць. Фундаментальний характер у цьому напрямку мають роботи відомих вітчизняних вчених Г. М. Савіна [13], О. М. Гузя [10] та ін.

В останні два десятиліття механіка ФГМ стала предметом великого інтересу, проведено багато досліджень ФГМ, як теоретичних, так і числових та експериментальних. Наприклад, у [2] були отримані аналітичні розв'язки для змішаних осесиметричних задач у функціонально-градієнтних середовищах. У [22] досліджено розподіл напружень у пластині із ФГМ з круговим отвором за допомогою аналітичного методу. У [18] здійснено оцінку концентрації напружень у багатоклинових системах із функціонально-градієнтними клинами. У [17] за допомогою МСЕ із використанням різних ізопараметричних скінченних елементів визначено ККН в околі кругового вирізу в неоднорідній пластині за дії одновісного розтягувального навантаження, у [20] – навколо кругового вирізу в пластині з ФГМ за дії двовісного розтягування та зсуву.

**2. Постановка задачі.** Розглянемо НДС тонких пружних однорідних ізотропних пластин і циліндричних оболонок із центрально розташованим круговим отвором і кільцевим радіально-неоднорідним включенням із ФГМ. Розміри пластин  $a \times b$ , товщина  $h$ , радіус отвору  $R$ , радіус включення  $R_1$  (рис. 1а); довжина оболонок  $L$ , діаметр  $d$ , товщина та радіус отвору і радіально-неоднорідного включення такі самі, як і в пластині (рис. 1б). Включення має товщину  $h$ , розміщене у площині пластини/оболонки, а на його границі з матрицею задано умови жорсткого зчеплення. Величина радіуса включення  $R_1$  варіюється. На бічні грані пластин та торці оболонок діє рівномірне одновісне розтягувальне навантаження  $p = \text{const}$ , що не призводить до появи пластичних деформацій.

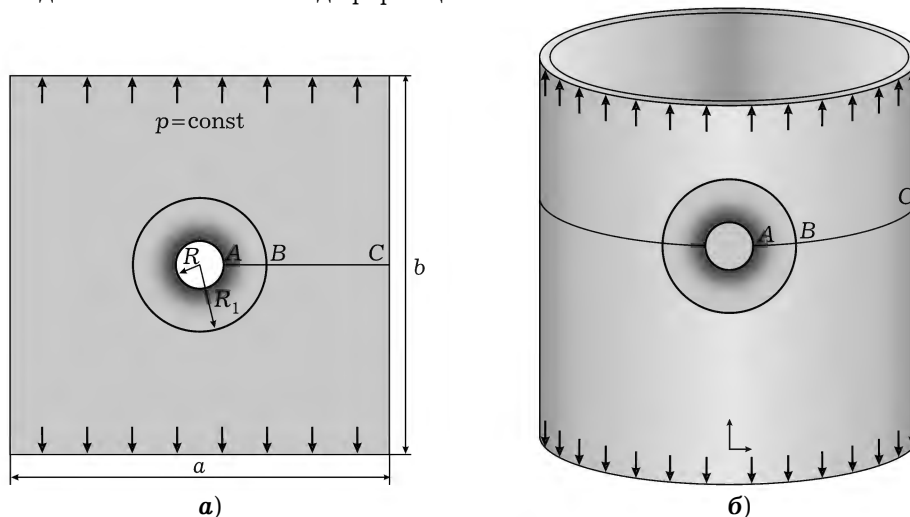


Рис. 1

У числових розрахунках вибрано декілька видів модельних матеріалів

включення із ФГМ, що має довільні радіальні пружні властивості, з однаковим коефіцієнтом Пуассона  $\nu_0 = 0.25$  і змінним модулем пружності  $E(r)$ :

$$E(r) = \begin{cases} E_0 \left( 1 + \frac{k-1}{\tilde{h}_1} \ell \right), & \ell \in [0, \tilde{h}_1], \\ kE_0, & \ell \in [\tilde{h}_1, \tilde{h}_1 + \tilde{h}_2], \\ E_0 \left( k - \frac{(k-1)(\ell - (\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2))}{\tilde{h}_3} \right), & \ell \in [\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2, 1], \end{cases} \quad (1)$$

де  $E_0 = 100$  ГПа – модуль пружності пластини/оболонки;  $\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq 1$ , – нормалізована параметрична відстань у радіальному напрямку від краю отвору (точка  $A$ , рис. 1) по ширині включення  $|AB| = h_{\text{inc}} = R_1 - R$ ,

$$\ell = (r - R) / (R_1 - R), \quad (2)$$

$r$  – відстань від центра отвору до довільної точки включення;  $R$  і  $R_1$  – радіуси отвору і включення, відповідно;  $\tilde{h}_j = h_j / h_{\text{inc}}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , – безрозмірна ширина кожної з трьох характерних зон ФГМ-включення,  $h_{\text{inc}} = \sum_{j=1}^3 h_j$

(рис. 2);  $k$  – відношення модуля пружності другої зони ФГМ-включення  $\tilde{E}_2$  до модуля пружності пластини/оболонки  $E_0$ ,  $k = \tilde{E}_2 / E_0$ .

На рис. 2 наведено відповідне графічне зображення закону зміни модуля пружності ФГМ-включення (1): зона зростання  $E(r)$  ширини  $\tilde{h}_1$ ; зона незмінного (фіксованого) значення ширини  $\tilde{h}_2$ ; зона зменшення модуля пружності ширини  $\tilde{h}_3$ . Тут і далі на рисунках по осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань  $\ell$ ,  $0 \leq \ell \leq 1$ , (2) у радіальному напрямку від краю отвору по ширині включення.

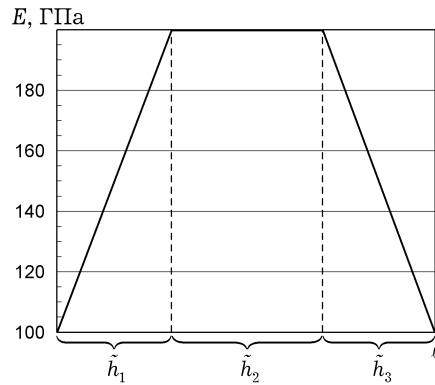


Рис. 2

Для визначеності приймаємо, що пластина квадратна, а довжина оболонок  $L$  дорівнює стороні пластини.

Результати досліджень, проведених авторами для аналогічної задачі [4], показали, що найбільший вплив на величину ККН має ширина  $h_2$  центральної зони ФГМ-включення. Тому далі будемо проводити розрахунки для різних варіантів величини  $R_1$  при фіксованих значеннях  $h_1$ ,  $h_3$  та змінній величині  $h_2$  ФГМ-включення (див. табл. 1).

Таблиця 1

Ширина зон ФГМ-включення	$h_1$	$h_2$	$h_3$
Вид включення			
ФГМ-включення 1	$R$	$R$	$R$
ФГМ-включення 2	$R$	$2R$	$R$
ФГМ-включення 3	$R$	$3R$	$R$
ФГМ-включення 4	$R$	$4R$	$R$
ФГМ-включення 5	$R$	$5R$	$R$
ФГМ-включення 6	$R$	$6R$	$R$
ФГМ-включення 7	$R$	$7R$	$R$

Зауважимо, що у випадку ФГМ-включення 7 маємо  $h_{\text{inc}} = 9R$ , тоді радіус включення  $R_1$  дорівнює половині ширини пластини, тому вважаємо, що вся пластина виготовлена з ФГМ.

**3. Математична модель.** У варіаційній постановці вихідна задача для циліндричної оболонки приводить до мінімізації функціонала повної потенціальної енергії деформації системи на множині кінематично можливих переміщень у просторі  $W_2^1(\Omega)$  [1]:

$$\begin{aligned}
F = \sum_{s=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{E_s(x,y)h}{1-\nu_s^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{\tilde{R}} \right)^2 + 2\nu_s \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{\tilde{R}} \right) + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1-\nu_s}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy + \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{E_s(x,y)h^3}{12(1-\nu_s^2)} \times \right. \\
\left. \times \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{\tilde{R}} \right)^2 + 2\nu_s \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{w}{\tilde{R}} \right) + \right. \right. \\
\left. \left. + 2(1-\nu_s) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\} - \int_{\gamma} (p_x u + p_y v + p_z w) dx dy,
\end{aligned}$$

де  $u(x,y)$ ,  $v(x,y)$ ,  $w(x,y)$  – проєкції вектора переміщень на осі  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , відповідно;  $h$  – товщина оболонки;  $\tilde{R}$  – радіус оболонки;  $E_s(x,y)$  і  $\nu_s$ ,  $s=1, \dots, n+1$ , – модулі пружності і коефіцієнти Пуассона матеріалу оболонки  $\Omega_1$  (матриці) ( $s=1$ ) або матеріалу включення  $\Omega_s$ ,  $s=2, \dots, n+1$  ( $n$  – кількість включень);  $\Omega = \bigcup_{s=1}^{n+1} \Omega_s$  – область визначення змінних  $x$  та  $y$ ;  $\gamma$  – границя області  $\Omega$ , уздовж якої прикладене зовнішнє навантаження інтенсивності  $P(x,y) = (p_x(x,y), p_y(x,y), p_z(x,y))^T$ . Для одновісного навантаження розтягу  $p_x(x,y) = p_z(x,y) = 0$ ,  $p_y(x,y) = p = \text{const}$ .

У випадку пластини приходимо до задачі мінімізації такого функціонала повної потенціальної енергії деформації системи [21]:

$$\begin{aligned}
F = \sum_{s=1}^{n+1} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega_s} \frac{E_s(x,y)h}{1-\nu_s^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu_s \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{1-\nu_s}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx dy \right\} - \int_{\gamma} (p_x u + p_y v) dx dy.
\end{aligned}$$

Сформульовані варіаційні задачі розв'язуємо за допомогою МСЕ з використанням трикутних ізопараметричних шестивузлових лагранжевих скінченних елементів другого порядку, при цьому невідомі функції переміщень усередині кожного скінченного елемента апроксимуємо квадратичним поліномом. В областях концентрації напружень використовуємо адаптивну сітку (рис. 3) з коефіцієнтом подрібнення, рівним 10. Збіжність МСЕ у випадку використання плоских скінченних елементів для тонкостінних оболонок тут забезпечується за рахунок згущення сітки. Використання дрібнішої сітки дає краще наближення поверхні оболонки багатогранною поверхнею.

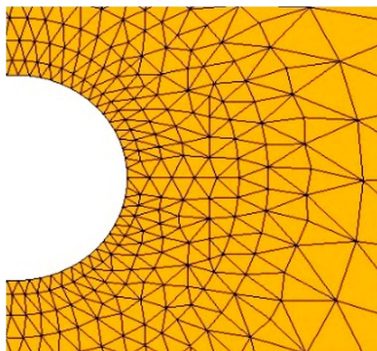


Рис. 3

**4. Аналіз результатів.** Числові результати отримано для: 1) квадратних пластин з такими геометричними параметрами:  $h = 0.005$  м,  $a = b = 0.2$  м,  $R = a/20$ ; 2) циліндричних оболонок з параметрами:  $L = d = a$ ,  $h = 0.005$  м,  $R = d/10$ . Навантаження розтягу в обох випадках  $p = 10$  МПа.

Радіус  $R_1$  кільцевого ФГМ-включення навколо отвору змінюємо за кроком  $R$ , ширина ФГМ-включення при цьому дорівнює  $h_{\text{inc}} = 3R, 4R, \dots, 9R$  (див. табл. 1).

**4.1. Пластини.** З'ясуємо, як змінюються ККН та деформації в пластині для різних варіантів величини ширини включення  $R_1$  при фіксованих значеннях  $h_1$ ,  $h_3$  та змінній величині  $h_2$  ФГМ-включення з модулем пружності  $E(r)$  (1) для значень жорсткості  $k = 1.5, 2, 2.5, 3$ . Результати розрахунків ККН у пластині з ФГМ-включенням наведено у табл. 2, а коефіцієнтів концентрації деформацій – у табл. 3.

Таблиця 2

Задача \ Вид включення	$k = 1.5$		$k = 2$		$k = 2.5$		$k = 3$	
	ККН	$\delta_1, \%$	ККН	$\delta_1, \%$	ККН	$\delta_1, \%$	ККН	$\delta_1, \%$
ФГМ-включення 1	2.67	-12.5	2.39	-21.6	2.17	-28.9	2.02	-33.8
ФГМ-включення 2	2.56	-16.1	2.23	-26.9	1.99	-34.8	1.86	-39.0
ФГМ-включення 3	2.47	-19.0	2.10	-31.1	1.84	-39.7	1.73	-43.3
ФГМ-включення 4	2.40	-21.3	2.00	-34.8	1.72	-43.6	1.62	-46.9
ФГМ-включення 5	2.35	-23.0	1.93	-36.7	1.65	-45.9	1.54	-49.5
ФГМ-включення 6	2.32	-23.9	1.90	-37.7	1.62	-46.9	1.50	-50.8
ФГМ-включення 7	2.33	-23.6	1.93	-36.7	1.66	-45.6	1.51	-50.5

Тут  $\delta_1$  – відхилення ККН від відповідного значення для пластини з круговим отвором без включення [13].

Наявність кільцевого ФГМ-включення із заданим законом зміни модуля пружності  $E(r)$  (1) дає змогу зменшити величини ККН у пластині біль-

ше, ніж на 50% (табл. 2), а максимальні деформації – на ~57% (див. табл. 3). Аналіз результатів розрахунків за наявності ФГМ-включень різної ширини (виду 1–6), свідчить, що, чим більша ширина включення, тим менші значення ККН і деформацій у пластині. Також можемо зробити висновок, що при збільшенні «жорсткості»  $k$  ФГМ-включення значення ККН і деформації в пластині зменшуються. Найменше значення ККН із розглянутих варіантів отримано у випадку ФГМ-включення 6 при  $k = 3$ .

Таблиця 3

Задача Вид включення	$k = 1.5$		$k = 2$		$k = 2.5$		$k = 3$	
	$\varepsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$	$\varepsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$
ФГМ-включення 1	1.83	-14.1	1.60	-24.9	2.17	-32.9	2.02	-39.4
ФГМ-включення 2	1.76	-17.4	1.50	-29.6	1.99	-38.5	1.86	-45.5
ФГМ-включення 3	1.70	-20.2	1.41	-33.8	1.84	-43.2	1.73	-50.2
ФГМ-включення 4	1.65	-22.5	1.34	-37.1	1.72	-46.5	1.62	-54.0
ФГМ-включення 5	1.61	-24.4	1.30	-39.0	1.65	-48.8	1.54	-56.3
ФГМ-включення 6	1.59	-25.4	1.28	-39.9	1.62	-49.8	1.50	-56.8
ФГМ-включення 7	1.60	-24.9	1.30	-39.0	1.66	-48.8	1.51	-55.4

Тут  $\delta_2$  – відхилення максимального значення інтенсивності деформацій  $\varepsilon_i^{\max}$  від відповідного значення для пластини з круговим отвором без включення (без підкріплення) [13].

На рис. 4 наведено графіки розподілу відносних напружень  $\sigma_y/p$  у характерному перерізі  $AC$  пластини з ФГМ-включенням з модулем пружності  $E(r)$  (1) при  $k = 3$  для різних варіантів ширини  $h_2$  другої зони ФГМ-включення  $h_2 = R, 2R, \dots, 7R$  (див. табл. 1). Криві 1–7 відповідають ФГМ-включенням 1–7. По осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань  $\ell_1 = (r - R)/(a/2 - R)$ ,  $0 \leq \ell_1 \leq 1$ , у радіальному напрямку від краю отвору (точка  $A$ , рис. 1а) по перерізу пластини  $AC = (a - 2R)/2$ ,  $r$  – відстань від центра отвору до довільної точки відрізка  $AC$ .

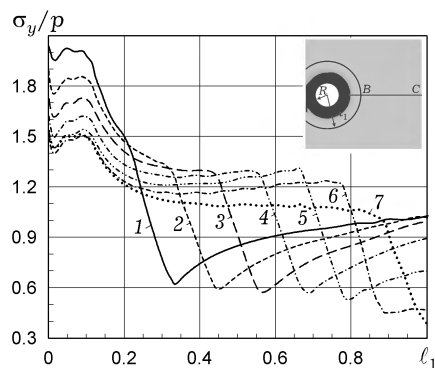


Рис. 4

Аналізуючи рис. 4, приходимо до висновку, що при використанні ФГМ-включень різної ширини відбувається перерозподіл напружень у перерізі  $AC$ , пов'язаний із шириною  $h_2$  центральної зони ФГМ-включення: чим більша величина  $h_2$ , тим меншими є напруження  $\sigma_y/p$  у перерізі  $AC$ . При переході від другої до третьої зони для кожного ФГМ-включення напруження  $\sigma_y/p$  зменшуються.

На рис. 5 показано розподіл відносних напружень  $\sigma_y/\rho$  у характерному перерізі АС пластини з ФГМ-включенням **6** різної жорсткості  $k = 1.5, 2, 2.5, 3$ : чим більша жорсткість  $k$  ФГМ-включення при фіксованій ширині  $h_2$  другої зони, тим більший перерозподіл напружень при переході від другої до третьої зони.

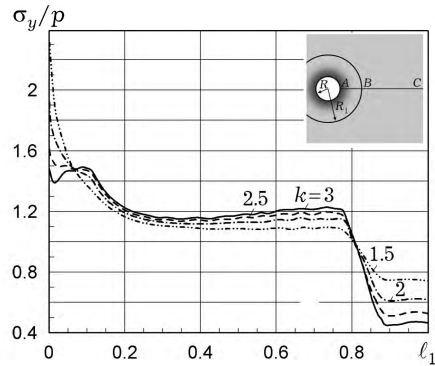


Рис. 5

Як приклад на рис. 6 наведено розподіл інтенсивності напружень  $\sigma_i$  у пластині з круговим отвором і ФГМ-включенням **6** (з параметрами  $h_1 = h_3 = R$ ,  $h_2 = 6R$ ,  $k = 3$ ).

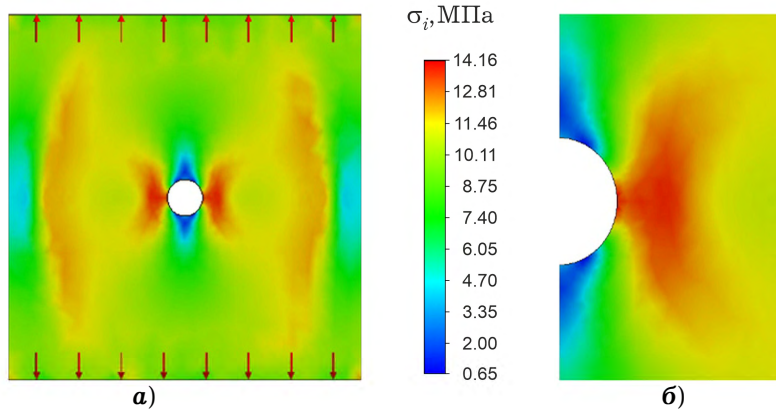


Рис. 6

**4.2. Циліндричні оболонки.** Розглянемо вплив наявності ФГМ-включень навколо кругового отвору в тонкостінній циліндричній оболонці на величину ККН та деформацій.

Результати розрахунків ККН для оболонок з ФГМ-включеннями різної «жорсткості»  $k = 1.5, 2.0, 2.5, 3$  та ширини (див. табл. 1) наведено в табл. 4, а значення деформацій – у табл. 5.

Таблиця 4

Задача \ Вид включення	$k = 1.5$		$k = 2$		$k = 2.5$		$k = 3$	
	ККН	$\delta_1, \%$	ККН	$\delta_1, \%$	ККН	$\delta_1, \%$	ККН	$\delta_1, \%$
ФГМ-включення 1	2.80	-14.4	2.49	-23.9	2.25	-31.2	2.12	-35.2
ФГМ-включення 2	2.70	-17.4	2.32	-29.1	2.06	-37.0	1.96	-40.1
ФГМ-включення 3	2.61	-20.2	2.20	-32.7	1.91	-41.6	1.82	-44.3
ФГМ-включення 4	2.55	-22.0	2.11	-35.5	1.82	-44.3	1.71	-47.7
ФГМ-включення 5	2.51	-23.2	2.07	-36.7	1.78	-45.6	1.65	-49.5
ФГМ-включення 6	2.50	-23.5	2.06	-37.0	1.77	-45.9	1.63	-50.2
ФГМ-включення 7	2.53	-22.6	2.11	-35.5	1.83	-44.0	1.68	-48.6

Тут  $\delta_1$  – відхилення ККН від відповідного значення для оболонки з круговим отвором без включення [10].

Таблиця 5

Задача Вид включення	$k = 1.5$		$k = 2$		$k = 2.5$		$k = 3$	
	$\epsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$	$\epsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$	$\epsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$	$\epsilon_i^{\max} \cdot 10^4$	$\delta_2, \%$
ФГМ-включення 1	1.92	-15.8	1.66	-27.2	1.46	-36.0	1.31	-42.5
ФГМ-включення 2	1.84	-19.3	1.55	-32.0	1.34	-41.2	1.18	-48.2
ФГМ-включення 3	1.78	-21.9	1.46	-36.0	1.24	-45.6	1.09	-52.2
ФГМ-включення 4	1.74	-23.7	1.41	-38.2	1.18	-48.2	1.02	-55.3
ФГМ-включення 5	1.72	-24.6	1.38	-39.5	1.16	-49.1	1.00	-56.1
ФГМ-включення 6	1.71	-25.0	1.38	-39.5	1.15	-49.6	1.00	-56.1
ФГМ-включення 7	1.73	-24.1	1.41	-38.2	1.19	-47.8	1.04	-54.4

Тут  $\delta_2$  – відхилення максимального значення інтенсивності деформацій  $\epsilon_i^{\max}$  від відповідного значення для оболонки з круговим отвором без включення [10].

Аналіз табл. 4, табл. 5 свідчить, що наявність радіально-неоднорідного кільцевого включення із заданим законом зміни модуля пружності призводить до зменшення величини ККН в оболонці на  $\sim 50\%$ , а максимальних деформацій – на  $\sim 56\%$ . Як і у випадку з пластинами, найкращим, з точки зору зменшення ККН, із розглянутих варіантів для оболонки виявилось ФГМ-включення 6 (з параметрами  $h_1 = h_3 = R$ ,  $h_2 = 6R$ ,  $k = 3$ ).

На рис. 7 і рис. 8 наведено графіки для циліндричних оболонок, аналогічні до графіків на рис. 4 і рис. 5 для пластинок. На рис. 7 показано розподіл відносних напружень  $\sigma_y/p$  по поверхні оболонки (у перерізі АС) для ФГМ-включень різної ширини. Криві 1–7 відповідають ФГМ-включенням 1–7 (див. табл. 1). Уздовж осі абсцис відкладено нормалізовану параметричну відстань  $\ell_2 = 4(r - R)/(\pi d - 4R)$ ,  $0 \leq \ell_2 \leq 1$ , від краю отвору (точка А, рис. 1б) по дузі АС =  $(\pi d - 4R)/4$ ,  $r$  – відстань по дузі від центра отвору до довільної точки дуги АС.

На рис. 8, подібно, як на рис. 5, показано розподіл відносних напружень  $\sigma_y/p$  у характерному перерізі АС оболонки з ФГМ-включенням 6 різної жорсткості  $k = 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$ .

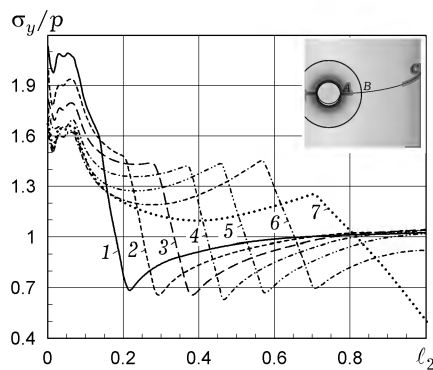


Рис. 7

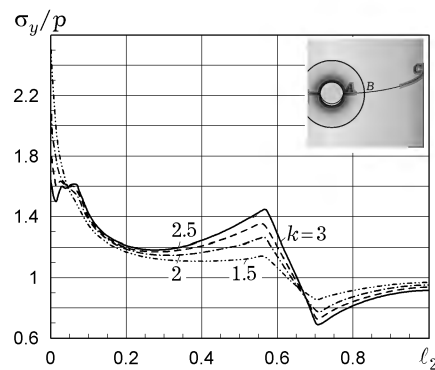


Рис. 8

Рис. 9 ілюструє якісну картину розподілу інтенсивностей напружень  $\sigma_i$  у циліндричній оболонці з круговим отвором і кільцевим ФГМ-включенням 6 (з параметрами  $h_1 = h_3 = R$ ,  $h_2 = 6R$ ,  $k = 3$ ).



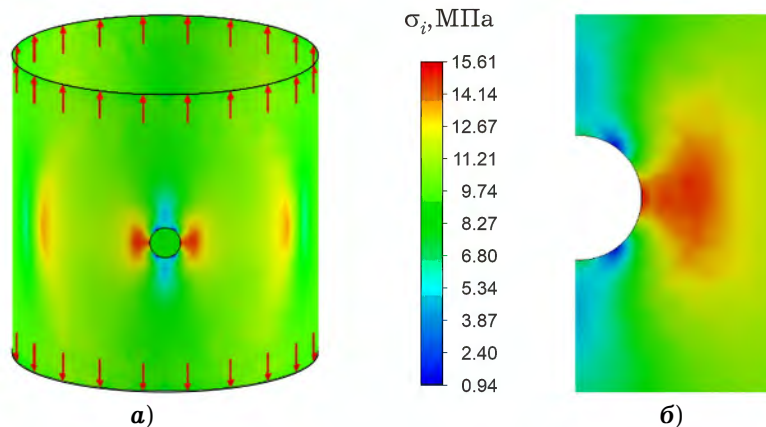


Рис. 9

**Висновки.** В результаті проведення широкомасштабних обчислювальних експериментів за допомогою методу скінченних елементів було здійснено комп'ютерне моделювання та аналіз впливу радіально-неоднорідного кільцевого включення на концентрацію напружень навколо кругового отвору в тонких пластинах і циліндричних оболонках. За допомогою числового дослідження було показано, що геометричні характеристики ФГМ-включень та закон зміни його модуля пружності вздовж радіуса мають суттєвий вплив на концентрацію параметрів напружено-деформованого стану навколо отвору в пластинчасто-оболонкових елементах конструкцій. Зокрема, за наявності ФГМ-включень із певними механічними властивостями та геометричними характеристиками вдалося зменшити концентрацію напружень та відповідну інтенсивність деформацій в околі отвору більше, ніж на 50%.

Використання кільцевих підкріплень у вигляді ФГМ-включень навколо кругових отворів у пластинах та циліндричних оболонках є доцільним, оскільки це дозволяє впливати не тільки на розподіл, але й на величину напружень та деформацій в областях локальної концентрації параметрів НДС.

Подальший інтерес представляє пошук раціональних параметрів ФГМ-включень, знаходження їхніх видів і конфігурацій з точки зору впливу на зменшення концентрації параметрів НДС пластин і оболонок із різними отворами.

1. Авдонин А. С. Прикладные методы расчета оболочек и тонкостенных конструкций. – Москва: Машиностроение, 1969. – 402 с.
2. Айзикович С. М., Александров В. М., Васильев А. С., Кренев Л. И., Трубчик И. С. Аналитические решения смешанных осесимметричных задач для функционально-градиентных сред. – Москва: Физматлит, 2011. – 192 с.
3. Вайнберг Д. В. Концентрация напряжений в пластинах около отверстий и выкружек. – Киев: Техніка, 1969. – 220 с.
4. Гарт Е. Л., Гудрамович В. С., Терьохін Б. І. Вплив включення із функціонально-градієнтного матеріалу на концентрацію напружень в тонких пластинах та циліндричних оболонках з круговим отвором // Техн. механіка. – 2022. – № 4. – С. 67–78. – <https://doi.org/10.15407/itm2022.04.067>.
5. Гарт Е. Л., Терьохін Б. І. Вибір раціональних параметрів підкріплюючих елементів при комп'ютерному моделюванні поведінки циліндричної оболонки з двома прямокутними отворами // Проблеми обчисл. механіки і міцності конструкцій. – 2019. – Вип. 30. – С. 19–32. – <https://doi.org/10.15421/4219024>.
6. Гарт Е. Л., Терьохін Б. І. Комп'ютерне моделювання впливу кільцевого включення із функціонально-градієнтного матеріалу на концентрацію напружень навколо кругового отвору у тонких пластинах і циліндричних оболонках // Доп. НАН України. – 2023. – № 2. – С. 37–46. – <https://doi.org/10.15407/dopovidi2023.02.037>.

7. *Гудрамович В. С., Гарт Е. Л., Марченко О. А.* Вплив підкріплювального включення на концентрацію напружень у сферичній оболонці з еліптичним отвором за дії рівномірного внутрішнього тиску // Проблеми міцності. – 2020. – **52**, № 6. – С. 17–29.  
Te same: *Hudramovich V. S., Hart E. L., Marchenko O. A.* Reinforcing inclusion effect on the stress concentration within the spherical shell having an elliptical opening under uniform internal pressure // *Strength Mater.* – 2020. – **52**, No. 6. – P. 832–842.  
– <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00237-7>.
8. *Гудрамович В. С., Гарт Е. Л., Марченко О. А.* Про вплив форми підкріплень на напружено-деформований стан циліндричної оболонки з видовженими прямокутними отворами // Проблеми обчисл. механіки і міцності конструкцій. – 2017. – Вип. 27. – С. 52–64.
9. *Гудрамович В. С., Гарт Э. Л., Струнин К. А.* Моделирование поведения плоскодеформируемых упругих сред с протяженными эллипсообразными и прямоугольными включениями // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2016. – **52**, № 6. – С. 25–31.  
Te same: *Gudramovich V. S., Gart É. L., Strunin K. A.* Modeling of the behavior of plane-deformable elastic media with elongated elliptic and rectangular inclusions // *Mater. Sci.* – 2017. – **52**, No. 6. – P. 768–774.  
– <https://doi.org/10.1007/s11003-017-0020-z>.
10. *Гузь А. Н., Чернышенко И. С., Чехов Вал. Н., Чехов Вик. Н., Шнеренко К. И.* Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями. – Киев: Наук. думка, 1980. – 636 с. – Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 1.
11. *Петерсон Р.* Коэффициенты концентрации напряжений. – Москва: Мир, 1977. – 302 с.
12. *Підстигач Я. С.* Вибрані праці. – Київ: Наук. думка, 1995. – 460 с.
13. *Савин Г. Н.* Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
14. *Hart E. L., Hudramovich V. S.* Computer simulation of the stress-strain state of plates with reinforced elongate rectangular holes of various orientations // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2022. – № 108. – С. 77–86.  
– <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2022.108.77-86>.
15. *Hart E. L., Terokhin B. I.* Computer simulation of the stress-strain state of the plate with circular hole and functionally graded inclusion // *J. Optim., Differ. Equat. and their Appl.* – 2021. – **29**, No. 1. – P. 42–53.  
– <https://doi.org/10.15421/142103>.
16. *Hart E. L., Terokhin B. I.* Computer simulation of the stress-strain state of thin plates and cylindrical shells with a circular hole reinforced by an inclusion from functionally graded material // *Опір матеріалів і теорія споруд.* – 2023. – № 110. – С. 63–80.  
– <https://doi.org/10.32347/2410-2547.2023.110.63-80>.
17. *Kubair D. V., Bhanu-Chandar B.* Stress concentration factor due to a circular hole in functionally graded panels under uniaxial tension // *Int. J. Mech. Sci.* – 2008. – **50**, No. 4. – P. 732–742.  
– <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2007.11.009>.
18. *Linkov A., Rybarska-Rusinek L.* Evaluation of stress concentration in multi-wedge systems with functionally graded wedges // *Int. J. Eng. Sci.* – 2012. – **61**. – P. 87–93.  
– <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2012.06.012>.
19. *Lukianchenko O., Kostina O.* The finite element method in problems of the thin shells theory. – LAP (LAMBERT Acad. Publ., 2019. – 134 p.
20. *Mohammadi M., Dryden J. R., Jiang L.* Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate // *Int. J. Solids Struct.* – 2011. – **48**, No. 3-4. – P. 483–491.  
– <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2010.10.013>.
21. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. – Oxford–New York: Pergamon Press, 1975. – 420 p.
22. *Yang Q. Q., Gao C. F., Chen W. T.* Stress concentration in a finite functionally graded material plate // *Sci. China Phys. Mech. Astron.* – 2012. – **55**, No. 7. – P. 1263–1271. – <https://doi.org/10.1007/s11433-012-4774-x>.
23. *Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.* The finite element method for solid and structural mechanics. – New York: Elsevier, 2005. – 632 p.

**FINITE ELEMENT ANALYSIS OF STRESS CONCENTRATION IN THIN PLATES AND CYLINDRICAL SHELLS WITH A CIRCULAR HOLE SURROUNDED BY AN INCLUSION OF A FUNCTIONALLY GRADED MATERIAL**

*Computer modeling and finite element analysis of the stress-strain state of thin plates and thin-walled cylindrical shells, weakened by a circular hole in the presence of an annular inclusion of a functionally graded material (FGM) surrounding it, is carried out. The influence of the dimensions of the FGM-inclusion and the law of change of its elastic modulus on the concentration of the parameters of the stress-strain state of plates and shells in the vicinity of the hole is studied. The distribution of stress and strain intensities in the zones of local stress concentration is obtained. It is established that when using a radially inhomogeneous FGM-inclusion with certain mechanical properties, it is possible to reduce the stress concentration factor by more than 50%.*

**Key words:** *elastic plate, thin-walled cylindrical shell, circular hole, annular inclusion, functionally graded material, stress-strain state, stress concentration factor, finite element analysis.*

Дніпровськ. нац. ун-т ім. О. Гончара, Дніпро

Одержано  
07.05.23