УДК 519.65

П. С. Малачівський[1 ✉], Л. С. Мельничок[1], Я. В. Пізюр[2]

ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЄЮ ҐОМПЕРЦА

Досліджено властивості чебишовського наближення функцією Ґомперца. Встановлено умову, за якої таке наближення з відносною похибкою існує і є единим. Запропоновано та обґрунтовано метод визначення параметрів чебишовського наближення. Наведено приклад, який підтверджує доцільність застосування чебишовського наближення функцією Ґомперца для прогнозування динаміки росту.

Ключові слова: *функція Ґомперца, чебишовське наближення, точки чебишовського альтернансу, відносна похибка, характеристична властивість.*

Функцію Ґомперца використовують для опису залежностей для моделювання фізичних процесів у різних прикладних областях: в біології для опису популяції організмів і росту рослин [10, 16], в екології [11, 15], а також для оцінки логістичних і маркетингових рішень [12, 17]. У медицині функцію Ґомперца використовують для моделювання росту нормальних і злоякісних тканин [18]. Функція Ґомперца відображає рівновагу між регулярними станами з передбачуваною динамікою та хаотичними станами з непередбачуваною динамікою, що важливо для хіміопрофілактики онкологічних захворювань [18]. Потреба покращення точності прогнозу спонукає до еволюції моделей. У праці [9] наведено результати порівняння використання функції Ґомперца та експоненціальної, експоненціально-лінійної, степеневої й інших моделей для прогнозування динаміки росту злоякісних пухлин різних органів.

1. Постановка задачі. Функція Ґомперца описується виразом

$$G(a,b,c;t) = e^{a-be^{-ct}}, \qquad b,c > 0\,, \tag{1}$$

залежним від часу t і трьох дійсних параметрів a, b, c. Вона є розв'язком моделі швидкості росту [11]

$$\frac{dG(t)}{dt} = cG(t)\ln\frac{e^a}{G(t)}, \qquad c > 0, \qquad a \in \mathbb{R}\,.$$

Графік функції Ґомперца зображено на рис. 1.

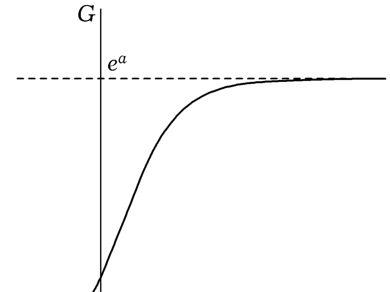

Рис. 1. Крива Ґомперца.

Складність побудови наближення функцією Ґомперца зумовлена тим, що від параметрів b і c вона залежить нелінійно. Обчислення значень цих параметрів зводиться до розв'язування нелінійної задачі [11]. У працях [10, 11] описано методи обчислення параметрів функції Ґомперца за методом найменших квадратів. Пропонуємо метод наближення функцією Ґомперца

✉ petro.malachivskyy@gmail.com

за чебишовським критерієм з відносною похибкою, відповідно до якого значення параметрів a, b і c визначаємо з умови досягнення найменшої відносної похибки на часовому відрізку $t \in [\alpha, \beta]$ [6, 7]. Оскільки вираз (1) рекомендують використовувати для прогнозу протікання певних процесів, то згідно з [7] його параметри доцільно обчислювати саме за чебишовським критерієм. Метод найменших квадратів рекомендують використовувати для опису даних, розподілених за нормальним законом [6]. У праці [9] встановлено, що функція Ґомперца, отримана з використанням методу найменших квадратів з ваговою функцією, забезпечує достовірніший прогноз порівняно з кривою, обчисленою за методом найменших квадратів. Значення цієї вагової функції визначають за похибками відтворення результатів спостереження. Застосування такої вагової функції відповідає результатам другої ітерації методу побудови середньостепеневого наближення [2, 13, 14], який в граничному варіанті забезпечує отримання чебишовського наближення.

Вираз (1) не задовольняє умову Гаара [5, 6], і тому виникає питання існування і єдиності чебишовського наближення таким виразом. У зв'язку з цим необхідно дослідити властивості чебишовського наближення виразом (1) і визначити клас функцій, для якого таке наближення існує.

2. Існування чебишовського наближення функцією Ґомперца. Дослідимо існування чебишовського наближення більш загальним виразом

$$G(A, B, C; t) = Ae^{Be^{Ct}} \tag{2}$$

стосовно дійсних *параметрів* A, B і C. Клас функцій $f(x)$, для яких існує чебишовське наближення виразом (2) з відносною похибкою, встановлює така

Теорема 1. *Достатньою умовою існування чебишовського наближення виразом* (2) *для неперервної додатної на відрізку* $[\alpha, \beta]$ *функції* $f(x)$, $f(x) \in \mathcal{C}[\alpha, \beta]$, $f(x) > 0$, *з відносною похибкою на* $[\alpha, \beta]$ *є виконання нерівності*

$$W > 0, \tag{3}$$

де

$$W = \frac{\ln(f(z_4)) - \ln(f(z_2))}{\ln(f(z_3)) - \ln(f(z_1))},$$

а z_i, $i = 1, \ldots, 4$, *– будь-які впорядковані за зростанням числа* $z_j < z_{j+1}$, $j = 1, 2, 3$, *з відрізка* $[\alpha, \beta]$.

Д о в е д е н н я. За характеристичною властивістю чебишовського наближення [5, 6] для існування чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (2) з відносною похибкою на відрізку $[\alpha, \beta]$ достатньо, щоб система рівнянь

$$\frac{f(z_j) - Ae^{Be^{Cz_i}}}{f(z_j)} = (-1)^j \mu, \qquad j = 1, \ldots, 4, \tag{4}$$

мала єдиний розв'язок щодо невідомих параметрів A, B, C і похибки μ, де z_i, $i = 1, \ldots, 4$, – впорядковані за зростанням числа з відрізка $[\alpha, \beta]$. Покажемо, що у випадку виконання умови (3) система рівнянь (4) має єдиний розв'язок.

Виключивши із системи рівнянь (4) невідомі A і μ, отримаємо стосовно параметрів B і C систему рівнянь

$$\frac{e^{Be^{Cz_{j+2}}}}{f(z_{j+2})} = \frac{e^{Be^{Cz_j}}}{f(z_j)}, \qquad j = 1, 2.$$

Оскільки за умовою теореми функція $f(x)$ є додатною, то ця система рівнянь еквівалентна системі

$$Be^{Cz_{j+2}} - Be^{Cz_j} = \ln\left(f(z_{j+2})\right) - \ln\left(f(z_j)\right), \qquad j = 1, 2. \tag{5}$$

Система рівнянь (5) є лінійною стосовно параметра B і нелінійною щодо C. Після виключення з (5) параметра B для знаходження C отримаємо трансцендентне рівняння

$$\frac{e^{Cz_4} - e^{Cz_2}}{e^{Cz_3} - e^{Cz_1}} = W. \tag{6}$$

Застосувавши до лівої частини рівняння (6) теорему Лаґранжа про скінченні прирости неперервних диференційовних функцій [1, 3, 14], її можна подати у вигляді

$$\frac{e^{Cz_4} - e^{Cz_2}}{e^{Cz_3} - e^{Cz_1}} = e^{C(\xi_2 - \xi_1)}, \tag{7}$$

де ξ_j, $j = 1, 2$, – деякі внутрішні точки з відрізків $[z_j, z_{j+2}]$. Оскільки експонента є строго монотонною функцією, то у випадку виконання умови (3) рівняння (6) і, відповідно, система рівнянь (4) має єдиний дійсний розв'язок.

Отже, для неперервних і додатних функцій $f(x)$, які задовольняють умову (3), існує чебишовське наближення виразом (2) з найменшою відносною похибкою μ на відрізку $[\alpha, \beta]$. Теорему доведено. ♦

Для знаходження значень параметрів чебишовського наближення виразом (2) можна використовувати алгоритм Ремеза [5, 6]. У випадку існування чебишовського наближення збіжність ітераційної схеми Ремеза [6] забезпечує обчислення його параметрів. Згідно з теоремою 1, чебишовське наближення виразом (2) існує для неперервних і додатних функцій $f(x)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$ у випадку виконання умови (3). Якщо умова (3) виконується, то існує єдине чебишовське наближення функції $f(x)$ виразом вигляду (1) з відносною похибкою μ.

Умову (3) існування чебишовського наближення виразом (2) задовольняють строго монотонні функції. Варто зазначити, що умова (3) не є необхідною для існування чебишовського наближення функції $f(x)$ виразом (2) з відносною похибкою μ. Її виконання необхідне лише в точках чебишовського альтернансу. У випадку використання ітераційного алгоритму Ремеза [5, 6] для знаходження параметрів чебишовського наближення виразом (2) умова (3) повинна справджуватися в усіх точках проміжних наближень до точок альтернансу.

3. Визначення параметрів чебишовського наближення функцією Ґомперца. Якщо для функції $f(x)$ виконується умова теореми 1, а z_i, $i = 1, \ldots, 4$, – точки чебишовського альтернансу, то параметри A і B наближення функції $f(x)$ виразом (2) з відносною похибкою μ визначаються за формулами

$$B = \frac{\ln\left(f(z_3)\right) - \ln\left(f(z_1)\right)}{e^{Cz_1} - e^{Cz_3}}, \tag{8}$$

$$A = \frac{2f(z_1)f(z_2)}{f(z_2)\,e^{Be^{Cz_1}} + f(z_1)\,e^{Be^{Cz_2}}}. \tag{9}$$

Параметр C визначають як розв'язок рівняння (6). Враховуючи експоненціальний характер залежності лівої частини рівняння (6) від C (див. (7)), його розв'язок доцільно шукати як корінь рівняння

$$g(C) = \ln(W), \tag{10}$$

де

$$g(C) = \ln\left(\frac{e^{Cz_4} - e^{Cz_2}}{e^{Cz_3} - e^{Cz_1}}\right).$$

Значення розв'язку C рівняння (10) можна знайти за ітераційним методом Ньютона

$$C_{i+1} = C_i - \frac{g(C_i) - \ln(W)}{g'(C_i)}, \qquad i = 1, 2, \dots, \tag{11}$$

де

$$g'(C) = \frac{z_4 e^{Cz_4} - z_2 e^{Cz_2}}{e^{Cz_4} - e^{Cz_2}} - \frac{z_3 e^{Cz_3} - z_1 e^{Cz_1}}{e^{Cz_3} - e^{Cz_1}},$$

$$C_0 = \frac{\ln(W)}{z_3 - z_2}. \tag{12}$$

Вибір початкового значення C_0 за формулою (12) є достатньо близьким до розв'язку рівняння (6) і забезпечує співпадіння їхніх знаків, що необхідно для дотримання стійкості ітераційного методу (11). Функція $g(C)$ має розрив у точці $C = 0$ і перехід проміжних значень C_i через цю точку може порушити збіжність методу (11). Вибір початкового значення C_0 за формулою (12) забезпечує обминання точки розриву $C = 0$ функції $g(C)$ при знаходженні розв'язку рівняння (10) за ітераційною схемою (11).

Точність обчислення значення параметра C можна контролювати досягненням деякої похибки μ:

$$|C_{i+1} - C_i| \le \varepsilon |C_{i+1}|. \tag{13}$$

При розв'язуванні тестових прикладів збіг двох-трьох значущих цифр для похибки $\varepsilon = 0.003$ досягається за три-чотири ітерації методу (11).

► ***Приклад 1.*** Запас автомобілів у Нідерландах у період з 1965 по 1989 рр. (у тисячах штук) був таким [11, 15]:

1273, 1502, 1696, 1952, 2212, 2465, 2702, 2903,
3080, 3214, 3399, 3629, 3851, 4056, 4312, 4515,
4728, 4818, 4901, 4950, 5118, 5251, 5371, 4594, 4630.

У цьому переліку перше значення відповідає запасу автомобілів станом на 1965 рік, а останнє − запасу автомобілів станом на 1989 р. Приймемо, що 1965 рік відповідає $t_0 = 0$ і відповідно $t_{24} = 24$ відповідає 1989 року.

За описаним методом обчислимо значення параметрів функції Ґомперца за чебишовським критерієм для опису запасу кількості автомобілів для t_i, $i = 0, 1, \dots, 24$. За результатами цього обчислення з похибкою $\varepsilon = 0.003$ в умові (13) отримали наближення

$$G_{\mathrm{Ch}}(t) = 6048.18 e^{-1.57346212 e^{-0.105659t}} = e^{8.70751275 - 1.57346212 e^{-0.105659t}} \tag{14}$$

з відносною похибкою $\mu = 2.97\,\%$.

У праці [11] для цих даних було отримано наближення за методом найменших квадратів:

$$G_{\mathrm{sq}}(t) = e^{8.69571 - 1.53597 e^{-0.105687t}}. \tag{15}$$

На рис. 2 відображено відтворення запасу автомобілів у Нідерландах у період з 1965 по 1989 рр. наближеннями кривою Ґомперца (14) і (15).

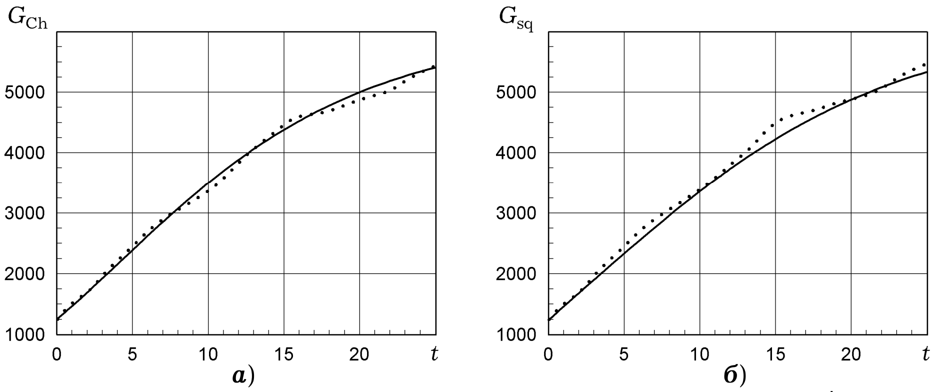

Рис. 2. Графіки відтворення запасу автомобілів наближеннями кривою Ґомперца: *а*) за чебишовським методом (14), *б*) за методом найменших квадратів (15).

З наведених графіків випливає, що в кінцевій точці спостереження $t_{24} = 24$ відхилення чебишовського наближення функцією Ґомперца є меншим від відхилення наближення, отриманого за методом найменших квадратів: відповідно 31 автомобіль – для чебишовського наближення (14) і 78 – для наближення за методом найменших квадратів (15). Для наближення за методом найменших квадратів характерним є те, що похибка відтворення значень у крайніх точках інтервалу спостереження здебільшого є більшою, ніж похибка відтворення результатів спостереження всередині інтервалу [4, 6]. Тому, як стверджує Є. Я. Ремез [7], для прогнозування доцільніше використовувати чебишовське наближення.

Варто зазначити, що чебишовське наближення функцією Ґомперца запасу автомобілів у Нідерландах у періодах з 1965 по 1986 рр., з 1965 по 1987 рр. і з 1965 по 1988 рр. збігаються з наближенням (14) у період з 1965 по 1989 рр. Використання чебишовського наближення функцією Ґомперца запасу автомобілів у Нідерландах у період з 1965 по 1985 рр. для прогнозу дає такі результати відхилення від наявної кількості запасу автомобілів: для 1986 р. – на 44 автомобілі більше, для 1987 р. – на 31 автомобіль менше від реальної кількості запасу автомобілів, для 1988 р. – на 79 автомобілів менше, а для 1989 р. – на 121 автомобілів менше.

Програмне забезпечення. Для обчислення параметрів чебишовського наближення функцією Ґомперца розроблено модуль у складі пакету RADAN [8], а також процедуру для пакету Maple.

Висновки. Достатньою умовою існування чебишовського наближення виразом (2) з найменшою відносною похибкою є справдження нерівності (3). Цю умову задовольняють строго монотонні функції. Якщо ця умова виконується, параметри A і B чебишовського наближення виразом (2) визначають за формулами (8), (9). Значення параметра C знаходять як розв'язок трансцендентного рівняння (6) з використанням методу Ньютона (11). Наведений приклад підтверджує доцільність використання чебишовського наближення функцією Ґомперца для прогнозування динаміки росту.

1. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1974. – 831 с.
   Те саме: *Korn G. A., Korn T. M.* Mathematical handbook for scientists and engineers: Definitions, theorems, and formulas for reference and review. – New York: Dover Publ. Inc., 2000. – 1151 p.
2. *Малачивский П. С., Матвийчук Я. Н., Пизюр Я. В. Малачивский Р. П.* Равномерное приближение функции двух переменных // Кибернетика и системный анализ. – 2017. – **53**, № 3. – С. 111–116.
   Те саме: *Malachivskyy P. S., Matviychuk Ya. N., Pizyur Ya. V., Malachivskyi R. P.* Uniform approximation of functions of two variables // Cybernetics and Systems Analysis. – 2017. – **53**, No. 3. – P. 426–431.
   – https://doi.org/10.1007/s10559-017-9943-5.

3. *Малачивский П. С., Пизюр Я. В., Данчак Н. В., Оразов Э. Б.* Чебышевское приближение экспоненциально-степенным выражением // Кибернетика и системный анализ. – 2013. – **49**, № 6. – С. 87–91.
   Те саме: *Malachivskyy P. S., Pizyur Ya. V., Danchak N. V., Orazov E. B.* Chebyshev approximation by exponential-power expression // Cybernetics and Systems Analysis. – 2013. – **49**, No. 6. – P. 877-881.
   – https://doi.org/10.1007/s10559-013-9577-1.
4. *Малачівський П. С., Пізюр Я. В.* Розв'язування задач в середовищі Maple. – Львів: Растр-7, 2016. – 282 с.
5. *Малачівський П. С., Скопецький В. В.* Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. – Київ: Наук. думка, 2013. – 270 с.
6. *Попов Б. А., Теслер Г. С.* Приближение функций для технических приложений. – Киев: Наук. думка, 1980. – 352 с.
7. *Ремез Е. Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев: Наук. думка, 1969. – 623 с.
8. *Яцук В. О., Малачівський П. С.* Методи підвищення точності вимірювань: Підруч. – Львів: Бескид Біт, 2008. – 368 с.
9. *Benzekry S., Lamont C., Beheshti A., Tracz A., Ebos J. M. L., Hlatky L., Hahnfeldt P.* Classical mathematical models for description and prediction of experimental tumor growth // PloS Comput. Biol. – 2014. – **10**, No. 8. – e1003800.
10. *Franses P. H.* Fitting a Gompertz curve // J. Operational Res. Soc. – 1994. – **45**, No. 1. – P. 109–113. – https://doi.org/10.2307/2583955.
11. *Jukić D., Kralik G., Scitovski R.* Least-squares fitting Gompertz curve // J. Comput. Appl. Math. – 2004. – **169**, No. 2. – P. 359–375.
12. *Jukić D., Scitovski R.* Solution of the least-squares problem for logistic function // J. Comput. Appl. Math. – 2003. – **156**, No. 1. – P. 159–177.
13. *Malachivskyy P. S., Melnychok L. S., Pizyur Y. V.* Chebyshev approximation of the functions of many variables with the condition // IEEE 15th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT), Zbarazh, Ukraine. – 2020. – P. 54–57.
14. *Malachivskyy P., Pizyur Ya.* Chebyshev approximation of the steel magnetization characteristic by the sum of a linear expression and an arctangent function // Math. Model. Comput. – 2019. – **6**, No. 1. – P. 77–84.
    – https://doi.org/10.23939/mmc2019.01.077.
15. *McCallum H.* Population parameters: Estimation for ecological models. – Oxford: Wiley-Blackwell, 2008. – 368 p.
16. *Tjørve K. M. C., Tjørve E.* The use of Gompertz models in growth analyses, and new Gompertz-model approach: An addition to the Unified-Richards family // PLoS ONE. – 2017. – **12**, No. 6. – e0178691.
17. *Tsoularis A.* Analysis of logistic growth models // Res. Lett. Inf. Math. Sci. – 2001. – No. 2. –P. 23–46.
18. *Waliszewski P., Konarski J.* A mystery of the Gompertz function // Fractals in Biology and Medicine / G. A. Losa, D. Merlini, T. F. Nonnenmacher, E. R. Weibel (Eds). – Ser.: Mathematics and Biosciences in Interaction. – Basel: Birkhäuser, 2005. – Vol. 4. – P. 277–286. – https://doi.org/10.1007/3-7643-7412-8_27.

CHEBYSHEV APPROXIMATION BY GOMPERTZ FUNCTION

The properties of the Chebyshev approximation by the Gompertz function are investigated. The condition under which such approximation with a relative error exists and is unique is established. A method for determining the parameters of the Chebyshev approximation is proposed and substantiated. The presented example confirms the expediency of using the Chebyshev approximation by the Gompertz function for prediction of growth dynamics.

Key words: *Gompertz function, Chebyshev approximation, Chebyshev alternance points, relative error, characteristic property.*

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано 10.08.22