

КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ МІЖФАЗНОГО ВІДШАРОВАНОГО НАПІВНЕСКІНЧЕННОГО ВКЛЮЧЕННЯ

Розглянуто рівновагу двох жорстко з'єднаних пружних півплощин із різних матеріалів, на межі поділу яких розміщене напівнескінченне тонке жорстке включення. Одна сторона включення з'єднана з однією з півплощин, а інша – відшарована з утворенням тріщини. До одного з берегів тріщини прикладено нормальну та дотичну зосереджені сили. Враховано фрикційний контакт берегів тріщини поблизу її вершини. Із застосуванням методу Вінера – Гопфа розв'язок інтегрального рівняння задачі отримано в замкненій формі. Знайдено розмір області контакту берегів тріщини, розподіли напружень в області контакту, а також на межі поділу півплощин поза тріщиною та в місці з'єднання включення з півплощиною.

Ключові слова: міжфазне відшароване включення, тріщина, модель Комніоу, інтеграл Мелліна, коефіцієнт інтенсивності напружень.

Міжфазні тонкі жорсткі відшаровані включення у кусково-однорідному середовищі вивчалися в роботах [4, 5, 13, 15] в рамках осциляційної моделі. Осциляція напружень і переміщень в околах кінців включень свідчить про фізичну суперечливість отриманих у цих роботах розв'язків, оскільки поблизу кінців включень спостерігається взаємне проникнення різнорідних матеріалів. Щоб уникнути вказаних протиріч, аналогічно до моделі Комніоу для міжфазної тріщини [16], поблизу кінця включення вводимо область контакту між відшарованою межею пружного тіла та включенням. Контактну задачу для відшарованого включення в однорідному середовищі розглянуто в роботі [1], а для міжфазної напівнескінченної тріщини – в роботах [2, 10, 11, 14].

1. Постановка задачі. Розглянемо дві пружні півплощини: верхню $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$, і нижню, $0 \leq r < \infty$, $-\pi \leq \vartheta \leq 0$, з модулями зсуву G_1 , G_2 та коефіцієнтами Пуассона ν_1 , ν_2 , відповідно, жорстко з'єднаних між собою вздовж частини $\vartheta = 0$ їхньої спільної межі. На іншій частині $\vartheta = \pm\pi$ межі розміщене тонке жорстке включення, нижня сторона $\vartheta = -\pi$ якого з'єднана з нижньою півплощиною, а верхня сторона $\vartheta = \pi$ відшарована від верхньої півплощини. Тобто між включенням і верхньою півплощиною утворилася напівнескінченна тріщина $\vartheta = \pm\pi$. До верхнього берега $\vartheta = \pi$ тріщини на відстані $r = a$ від її вершини прикладено зосереджені нормальну P і дотичну Q сили (рис. 1). Приймаємо, що поблизу вершини тріщини її береги контактують в області $0 < r \leq r_0$ невідомого розміру r_0 , де нормальні та дотичні напруження пов'язані законом тертя Амонтона.

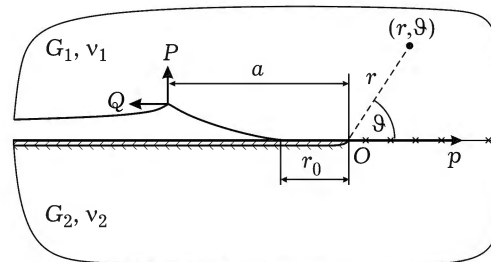



Рис. 1

Крайові умови задачі мають вигляд

$$u_r^{(1)} \Big|_{\vartheta=0} = u_r^{(2)} \Big|_{\vartheta=0}, \quad u_\vartheta^{(1)} \Big|_{\vartheta=0} = u_\vartheta^{(2)} \Big|_{\vartheta=0}, \quad \sigma_\vartheta^{(1)} \Big|_{\vartheta=0} = \sigma_\vartheta^{(2)} \Big|_{\vartheta=0},$$

 v.i.ostryk@gmail.com

$$\begin{aligned}
\tau_{r\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=0} &= \tau_{r\vartheta}^{(2)}|_{\vartheta=0}, & u_r^{(2)}|_{\vartheta=-\pi} &= 0, & u_\vartheta^{(2)}|_{\vartheta=-\pi} &= 0, & 0 \leq r < \infty, \\
u_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= 0, & \tau_{r\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= \mu_0 \sigma_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=\pi}, & 0 < r \leq r_0, \\
\sigma_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= -P\delta(r-a), & \tau_{r\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= Q\delta(r-a), & r_0 < r < \infty,
\end{aligned} \tag{1}$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя, $\delta(r-a)$ – дельта-функція Дірака. При цьому знак при μ_0 у восьмій рівності із (1) вибрано за припущення, що для радіальних переміщень в області контакту виконується умова

$$u_r^{(1)}|_{\vartheta=\pi} > 0, \quad 0 < r \leq r_0, \tag{2}$$

яку необхідно перевірити після розв'язання задачі.

2. Інтегральне рівняння задачі. Розглянемо основну змішану крайову задачу для кусково-однорідної площини з напівнескінченим розрізом на межі різних півплощин, якщо на його верхньому березі задано напруження, а на нижньому – нульові переміщення. Крайові умови цієї задачі складаються з перших шести умов із (1) на лінії з'єднання півплощин і нижньому березі розрізу та двох умов на його верхньому березі:

$$\sigma_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=\pi} = \sigma(r), \quad \tau_{r\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=\pi} = \tau(r), \quad 0 \leq r < \infty. \tag{3}$$

Розв'язок такої задачі отримуємо методом інтегрального перетворення Мелліна за радіальною координатою r . На межі півплощин, зокрема, маємо

$$\begin{aligned}
G_1 u_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [A_1(s)\bar{\sigma}(s) + A_2(s)\bar{\tau}(s)] \sin \pi s \frac{r^{-s}}{s\Delta(s)} ds, \\
G_1 u_r^{(1)}|_{\vartheta=\pi} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [-A_2(s)\bar{\sigma}(s) + A_1(s)\bar{\tau}(s)] \sin \pi s \frac{r^{-s}}{s\Delta(s)} ds, \\
\sigma_\vartheta^{(1)}|_{\vartheta=0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [B_1(s)\bar{\sigma}(s) + B_2(s)\bar{\tau}(s)] \frac{r^{-s-1}}{\Delta(s)} ds, \\
\tau_{r\vartheta}^{(1)}|_{\vartheta=0} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [-B_2(s)\bar{\sigma}(s) + B_1(s)\bar{\tau}(s)] \frac{r^{-s-1}}{\Delta(s)} ds, \\
\sigma_\vartheta^{(2)}|_{\vartheta=-\pi} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [C_1(s)\bar{\sigma}(s) + C_2(s)\bar{\tau}(s)] \frac{r^{-s-1}}{\Delta(s)} ds, \\
\tau_{r\vartheta}^{(2)}|_{\vartheta=-\pi} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [-C_2(s)\bar{\sigma}(s) + C_1(s)\bar{\tau}(s)] \frac{r^{-s-1}}{\Delta(s)} ds, \quad -\frac{1}{2} < c < 0,
\end{aligned}$$

$$A_1(s) = (a_{11} \sin^2 \pi s + a_{12} \cos^2 \pi s) \cos \pi s,$$

$$A_2(s) = (a_{21} \sin^2 \pi s + a_{22} \cos^2 \pi s) \sin \pi s,$$

$$B_1(s) = (b_{11} \sin^2 \pi s + b_{12} \cos^2 \pi s) \cos \pi s,$$

$$B_2(s) = (b_{21} \sin^2 \pi s + b_{22} \cos^2 \pi s) \sin \pi s,$$

$$C_1(s) = c_1 \sin^2 \pi s + c_2 \cos^2 \pi s, \quad C_2(s) = c_3 \sin \pi s \cos \pi s,$$

$$a_{11} = \frac{4\alpha_2^2}{\alpha_2 + 1} \bar{G}^2 + \alpha_2 \left(3\alpha_1 - 1 - 4 \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 + 1} \right) \bar{G} - \frac{\alpha_1(\alpha_2 - 1)^2}{\alpha_2 + 1},$$

$$\begin{aligned}
a_{12} &= -\varepsilon b_{12}, & a_{21} &= -c_1 \delta, \\
a_{22} &= x_2 \left(2(x_1 - 1) + \frac{(x_1 + 1)(x_2 - 1)}{x_2 + 1} \right) \bar{G} + \frac{x_1(x_1 - 1)(x_2 + 1)}{x_1 + 1}, \\
b_{11} &= \frac{1}{x_2 + 1} [(x_1 + 1)(x_2 - 1)^2 - 4x_2(x_2 + 1)\bar{G}], & b_{12} &= (x_1 + 1)(x_2 + 1), \\
b_{21} &= -\frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} c_1, & b_{22} &= -(x_1 - 1)(x_2 + 1), \\
c_1 &= 4x_2 \bar{G} + (x_1 - 1)(x_2 - 1), & c_2 &= -b_{12}, & c_3 &= 2(x_1 x_2 - 1), \\
\varepsilon &= \frac{x_2}{x_2 + 1} \bar{G} + \frac{x_1}{x_1 + 1}, & \delta &= \frac{1}{b_{12}} [x_2(x_1 - 1)\bar{G} - x_1(x_2 - 1)], & \bar{G} &= \frac{G_1}{G_2}, \\
\bar{\sigma}(s) &= \int_0^\infty \sigma(y) y^s dy, & \bar{\tau}(s) &= \int_0^\infty \tau(y) y^s dy, \\
\Delta(s) &= -\frac{1}{b_{12}} (\alpha \sin^4 \pi s - \beta \sin^2 \pi s \cos^2 \pi s + \gamma \cos^4 \pi s),
\end{aligned}$$

$$\alpha = c_1^2, \quad \beta = 2b_{12}c_1 - c_3^2, \quad \gamma = b_{12}^2, \quad x_1 = 3 - 4v_1, \quad x_2 = 3 - 4v_2. \quad (4)$$

Характеристичний визначник $\Delta(s)$ із (4) з точністю до множника збігається з відповідним визначником із монографії [13, с. 221], якщо в останньому покласти $\lambda = \operatorname{ctg}^2 \pi s$. У часткових випадках однорідної площини з розрізом ($G_1 = G_2$, $v_1 = v_2$) і півплощини ($G_2 = \infty$) розв'язок (4) збігається з розв'язком основної змішаної задачі для клина, одна грань якого закріплена, а на іншій задано напруження [12], якщо кут розхилу клина взяти 2π і π відповідно.

Введемо невідому функцію контактної тиску

$$q(r) = -\sigma_9^{(1)}|_{\vartheta=\pi}, \quad 0 < r \leq r_0, \quad q(r) = 0, \quad r_0 < r < \infty. \quad (5)$$

Поклавши у (4) згідно з (5) і останніми трьома рівностями з (1)

$$\bar{\sigma}(s) = -Pa^s - \int_0^{r_0} q(y) y^s dy, \quad \bar{\tau}(s) = Qa^s - \mu_0 \int_0^{r_0} q(y) y^s dy, \quad (6)$$

виконаємо всі крайові умови з (1), окрім сьомої умови на колові переміщення в області контакту.

Підставимо колові переміщення $u_9|_{\vartheta=\pi}$ із (4) у сьому з умов (1), виконаємо заміни

$$s = -i\tau, \quad r = r_0 e^{-\xi}, \quad y = r_0 e^{-\eta}, \quad a = r_0 e^{-t_0} \quad (7)$$

і перейдемо до нової невідомої функції

$$\varphi(\eta) = \frac{r_0}{P} q(r_0 e^{-\eta}) e^{-\eta}, \quad 0 < \eta < \infty. \quad (8)$$

Отримаємо інтегральне рівняння

$$\int_0^\infty k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta = f(\xi), \quad 0 < \xi < \infty, \quad (9)$$

де

$$k(\xi - \eta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{K}(\tau) e^{-i\tau(\xi - \eta)} d\tau, \quad \mathcal{K}(\tau) = \frac{\lambda(-i\tau)}{-i\tau\Delta(-i\tau)},$$

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda_1(-i\tau)}{-i\tau\Delta(-i\tau)} e^{-i\tau(\xi - t_0)} d\tau,$$

$$\lambda(s) = [A_1(s) + \mu_0 A_2(s)] \sin \pi s, \quad \lambda_1(s) = \left[-A_1(s) + \frac{Q}{P} A_2(s) \right] \sin \pi s.$$

Праву частину інтегрального рівняння (9) після перетворення інтеграла за теорією лишків подамо у вигляді

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=\delta_k}^4 f_{kj} e^{-(k-s_j)\xi}, \quad \delta_0 = 3, \quad \delta_k = 1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$f_{kj} = \frac{1}{\pi\alpha_1} \frac{\lambda_1(s_j)}{(k - s_j) \prod_{m=1, m \neq j}^4 \sin \pi(s_m - s_j)} e^{(k-s_j)t_0},$$

$$k = 0, 1, \dots, \quad j = \delta_k, \dots, 4,$$

$$s_j = \frac{(-1)^j}{2\pi i} \ln \frac{2\alpha_2 \bar{G} - \alpha_1 - \alpha_2 + (-1)^j \sqrt{D}}{2(\alpha_2 \bar{G} + 1)}, \quad s_{j+2} = -s_j, \quad j = 1, 2,$$

$$D = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 - 4\alpha_2 b_{12} \bar{G}, \quad (10)$$

де s_j , $j = 1, \dots, 4$, – корені рівняння $\Delta(s) = 0$ зі смуги $-\frac{1}{2} < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2}$. При цьому

$$\Delta(s) = \alpha_1 \prod_{j=1}^4 \sin \pi(s - s_j), \quad \alpha_1 = -\frac{\alpha + \beta + \gamma}{b_{12}}.$$

3. Розв'язання інтегрального рівняння. Знайдемо розв'язок інтегрального рівняння (9) методом Вінера – Гопфа [7].

Розповсюдимо інтегральне рівняння (9) на всю числову вісь, поклавши $\varphi(\xi) = 0$, якщо $-\infty < \xi \leq 0$, і застосуємо до нього інтегральне перетворення Фур'є. Введемо невідомі функції комплексної змінної

$$\Phi^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \varphi(\xi) e^{iz\xi} d\xi, \quad \Phi^-(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{iz\xi} d\xi \int_0^{\infty} k(\xi - \eta) \varphi(\eta) d\eta, \quad (11)$$

аналітичні відповідно у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$ ($c^+ < 0$), $\operatorname{Im} z < c^-$ ($c^- > 0$). Із застосуванням теореми про згортку отримаємо функціональне рівняння

$$\mathcal{K}(z)\Phi^+(z) - \Phi^-(z) = F^+(z), \quad -\infty < \operatorname{Re} z < \infty, \quad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-, \quad (12)$$

права частина якого має вигляд

$$F^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) e^{iz\xi} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=\delta_k}^4 \frac{f_{kj}}{k - s_j - iz}. \quad (13)$$

Факторизуємо коефіцієнт $\mathcal{K}(z)$ рівняння (12):

$$\mathcal{K}(z) = \alpha_0 \mathcal{K}^+(z) \mathcal{K}^-(z), \quad \alpha_0 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$\mathcal{K}^{\pm}(z) = \frac{\prod_{j=1}^2 \Gamma(s_j \mp iz) \Gamma(1 - s_j \mp iz)}{\Gamma(1 \mp iz) \prod_{j=1}^3 \Gamma(1/2 \pm \sigma_j \mp iz)}, \quad (14)$$

де $\frac{1}{2} - \sigma_j$, $j = 1, 2, 3$, – корені рівняння $\frac{\lambda(s)}{\sin \pi s} = 0$ зі змуги $0 < \operatorname{Re} s < 1$. Вони виражаються через корені $\tau_j = \operatorname{tg} \pi \sigma_j$, $j = 1, 2, 3$, кубічного рівняння

$$\alpha_{12} \tau^3 + \mu_0 \alpha_{22} \tau^2 + \alpha_{11} \tau + \mu_0 \alpha_{21} = 0.$$

При цьому

$$\lambda(s) = \alpha_2 \sin \pi s \prod_{j=1}^3 \cos \pi(s + \sigma_j), \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_{12}}{3} \prod_{j=1}^3 \cos \pi \sigma_j.$$

Функції $\mathcal{K}^+(z)$, $\mathcal{K}^-(z)$ є аналітичними та відмінними від нуля у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$, $\operatorname{Im} z < c^-$ відповідно. З урахуванням (14) рівняння (12) запишемо так:

$$\alpha_0 \mathcal{K}^+(z) \Phi^+(z) - \frac{\Phi^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = \frac{F^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)}, \quad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-. \quad (15)$$

Праву частину рівняння (15) подамо як різницю аналітичних у півплощинах $\operatorname{Im} z > c^+$, $\operatorname{Im} z < c^-$ функцій:

$$\frac{F^+(z)}{\mathcal{K}^-(z)} = f^+(z) - f^-(z), \quad f^\pm(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty + ic^\pm}^{\infty + ic^\pm} \frac{F^+(\zeta)}{\mathcal{K}^-(\zeta)(\zeta - z)} d\zeta. \quad (16)$$

Розвинувши інтеграл для $f^+(z)$ у ряд за лишками підінтегральної функції, знаходимо

$$f^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=\delta_k}^4 \frac{f_{kj}}{\mathcal{K}^-(-i(k - s_j))(k - s_j - iz)}. \quad (17)$$

У результаті рівняння (12) зводимо до вигляду

$$\alpha_0 \mathcal{K}^+(z) \Phi^+(z) - f^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{\mathcal{K}^-(z)} - f^-(z), \quad c^+ < \operatorname{Im} z < c^-. \quad (18)$$

Ліва і права частини рівняння (18) аналітично продовжують одна одну на всю комплексну площину і є довільною цілою функцією. Із асимптотичних оцінок

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^+(z) &= O(z^{-1/2-\sigma}), \quad \Phi^+(z) = o(1), \quad f^+(z) = O(z^{-1}), \quad |z| \rightarrow \infty, \\ \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\mu_0(\alpha_1 - 1)}{\alpha_1 + 1}, \quad 0 \leq \sigma < \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (19)$$

виливає, що ця ціла функція тождоно дорівнює нулеві. Звідси знаходимо розв'язок функціонального рівняння (12):

$$\Phi^+(z) = \frac{f^+(z)}{\alpha_0 \mathcal{K}^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = \mathcal{K}^-(z) f^-(z). \quad (20)$$

Щоб у точці $r = r_0$ виконувалась умова обмеженості напружень $\sigma_{\theta}^{(1)}|_{\theta=\pi}$, яка еквівалентна оцінці $\Phi^+(z) = o(z^{-1})$, $|z| \rightarrow \infty$, вимагатимемо виконання рівності $\lim_{|z| \rightarrow \infty} z f^+(z) = 0$, яку з огляду на (17) запишемо у вигляді

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=\delta_k}^4 \frac{f_{kj}}{\mathcal{K}^-(-i(k - s_j))} = 0. \quad (21)$$

Рівняння (21) відносно невідомої t_0 , яку містять коефіцієнти f_{kj} із (10), слугує для визначення розміру $r_0 = ae^{t_0}$ області контакту.

На підставі умови (21) маємо такі асимптотичні оцінки:

$$\begin{aligned}\Phi^+(z) &= O(z^{-3/2+\sigma}), & |z| \rightarrow \infty, \\ \sigma_9^{(1)} \Big|_{9=\pi} &= O((r_0 - r)^{1/2-\sigma}), & r \rightarrow r_0 - 0.\end{aligned}\quad (22)$$

Поведінка нормальних напружень на краю області контакту, яка встановлюється другою із рівностей (22), є характерною для фрикційної взаємодії пружного та абсолютно жорсткого тіл [8].

Оберненим перетворенням Фур'є першої рівності з (11) знаходимо розв'язок інтегрального рівняння (9):

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^+(\tau) e^{-i\tau\xi} d\tau, \quad 0 < \xi < \infty. \quad (23)$$

4. Напруження і переміщення на межі півплощин. Розвинувши інтеграл із (23) з урахуванням (20) у ряд за лишками підінтегральної функції та скориставшись замінами (5), (7), (8), отримаємо контактні напруження:

$$\begin{aligned}\sigma_9^{(1)} \Big|_{9=\pi} &= \sqrt{2\pi} \frac{P}{r_0} \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta(1/2 + \sigma_j)}{\lambda'(-1/2 - \sigma_j)} \sum_{k=0}^{\infty} (k + 1/2 + \sigma_j) \times \\ &\quad \times f^+(-i(k + 1/2 + \sigma_j)) \mathcal{K}^-(-i(k + 1/2 + \sigma_j)) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{k-1/2+\sigma_j} - \\ &\quad - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{P}{r_0} \frac{b_{12}}{a_{12}} \sum_{k=1}^{\infty} k f^+(-ik) \mathcal{K}^-(-ik) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{k-1}, \quad 0 < r < r_0, \\ \lambda'(-1/2 - \sigma_j) &= -\pi\alpha_2 \cos \pi\sigma_j \prod_{m=1, m \neq j}^3 \sin \pi(\sigma_j - \sigma_m).\end{aligned}\quad (24)$$

Напруження на лінії продовження тріщини на підставі третьої і четвертої рівностей із (4) запишемо у вигляді комплексної комбінації:

$$(\sigma_9^{(1)} + i\tau_{r_9}^{(1)}) \Big|_{9=0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{B(s)}{\Delta(s)} [\bar{\sigma}(s) + i\bar{\tau}(s)] r^{-s-1} ds, \quad (25)$$

де

$$B(s) = B_1(s) - iB_2(s),$$

і виразимо їх через розв'язок (20) функціонального рівняння (12):

$$\begin{aligned}(\sigma_9^{(1)} + i\tau_{r_9}^{(1)}) \Big|_{9=0} &= -\frac{e^\xi}{2\pi r_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B(-i\tau)}{\Delta(i\tau)} [(P - iQ)e^{i\tau t_0} + \\ &\quad + \sqrt{2\pi}(1 + i\mu_0)P\Phi^+(\tau)] e^{-i\tau\xi} d\tau.\end{aligned}\quad (26)$$

Перетворивши інтеграл із (26) за теорією лишків, з урахуванням тотожності

$$\bar{A}(s)B(s) = b_{12}(\varepsilon \cos \pi s - i\delta \sin \pi s) \left(\cos \pi s - i \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} \sin \pi s \right) \Delta(s), \quad (27)$$

згідно з якою $\bar{A}(s_j)B(s_j) = 0$, $j = 1, \dots, 4$, де $A(s) = A_1(s) - iA_2(s)$, отримуємо

$$(\sigma_9^{(1)} + i\tau_{r_9}^{(1)}) \Big|_{9=0} = \sqrt{2\pi}(1 + i\mu_0) \frac{P}{r_0} \sum_{j=1}^3 \frac{B(-1/2 - \sigma_j)}{\lambda'(-1/2 - \sigma_j)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k+1/2 + \sigma_j) f^+(-i(k+1/2 + \sigma_j)) \times \\
& \times \mathcal{K}^-(-i(k+1/2 + \sigma_j)) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{k-1/2+\sigma_j} - \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1+i\mu_0) \frac{P}{r_0} \frac{b_{12}}{a_{12}} \times \\
& \times \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k f^+(-ik) \mathcal{K}^-(-ik) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{k-1}, \quad 0 < r < r_0, \\
(\sigma_9^{(1)} + i\tau_{r9}^{(1)})\Big|_{9=0} &= \sqrt{2\pi} (1+i\mu_0) \frac{P}{i\alpha_0 r_0} \sum_{j=1}^4 \frac{B(-s_j)}{\Delta'(s_j)} \times \\
& \times \sum_{k=\omega_j}^{\infty} (-1)^k \frac{f^+(i(k-s_j))}{\mathcal{K}^+(i(k-s_j))} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{s_j-k-1} - \\
& - \frac{P-iQ}{a+r} \sum_{j=1}^4 (-1)^{\omega_j} \frac{B(s_j)}{\Delta'(s_j)} \left(\frac{r}{a}\right)^{\omega_j-s_j-1}, \quad r_0 < r < \infty, \\
\omega_1 = \omega_2 = 1, \quad \omega_3 = \omega_4 = 0. & \tag{28}
\end{aligned}$$

Напруження на лінії з'єднання включення і нижньої півплощини з огляду на п'яту та шосту рівності з (4) запишемо так:

$$(\sigma_9^{(2)} + i\tau_{r9}^{(2)})\Big|_{9=-\pi} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{C(s)}{\Delta(s)} [\bar{\sigma}(s) + i\bar{\tau}(s)] r^{-s-1} ds, \tag{29}$$

де

$$C(s) = C_1(s) - iC_2(s).$$

Із порівняння рівностей (25) і (29) випливає, що напруження $\sigma_9^{(1)}\Big|_{9=0}$, $\tau_{r9}^{(1)}\Big|_{9=0}$ із (28) переходять у напруження $\sigma_9^{(2)}\Big|_{9=-\pi}$, $\tau_{r9}^{(2)}\Big|_{9=-\pi}$ формальною заміною $B(s)$ на $C(s)$ із вилученням множників $(-1)^k$, $(-1)^{k-1}$. При цьому використовується рівність $A(s_j)C(s_j) = 0$, $j = 1, \dots, 4$, яка випливає із тотожності (27) і такої:

$$B(s) = -\left(\cos \pi s - i \frac{x_2 - 1}{x_2 + 1} \sin \pi s\right) C(s). \tag{30}$$

Зі співвідношень (24), (28), (29) отримуємо асимптотичну поведінку напружень на межі півплощин в околі кінця включення:

$$\begin{aligned}
\sigma_9^{(1)}\Big|_{9=\pi} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^3 \frac{1}{\gamma_1^{(j)} - \mu_0 \gamma_2^{(j)}} \frac{K_I^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} + O(1), \\
\sigma_9^{(1)}\Big|_{9=0} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^3 \frac{K_I^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} + O(1), \\
\tau_{r9}^{(1)}\Big|_{9=0} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^3 \frac{K_{II}^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} + O(1), \\
\sigma_9^{(2)}\Big|_{9=-\pi} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^3 \frac{\gamma_3^{(j)} - \mu_0 \gamma_4^{(j)}}{\gamma_1^{(j)} - \mu_0 \gamma_2^{(j)}} \frac{K_I^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} + O(1),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tau_{r\theta}^{(2)}|_{\theta=-\pi} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=1}^3 \frac{\mu_0 \gamma_3^{(j)} + \gamma_4^{(j)}}{\gamma_1^{(j)} - \mu_0 \gamma_2^{(j)}} \frac{K_I^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} + O(1), \quad r \rightarrow 0, \\
K_I^{(j)} &= 2\pi P r_0^{-1/2-\sigma_j} (\gamma_1^{(j)} - \mu_0 \gamma_2^{(j)}) \frac{\Delta(1/2 + \sigma_j)}{\lambda'(-1/2 - \sigma_j)} (1/2 + \sigma_j) \times \\
&\quad \times f^+(-i(1/2 + \sigma_j)) \mathcal{K}^-(-i(1/2 + \sigma_j)), \\
K_{II}^{(j)} &= \frac{\mu_0 \gamma_1^{(j)} + \gamma_2^{(j)}}{\gamma_1^{(j)} - \mu_0 \gamma_2^{(j)}} K_I^{(j)}, \quad \gamma_1^{(j)} = \operatorname{Re} \frac{B(-1/2 - \sigma_j)}{\Delta(1/2 + \sigma_j)}, \\
\gamma_2^{(j)} &= \operatorname{Im} \frac{B(-1/2 - \sigma_j)}{\Delta(1/2 + \sigma_j)}, \quad \gamma_3^{(j)} = \operatorname{Re} \frac{C(-1/2 - \sigma_j)}{\Delta(1/2 + \sigma_j)}, \\
\gamma_4^{(j)} &= \operatorname{Im} \frac{C(-1/2 - \sigma_j)}{\Delta(1/2 + \sigma_j)}, \quad j = 1, 2, 3, \tag{31}
\end{aligned}$$

де $K_I^{(j)}$, $K_{II}^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, – коефіцієнти інтенсивності напружень.

Згідно з асимптотичними формулами (31) сингулярне поле напружень в околі точки $r = 0$ характеризується трьома особливостями з показниками $1/2 - \sigma_j$, $j = 1, 2, 3$. Ці показники є дійсними, якщо відношення модулів зсуву \bar{G} не перевищує певного значення \bar{G}_* , яке залежить від параметрів ν_1 , ν_2 , μ_0 . Наприклад, для $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $\mu_0 = 0.25$ маємо $\bar{G}_* \approx 6$. Якщо ж $\bar{G} > \bar{G}_*$, два з цих показників особливостей є комплексно-спряженими, причому їх дійсна частина є більшою, ніж третій показник. У такому випадку, незважаючи на введenu область контакту берегів тріщини, розв'язок задачі є осцилюючим, тобто фізично суперечливим. Отже, розглянута тут модель Куміноу для міжфазного включення є коректною лише у випадку $\bar{G} \leq \bar{G}_*$.

Для перевірки умови (2) знайдемо радіальні переміщення в області контакту берегів тріщини. Із другої рівності (4) маємо

$$\begin{aligned}
G_1 u_r^{(1)}|_{\theta=\pi} &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D(-i\tau)}{\tau \Delta(i\tau)} [(P - iQ)e^{i\tau t_0} + \\
&\quad + \sqrt{2\pi}(1 + i\mu_0)P\Phi^+(\tau)] e^{-i\tau \xi} d\tau, \tag{32}
\end{aligned}$$

де

$$D(s) = -iA(s) \sin \pi s.$$

Із (32) аналогічно до першої з рівностей (28) з урахуванням тотожності

$$D(s) = (\delta \sin \pi s - i\epsilon \cos \pi s)C(s) \sin \pi s, \tag{33}$$

згідно з якою, враховуючи (30), $\bar{A}(s_j)D(s_j) = 0$, $j = 1, \dots, 4$, отримуємо

$$\begin{aligned}
u_r^{(1)}|_{\theta=\pi} &= -\sqrt{2\pi} \frac{P}{G_1} \operatorname{Re}(1 + i\mu_0) \sum_{j=1}^3 \frac{D(-1/2 - \sigma_j)}{\lambda'(-1/2 - \sigma_j)} \sum_{k=0}^{\infty} f^+(-i(k + 1/2 + \sigma_j)) \times \\
&\quad \times \mathcal{K}^-(-i(k + 1/2 + \sigma_j)) \left(\frac{r}{r_0}\right)^{k+1/2+\sigma_j}, \quad 0 < r < r_0. \tag{34}
\end{aligned}$$

5. Асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі кінця включення. Для знаходження поля напружень і переміщень всередині півплощин поблизу краю включення скористаємося, як і в роботі [9] для міжфазної тріщини, розподілом напружень (31) на межі півплощин в околі кінця включення.

Для верхньої півплощини $0 \leq \vartheta \leq \pi$ комплексний потенціал Колосова – Мухелішвілі у випадку заданих на її межі напружень є таким [6]:

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\tau_0}^{\infty} \frac{p_1(s)}{s-z} ds, \quad p_1(r) = -\frac{1}{2G_1} (\sigma_{\vartheta}^{(1)} - i\tau_{r\vartheta}^{(1)}) \Big|_{\vartheta=0}, \quad 0 < r < \infty,$$

$$p_1(-r) = -\frac{1-i\mu_0}{2G_1} \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi}, \quad 0 < r \leq r_0, \quad z = x + iy = re^{i\vartheta}, \quad (35)$$

і, згідно з формулами (31), має асимптотичну поведінку

$$\Phi_1(z) = \frac{\mu_0 + i}{2G_1} \sum_{j=1}^3 K_0^{(j)} \left[1 - (\gamma_1^{(j)} + i\gamma_2^{(j)})(z-1)^{1/2-\sigma_j} \right] z^{-1/2+\sigma_j} + O(1),$$

$$z \rightarrow 0,$$

$$K_0^{(j)} = -\frac{1}{2\sqrt{2\pi}(\gamma_1^{(j)} - \mu_0\gamma_2^{(j)})a^{1/2+\sigma_j} \cos \pi\sigma_j} K_I^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (36)$$

Після перетворень із (36) отримуємо

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2G_1} \sum_{j=1}^3 K_0^{(j)} (\tilde{\gamma}_1^{(j)} + i\tilde{\gamma}_2^{(j)}) z^{-1/2+\sigma_j} + O(1),$$

$$\bar{\Phi}_1(z) = \frac{1}{2G_1} \sum_{j=1}^3 K_0^{(j)} (\tilde{\gamma}_1^{(j)} + i\tilde{\gamma}_2^{(j)}) z^{-1/2+\sigma_j} + O(1), \quad z \rightarrow 0,$$

$$\tilde{\gamma}_1^{(j)} = \mu_0\gamma_1^{(j)} - \gamma_2^{(j)}, \quad \tilde{\gamma}_2^{(j)} = \gamma_1^{(j)} + \mu_0\gamma_2^{(j)},$$

$$\hat{\gamma}_1^{(j)} = \mu_0\gamma_1^{(j)} + \gamma_2^{(j)}, \quad \hat{\gamma}_2^{(j)} = \mu_0\gamma_2^{(j)} - \gamma_1^{(j)},$$

$$\gamma_1^{(j)} = 1 - \gamma_1^{(j)} \sin \pi\sigma_j + \gamma_2^{(j)} \cos \pi\sigma_j, \quad \gamma_2^{(j)} = -\gamma_1^{(j)} \cos \pi\sigma_j - \gamma_2^{(j)} \sin \pi\sigma_j,$$

$$\gamma_1^{(j)} = 1 - \gamma_1^{(j)} \sin \pi\sigma_j - \gamma_2^{(j)} \cos \pi\sigma_j, \quad \gamma_2^{(j)} = -\gamma_1^{(j)} \cos \pi\sigma_j + \gamma_2^{(j)} \sin \pi\sigma_j,$$

$$j = 1, 2, 3. \quad (37)$$

Звідси за формулами Колосова [6]

$$\frac{1}{2G_1} (\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)}) = -4 \operatorname{Re} \Phi_1(z),$$

$$\frac{1}{2G_1} (\sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2i\tau_{xy}^{(1)}) = 2 [\bar{\Phi}_1(z) + \Phi_1(z) + (z - \bar{z})\Phi_1'(z)],$$

$$u_x^{(1)} - iu_y^{(1)} = -(z - \bar{z})\Phi_1(z) - \bar{\Phi}_1(z) - (3 - 4\nu)\overline{\Phi_1(z)},$$

$$\varphi_1'(z) = \Phi_1(z), \quad \varphi_1(0) = 0 \quad (38)$$

визначаємо асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі кінця включення у декартовій системі координат:

$$\sigma_x^{(1)} = -\sum_{j=1}^3 \frac{K_0^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} \left\{ \left[\left(\frac{5}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_1^{(j)} + \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right] \cos \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta + \right.$$

$$\left. + \left[\left(\frac{5}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_2^{(j)} + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right] \sin \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \left[\tilde{\gamma}_1^{(j)} \cos \left(\frac{5}{2} - \sigma_j \right) \vartheta + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \sin \left(\frac{5}{2} - \sigma_j \right) \vartheta \right] \right\} + O(1),$$

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(1)} &= \sum_{j=1}^3 \frac{K_0^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} \left\{ \left[\left(-\frac{3}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_1^{(j)} + \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right] \cos\left(\frac{1}{2} - \sigma_j\right) \vartheta + \right. \\
&\quad + \left[\left(-\frac{3}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_2^{(j)} + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right] \sin\left(\frac{1}{2} - \sigma_j\right) \vartheta + \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \left[\tilde{\gamma}_1^{(j)} \cos\left(\frac{5}{2} - \sigma_j\right) \vartheta + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \sin\left(\frac{5}{2} - \sigma_j\right) \vartheta \right] \right\} + O(1), \\
\tau_{xy}^{(1)} &= \sum_{j=1}^3 \frac{K_0^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_2^{(j)} + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right] \cos\left(\frac{1}{2} - \sigma_j\right) \vartheta - \right. \\
&\quad - \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_1^{(j)} + \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right] \sin\left(\frac{1}{2} - \sigma_j\right) \vartheta - \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \left[\tilde{\gamma}_1^{(j)} \sin\left(\frac{5}{2} - \sigma_j\right) \vartheta - \tilde{\gamma}_2^{(j)} \cos\left(\frac{5}{2} - \sigma_j\right) \vartheta \right] \right\} + O(1), \\
u_x^{(1)} &= -\sum_{j=1}^3 K_0^{(j)} r^{1/2+\sigma_j} \left\{ \left[\left(\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_1^{(j)} + \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right] \cos\left(\frac{1}{2} + \sigma_j\right) \vartheta - \right. \\
&\quad - \left[\left(\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_2^{(j)} + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right] \sin\left(\frac{1}{2} + \sigma_j\right) \vartheta - \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \left[\tilde{\gamma}_1^{(j)} \cos\left(\frac{3}{2} - \sigma_j\right) \vartheta + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \sin\left(\frac{3}{2} - \sigma_j\right) \vartheta \right] \right\} + O(r), \\
u_y^{(1)} &= -\sum_{j=1}^3 K_0^{(j)} r^{1/2+\sigma_j} \left\{ \left[\left(\mathbf{x}_1 - \frac{1}{2} - \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_1^{(j)} - \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right] \sin\left(\frac{1}{2} + \sigma_j\right) \vartheta + \right. \\
&\quad + \left[\left(\mathbf{x}_1 - \frac{1}{2} - \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_2^{(j)} - \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right] \cos\left(\frac{1}{2} + \sigma_j\right) \vartheta - \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \left[\tilde{\gamma}_1^{(j)} \sin\left(\frac{3}{2} - \sigma_j\right) \vartheta - \tilde{\gamma}_2^{(j)} \cos\left(\frac{3}{2} - \sigma_j\right) \vartheta \right] \right\} + O(r), \\
&\hspace{15em} r \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

$$K_0^{(j)} = \frac{1}{2G_1(1/2 + \sigma_j)} K_0^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (39)$$

За допомогою формул [6]

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)} + \sigma_\vartheta^{(1)} &= \sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)}, \\
\sigma_\vartheta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} + 2i\tau_{r\vartheta}^{(1)} &= (\sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2i\tau_{xy}^{(1)})e^{2i\vartheta}, \\
u_r^{(1)} - iu_\vartheta^{(1)} &= (u_x^{(1)} - iu_y^{(1)})e^{i\vartheta}
\end{aligned} \quad (40)$$

знаходимо асимптотичні розподіли компонент пружного поля у полярній системі координат:

$$\begin{aligned}
\sigma_r^{(1)} &= -\sum_{j=1}^3 \frac{K_0^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_1^{(j)} + \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right] \cos\left(\frac{3}{2} + \sigma_j\right) \vartheta - \right. \\
&\quad \left. - \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_2^{(j)} + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right] \sin\left(\frac{3}{2} + \sigma_j\right) \vartheta + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{5}{2} - \sigma_j \right) \left[\tilde{\gamma}_1^{(j)} \cos \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \sin \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta \right] \Big\} + O(1), \\
\sigma_{\vartheta}^{(1)} &= \sum_{j=1}^3 \frac{K_0^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_1^{(j)} + \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right] \cos \left(\frac{3}{2} + \sigma_j \right) \vartheta - \right. \\
& \quad - \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_2^{(j)} + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right] \sin \left(\frac{3}{2} + \sigma_j \right) \vartheta - \\
& \quad \left. - \left(\frac{3}{2} + \sigma_j \right) \left[\tilde{\gamma}_1^{(j)} \cos \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \sin \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta \right] \right\} + O(1), \\
\tau_{r\vartheta}^{(1)} &= \sum_{j=1}^3 \frac{K_0^{(j)}}{r^{1/2-\sigma_j}} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_1^{(j)} + \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right] \sin \left(\frac{3}{2} + \sigma_j \right) \vartheta + \right. \\
& \quad + \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_2^{(j)} + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right] \cos \left(\frac{3}{2} + \sigma_j \right) \vartheta - \\
& \quad \left. - \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \left[\tilde{\gamma}_1^{(j)} \sin \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta - \tilde{\gamma}_2^{(j)} \cos \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta \right] \right\} + O(1), \\
u_r^{(1)} &= - \sum_{j=1}^3 K_0^{(j)} r^{1/2+\sigma_j} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_1^{(j)} + \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right] \cos \left(\frac{3}{2} + \sigma_j \right) \vartheta - \right. \\
& \quad - \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_2^{(j)} + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right] \sin \left(\frac{3}{2} + \sigma_j \right) \vartheta + \\
& \quad \left. + \left(x_1 - \frac{1}{2} - \sigma_j \right) \left[\tilde{\gamma}_1^{(j)} \cos \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \sin \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta \right] \right\} + O(r), \\
u_{\vartheta}^{(1)} &= \sum_{j=1}^3 K_0^{(j)} r^{1/2+\sigma_j} \left\{ \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_1^{(j)} + \tilde{\gamma}_1^{(j)} \right] \sin \left(\frac{3}{2} + \sigma_j \right) \vartheta + \right. \\
& \quad + \left[\left(\frac{1}{2} + \sigma_j \right) \tilde{\gamma}_2^{(j)} + \tilde{\gamma}_2^{(j)} \right] \cos \left(\frac{3}{2} + \sigma_j \right) \vartheta + \\
& \quad \left. + \left(x_1 + \frac{1}{2} + \sigma_j \right) \left[\tilde{\gamma}_1^{(j)} \sin \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta - \tilde{\gamma}_2^{(j)} \cos \left(\frac{1}{2} - \sigma_j \right) \vartheta \right] \right\} + O(r), \\
& \qquad \qquad \qquad r \rightarrow 0. \tag{41}
\end{aligned}$$

Для нижньої півплощини $-\pi \leq \vartheta \leq 0$, перейшовши до нових змінних $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = x' + iy' = -z$, згідно з формулами (38), маємо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G_2} (\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)}) &= -4 \operatorname{Re} \Phi_2(z'), \\
\frac{1}{2G_2} (\sigma_y^{(2)} - \sigma_x^{(2)} + 2i\tau_{xy}^{(2)}) &= 2[\bar{\Phi}_2(z') + \Phi_2(z') + (z' - \bar{z}')\Phi_2'(z')], \\
u_x^{(2)} - iu_y^{(2)} &= (z' - \bar{z}')\Phi_2(z') + \bar{\varphi}_2(z') + (3 - 4\nu_2)\overline{\varphi_2(z')}, \\
\varphi_2'(z') &= \Phi_2(z'), \quad \varphi_2(0) = 0. \tag{42}
\end{aligned}$$

При цьому аналогічно до (35) для потенціалу Колосова – Мухелішвілі отримуємо

$$\begin{aligned}\Phi_2(z') &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_2(s)}{s-z'} ds, & p_2(r) &= -\frac{1}{2G_2} (\sigma_9^{(2)} - i\tau_{r9}^{(2)}) \Big|_{\vartheta=-\pi}, \\ p_2(-r) &= -\frac{1}{2G_2} (\sigma_9^{(1)} - i\tau_{r9}^{(1)}) \Big|_{\vartheta=0}, & 0 < r < \infty.\end{aligned}\quad (43)$$

На підставі асимптотичних формул (31) маємо

$$\begin{aligned}\Phi_2(z') &= -\frac{\mu_0 + i}{2G_2} \sum_{j=1}^3 K_0^{(j)} \left[\gamma_3^{(j)} + i\gamma_4^{(j)} - (\gamma_1^{(j)} + i\gamma_2^{(j)})(z-1)^{-1/2+\sigma_j} \right] z^{-1/2+\sigma_j} + \\ &+ O(1), \quad z' \rightarrow 0.\end{aligned}\quad (44)$$

Звідси

$$\begin{aligned}\Phi_2(z') &= -\frac{1}{2G_2} \sum_{j=1}^3 K_0^{(j)} (\tilde{\gamma}_3^{(j)} + i\tilde{\gamma}_4^{(j)}) z^{-1/2+\sigma_j} + O(1), \\ \bar{\Phi}_2(z') &= -\frac{1}{2G_2} \sum_{j=1}^3 K_0^{(j)} (\tilde{\gamma}_3^{(j)} + i\tilde{\gamma}_4^{(j)}) z^{-1/2+\sigma_j} + O(1), \quad z' \rightarrow 0, \\ \tilde{\gamma}_3^{(j)} &= \mu_0 \gamma_3'^{(j)} - \gamma_4^{(j)}, & \tilde{\gamma}_4^{(j)} &= \gamma_3'^{(j)} + \mu_0 \gamma_4'^{(j)}, \\ \tilde{\gamma}_3^{(j)} &= \mu_0 \gamma_3''^{(j)} + \gamma_4''^{(j)}, & \tilde{\gamma}_4^{(j)} &= \mu_0 \gamma_4''^{(j)} - \gamma_3''^{(j)}, \\ \gamma_3^{(j)} &= \gamma_1''^{(j)} + \gamma_3^{(j)} - 1, & \gamma_4^{(j)} &= -\gamma_2''^{(j)} + \gamma_4^{(j)}, \\ \gamma_3''^{(j)} &= \gamma_1'^{(j)} + \gamma_3^{(j)} - 1, & \gamma_4''^{(j)} &= -\gamma_2'^{(j)} - \gamma_4^{(j)}, \quad j = 1, 2, 3.\end{aligned}\quad (45)$$

Порівнявши асимптотичні вирази для $\Phi_1(z)$, $\bar{\Phi}_1(z)$ із (37) і $\Phi_2(z')$, $\bar{\Phi}_2(z')$ із (45), на підставі рівностей (38), (42) робимо висновок, що у нижній півплощині розподіли напружень і переміщень мають вигляд виразів (39), (41), де $-\pi \leq \vartheta \leq 0$, а $\tilde{\gamma}_1^{(j)}$, $\tilde{\gamma}_2^{(j)}$, $\tilde{\gamma}_1^{(j)}$, $\tilde{\gamma}_2^{(j)}$, G_1 , α_1 необхідно замінити відповідно на $-\tilde{\gamma}_3^{(j)}$, $-\tilde{\gamma}_4^{(j)}$, $-\tilde{\gamma}_3^{(j)}$, $-\tilde{\gamma}_4^{(j)}$, G_2 , α_2 , $j = 1, 2, 3$.

6. Випадок малої області контакту. У випадку задачі про напівнескінченну міжфазну тріщину, до кожного з берегів якої на відстані a від її вершини прикладено нормальну P і дотичну Q сили, коли $\frac{Q}{P} < 2$, відносний розмір області контакту її берегів $\frac{r_0}{a} \ll 1$ [2, 10, 11, 14]. У розглядуваній задачі припускаємо, що також $\frac{r_0}{a} \ll 1$ для невеликих значень відношення сил $\frac{Q}{P}$. У цьому випадку побудований вище розв'язок асимптотично спростимо, знехтувавши величиною e^{t_0} порівняно з одиницею.

Функція (17) із розв'язку (20) функціонального рівняння (12) набуває вигляду

$$f^+(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{f_{03}}{\mathcal{K}^-(is_1)(s_1 - iz)} - \frac{\bar{f}_{03}}{\mathcal{K}^-(i\bar{s}_1)(\bar{s}_1 - iz)} \right), \quad (46)$$

а рівняння (21) стає таким:

$$\cos \left(s_1' t_0 + \arg \frac{\tilde{f}_{03}}{\mathcal{K}^-(is_1)} \right) = 0, \quad s_1' = \text{Im } s_1, \quad \tilde{f}_{03} = \pi \alpha_1 f_{03} e^{-s_1 t_0}, \quad (47)$$

звідки визначаємо розмір області контакту

$$r_0 = e^{t_0}, \quad t_0 = -\frac{1}{s_1} \left(\frac{\pi}{2} + \arg \frac{\tilde{f}_{03}}{\mathcal{K}^{-}(-is_1)} \right). \quad (48)$$

При цьому вибрано корінь $\frac{\pi}{2}$ рівняння (47). Обґрунтування такого вибору міститься в [14].

Напруження і переміщення на межі півплощин із (24), (28), (29), (34) перетворюємо до вигляду

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= A_0 \left[F(r) - \sum_{j=1}^3 \frac{\Delta(1/2 + \sigma_j)}{\lambda'(-1/2 - \sigma_j)} F_{0j}(r) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-1/2 + \sigma_j} \right], \\ (\sigma_{\vartheta}^{(1)} + i\tau_{r\vartheta}^{(1)}) \Big|_{\vartheta=0} &= (1 + i\mu_0) A_0 \left[F(-r) - \sum_{j=1}^3 \frac{B(-1/2 - \sigma_j)}{\lambda'(-1/2 - \sigma_j)} F_{0j}(-r) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-1/2 + \sigma_j} \right], \\ (\sigma_{\vartheta}^{(2)} + i\tau_{r\vartheta}^{(2)}) \Big|_{\vartheta=-\pi} &= (1 + i\mu_0) A_0 \left[F(r) - \sum_{j=1}^3 \frac{C(-1/2 - \sigma_j)}{\lambda'(-1/2 - \sigma_j)} F_{0j}(r) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{-1/2 + \sigma_j} \right], \\ u_r^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi} &= A_0 \frac{r_0}{G_1} \operatorname{Re} (1 + i\mu_0) \sum_{j=1}^3 \frac{D(-1/2 - \sigma_j)}{\lambda'(-1/2 - \sigma_j)} F_{1j}(r) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{1/2 + \sigma_j}, \quad 0 < r < r_0, \\ A_0 &= 2s_1' \frac{P}{r_0} \left| \frac{f_{03}}{\mathcal{K}^{-}(-is_1)} \right|, \\ F(r) &= \frac{b_{12}}{\pi a_{12}} \frac{|\Gamma(1 + s_1)\Gamma(1 - s_1)|^2}{\prod_{m=1}^3 \Gamma(3/2 - \sigma_m)} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} 1 + s_1, 1 + \bar{s}_1, 1 - s_1, 1 - \bar{s}_1; \\ \frac{3}{2} - \sigma_1, \frac{3}{2} - \sigma_2, \frac{3}{2} - \sigma_3 \end{matrix}; \frac{r}{r_0} \right), \\ F_{mj}(r) &= \frac{\Gamma(1/2 + \sigma_j + s_1)\Gamma(1/2 + \sigma_j + \bar{s}_1)\Gamma(1/2 + \sigma_j - s_1)\Gamma(1/2 + \sigma_j - \bar{s}_1)}{\Gamma(m + 1/2 + \sigma_j)\Gamma(1 + \sigma_j - \sigma_{j+1})\Gamma(1 + \sigma_j - \sigma_{j+2})} \times \\ &\quad \times {}_4F_3 \left(\begin{matrix} \frac{1}{2} + \sigma_j + s_1, \frac{1}{2} + \sigma_j + \bar{s}_1, \frac{1}{2} + \sigma_j - s_1, \frac{1}{2} + \sigma_j - \bar{s}_1; \\ m + \frac{1}{2} + \sigma_j, 1 + \sigma_j - \sigma_{j+1}, 1 + \sigma_j - \sigma_{j+2} \end{matrix}; \frac{r}{r_0} \right), \\ m &= 0, 1, \quad j = 1, 2, 3, \quad \sigma_4 = \sigma_1, \quad \sigma_5 = \sigma_2, \end{aligned} \quad (49)$$

де ${}_4F_3 \left(\begin{matrix} a_1, a_2, a_3, a_4; \\ b_1, b_2, b_3 \end{matrix}; z \right)$ – узагальнений гіпергеометричний ряд [3].

7. Випадок однорідної площини. У випадку, коли $G_1 = G_2 = G$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, коефіцієнти у формулах (4) спрощуються:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -a_{12} = 2\alpha(\alpha + 1), \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = 4\alpha(\alpha - 1), \\ b_{11} &= (\alpha - 1)^2 - 4\alpha, \quad b_{12} = (\alpha + 1)^2, \quad b_{21} = b_{22} = 1 - \alpha^2, \quad \alpha = 3 - 4\nu, \\ c_1 &= -c_2 = b_{12}, \quad c_3 = -2b_{21}, \quad \alpha = \gamma = b_{12}^2, \quad \beta = -2b_{11}b_{12}, \end{aligned} \quad (50)$$

переміщення і напруження на берегах розрізу набувають вигляду

$$2Gu_{\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi} = -\frac{\alpha}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [(\alpha + 1)\bar{\sigma}(s) \sin 4\pi s - 2(\alpha - 1)\bar{\tau}(s) \sin^2 2\pi s] \frac{r^{-s}}{s\Delta(s)} ds,$$

на включенні містить тільки показник особливості $1/2$.
 показника для $r^{\pm} |^{9=-\pi}$ випадку $r_0 = 0$. Напруження $0 < r < \infty$,
 на включенні всі три показники особливостей, за винятком другого
 контактних напружень $\sigma_j |^{9=\pi}$, $0 < r < r_0$, і напружень $r^{\pm} |^{9=-\pi}$, $0 < r < \infty$,
 такту ($r_0 = 0$) ці показники є такими: $3/4, 1/2, 1/4$ [1]. У формулах для
 При цьому $2\sigma_1 = -1/2 + \gamma_0$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = \sigma_1 + 1/2$. У випадку гладкого кон-

$$(55) \quad \left. \begin{aligned} 3/4 - \gamma_0/2, \quad j = 1, \\ 1/2, \quad j = 2, \\ 1/4 - \gamma_0/2, \quad j = 3, \end{aligned} \right\} = 1/2 - \sigma_j$$

$$\gamma_0 = \frac{\pi}{1} \operatorname{arctg} \frac{x}{a(1-\mu_0)}$$

формулах (31) для напружень є такими:

В околі кінця включення показники особливостей $1/2 - \sigma_j$, $j = 1, 2, 3$, у
 із [10].

а відносний розмір $\frac{a}{r_0}$ області контакту є квадратом відповідної величини

$$(54) \quad S_2^z(r, r_0, a) = -\frac{1}{1} S_1^z(\sqrt{r}, \sqrt{r_0}, \sqrt{a}),$$

$$U_2^z(r, r_0, a) = \frac{1}{1} U_1^z(\sqrt{r}, \sqrt{r_0}, \sqrt{a}),$$

розв'язку розглядуваної задачі справджується залежності

$$(53) \quad S_2^z(r, r_0, a) = \sigma_3 + r^{\pm} |^{9=-\pi}, \quad 0 < r < \infty,$$

$$U_2^z(r, r_0, a) = \sigma_3 |^{9=\pi}, \quad U_2^z(r, r_0, a) = n^{\pm} |^{9=\pi}, \quad 0 < r < r_0,$$

енгтами

розв'язку задачі про міжфазну тріщину у випадку $G_2 = \infty$ із [10] і компо-

$$(52) \quad S_1^z(r, r_0, a) = \sigma_3 + r^{\pm} |^{9=0}, \quad 0 < r < \infty,$$

$$U_1^z(r, r_0, a) = \sigma_3 |^{9=\pi}, \quad U_1^z(r, r_0, a) = n^{\pm} |^{9=\pi}, \quad 0 < r < r_0,$$

енгтами

задачі з [10] на продовженні розрізу $\vartheta = 0$. Звідси випливає, що між компо-
 нижньому березі $\vartheta = -\pi$ з точністю до знака і заміни z на s такі ж, як у
 відповідно, і збільшити праву частину рівняння вліч. Напруження на
 дить у відповідне рівняння із [10], якщо заміни ξ, η, t_0 на $2\xi, 2\eta, 2t_0$,
 якщо z заміни на s . Це означає, що інтегральне рівняння (9) перехо-
 задачі про напівнескінченну міжфазну тріщину у випадку $G_2 = \infty$ [10],
 Переміщення на верхньому березі $\vartheta = \pi$ розрізу з (51) такі самі, як у

$$(51) \quad \Delta(s) = -4\alpha \cos \pi z s + i\theta (\cos \pi z s - i\theta), \quad \theta = \frac{2\pi}{1} \ln x.$$

$$r^{\pm} |^{9=-\pi} = \frac{x+1}{1} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} \frac{2\pi i}{x+1} [x - 1 - \overline{\sigma}(s) \sin 2\pi s + (x+1) \overline{\tau}(s) \cos 2\pi s] r^{-s-1} \Delta(s) ds,$$

$$\sigma_3 |^{9=-\pi} = \frac{x+1}{1} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} \frac{2\pi i}{x+1} [x + 1 + \overline{\sigma}(s) \cos 2\pi s - (x-1) \overline{\tau}(s) \sin 2\pi s] r^{-s-1} \Delta(s) ds,$$

$$2G_2 n^{\pm} |^{9=\pi} = -\frac{x}{x} \int_{c+i\infty}^{c-i\infty} \frac{2\pi i}{x} [2(x-1) \overline{\sigma}(s) \sin^2 2\pi s + (x+1) \overline{\tau}(s) \sin 4\pi s] r^{-s} \Delta(s) ds,$$

Комплексну комбінацію напружень із (28) на продовженні включення поблизу його кінця ($0 < r < r_0$) перетворюємо до вигляду

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{\vartheta} + i\tau_{r\vartheta})|_{\vartheta=0} &= \frac{1 + i\mu_0}{8\pi^2 \alpha r_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_k^{(1)} B\left(-\frac{k+1}{2}\right) \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t_0)}{n-k-1/2+i\theta} \right) \times \right. \\
 &\quad \times \left. \left(\frac{r}{r_0} \right)^{(k-1)/2} - a_k^{(2)} B\left(-\frac{1}{2} \left(k + \frac{1}{2} + \gamma_0 \right) \right) \right] \times \\
 &\quad \times \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n(t_0)}{n-k-\gamma_0+i\theta} \right) \left(\frac{r}{r_0} \right)^{(k-3/2+\gamma_0)/2} \Big],
 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 a_k^{(1)} &= \frac{|\Gamma(k+3/2+i\theta)|^2}{\Gamma(k+3/2-\gamma_0)k!}, & a_k^{(2)} &= \frac{|\Gamma(k+1+\gamma_0+i\theta)|^2}{\Gamma(k+1/2+\gamma_0)k!}, \\
 b_k(t_0) &= (P-iQ) \frac{\Gamma(k+1/2+i\theta)\Gamma(k+1-\gamma_0+i\theta)}{\Gamma(k+1+2i\theta)k!} e^{(k+1/2+i\theta)t_0/2}, \\
 & & & k = 0, 1, \dots,
 \end{aligned}$$

$$B(s) = [(\alpha - 1)^2 + 4\alpha \cos 2\pi s] \cos \pi s + i(\alpha^2 - 1) \sin \pi s. \quad (56)$$

Як нормальні, так і дотичні напруження на продовженні включення є необмеженими. Відповідні формули містять всі три вказані вище показники особливості, однак у випадку гладкого контакту ($\mu_0 = 0$) у напруженнях $\sigma_{\vartheta}|_{\vartheta=0}$ відсутній показник $1/2$. На відміну від цього, нормальні напруження на продовженні міжфазної тріщини є скінченними [10].

8. Результати обчислень. Для обчислень вибрано матеріали з $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $G_2/G_1 = 2$. При цьому $s_1 = 0.302 + 0.062i$, а показники особливостей напружень $1/2 - \sigma_j$, $j = 1, 2, 3$, для значень $\mu_0 = 0, 0.25, 0.5$, наведено в табл. 1.

Таблиця 1

$\mu_0 \backslash$	$1/2 - \sigma_1$	$1/2 - \sigma_2$	$1/2 - \sigma_3$
0	0.694	0.5	0.306
0.25	0.678	0.508	0.291
0.5	0.661	0.517	0.276

У табл. 2 для різних значень коефіцієнта тертя μ_0 і відношення сил Q/P наведено відносний розмір r_0/a області контакту і безрозмірні коефіцієнти інтенсивності напружень

$$\bar{K}_I^{(j)} = K_I^{(j)} a^{1/2+\sigma_j} / \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad \bar{K}_{II}^{(j)} = K_{II}^{(j)} a^{1/2+\sigma_j} / \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad j = 1, 2, 3.$$

Інтенсивність зсувних напружень, яка більшою мірою характеризується коефіцієнтом $\bar{K}_{II}^{(1)}$, перевищує інтенсивність розтягувальних напружень з коефіцієнтом $\bar{K}_I^{(1)}$ більше, ніж у 3 рази.

Таблиця 2

Q/P	0	1	2	5	10	20	50
	$\mu_0 = 0$						
r_0/a	$1.01 \cdot 10^{-10}$	$3.19 \cdot 10^{-5}$	$5.24 \cdot 10^{-3}$	0.245	0.668	0.900	0.983
$\bar{K}_I^{(1)}$	0.1035	0.0982	0.0962	0.0948	0.0945	0.0944	0.0944
$-\bar{K}_I^{(2)}$	0	0	0	0	0	0	0
$-\bar{K}_I^{(3)}$	32.83	0.3176	0.1211	0.0985	0.0966	0.0962	0.0961

$-\bar{K}_{II}^{(1)}$	0.4001	0.3796	0.3718	0.3665	0.3654	0.3651	0.3650
$\bar{K}_{II}^{(2)}$	5.574	0.4565	0.1709	0.0897	0.0786	0.0760	0.0750
$-\bar{K}_{II}^{(3)}$	126.9	1.228	0.4683	0.3809	0.3737	0.3721	0.3716
$\mu_0 = 0.25$							
r_0/a	$1.08 \cdot 10^{-10}$	$3.39 \cdot 10^{-5}$	$5.56 \cdot 10^{-3}$	0.256	0.685	0.910	0.986
$\bar{K}_I^{(1)}$	0.1675	0.1299	0.1171	0.1079	0.1050	0.1036	0.1029
$-\bar{K}_I^{(2)}$	0.9229	0.0841	0.0327	0.0173	0.0150	0.0144	0.0141
$-\bar{K}_I^{(3)}$	41.81	0.3408	0.1245	0.0962	0.0923	0.0909	0.0901
$-\bar{K}_{II}^{(1)}$	0.5882	0.4562	0.4114	0.3791	0.3688	0.3640	0.3613
$\bar{K}_{II}^{(2)}$	5.070	0.4618	0.1794	0.0949	0.0823	0.0788	0.0776
$-\bar{K}_{II}^{(3)}$	177.1	1.443	0.5273	0.4075	0.3910	0.3848	0.3816
$\mu_0 = 0.5$							
r_0/a	$1.15 \cdot 10^{-10}$	$3.61 \cdot 10^{-5}$	$5.91 \cdot 10^{-3}$	0.268	0.702	0.920	0.988
$\bar{K}_I^{(1)}$	0.2812	0.1765	0.1460	0.1254	0.1191	0.1161	0.1143
$-\bar{K}_I^{(2)}$	1.7076	0.1740	0.0704	0.0376	0.0324	0.0308	0.0302
$-\bar{K}_I^{(3)}$	58.76	0.3942	0.1316	0.0950	0.0890	0.0866	0.0852
$-\bar{K}_{II}^{(1)}$	0.8914	0.5595	0.4629	0.3977	0.3775	0.3680	0.3625
$\bar{K}_{II}^{(2)}$	4.946	0.5040	0.2038	0.1090	0.0938	0.0892	0.0873
$-\bar{K}_{II}^{(3)}$	271.4	1.821	0.6081	0.4388	0.4112	0.3999	0.3937

На рис. 2 і рис. 3 показано розподіли безрозмірних контактних напружень

$$\bar{\sigma} = a(P^2 + Q^2)^{-1/2} \sigma_{\vartheta}^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi}, \quad 0 < r < r_0,$$

і нормальних

$$\hat{\sigma} = a(P^2 + Q^2)^{-1/2} \sigma_{\vartheta}^{(2)} \Big|_{\vartheta=0, -\pi}$$

та дотичних

$$\hat{\tau} = \frac{a}{5} (P^2 + Q^2)^{-1/2} \tau_{r\vartheta}^{(2)} \Big|_{\vartheta=0, -\pi}$$

напружень на межі півплощин. При цьому декартова координата x межі відраховується від кінця включення та пов'язана з полярними координатами так, що $x = r$, коли $x > 0$, $\vartheta = 0$, і $x = -r$, коли $x < 0$, $\vartheta = \pm \pi$. Суцільні лінії відповідають фрикційному контакту з коефіцієнтом тертя $\mu_0 = 0.5$, штрихові – гладкому контакту, $\mu_0 = 0$. Криві 1–3 відповідають відношенню сил $Q/P = 5, 10, 20$. На рис. 3 розподіли величини $\hat{\sigma}$ практично не залежать від μ_0 , тобто штрихові лінії зливаються із суцільними. Розподіли величини $\hat{\tau}$ у випадку гладкого контакту (штрихові лінії) для $Q/P = 5, 10$ такі самі, як для $Q/P = 20$, а у випадку фрикційного контакту для $Q/P = 5, 10$ вони не показані, оскільки розміщені між штриховою та суцільною кривими.

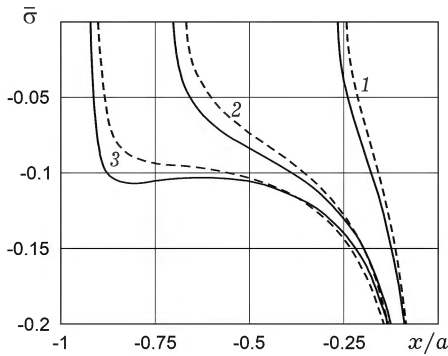


Рис. 2

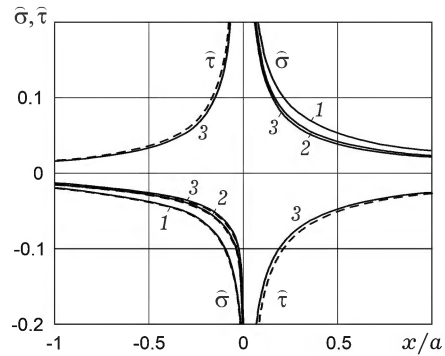


Рис. 3

На рис. 4 зображено безрозмірні радіальні переміщення $\bar{u} = (P^2 + Q^2)^{-1/2} G_1 u_r^{(1)} \Big|_{\vartheta=\pi}$ в області контакту $0 < r < r_0$. Позначення кривих такі, як на рис. 2, рис. 3. Для значень $Q/P = 5, 10$ при $\mu_0 = 0$ графіки величини \bar{u} накладаються на штрихову лінію 3 у межах області контакту (ліва межа відмічена вертикальною рискою). Те, що для фрикційного контакту величина \bar{u} виявляється додатною, є перевіркою припущення (2) про напрямки проковзування граничних точок верхньої півплощини в області контакту із включенням.

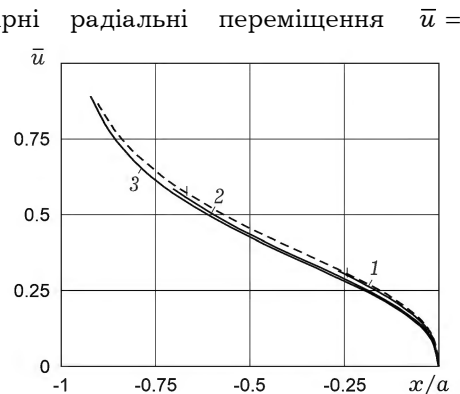


Рис. 4

1. Антипов Ю. А. Отслоившееся включение в случае сцепления и проскальзывания // Прикл. математика и механика. – 1996. – **60**, № 4. – С. 669–680.
2. Антипов Ю. А. Трещина на линии раздела упругих сред при наличии сухого трения // Прикл. математика и механика. – 1995. – **59**, № 2. – С. 290–306.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – Т. 1. – Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. – Москва: Наука, 1965. – 294 с.
 The same: Bateman H. Higher transcendental functions. – Vol. 1. – New York etc.: McGraw-Hill, 1953. – xxvi+302 p.
4. Васильева Ю. О., Сильвестров В. В. Задача о межфазной трещине с жесткой накладкой на части ее берега // Прикл. математика и механика. – 2011. – **75**, № 6. – С. 1017–1037.
5. Кривий О. Ф. Міжфазне відшароване включення в кусково-однорідному трансверсально-ізотропному просторі // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2014. – **50**, № 2. – С. 77–84.
 The same: Кривий О. Ф. Delaminated interface inclusion in a piecewise homogeneous transversely isotropic space // Mater. Sci. – 2014. – **50**, No. 2. – P. 245–253. – <https://doi.org/10.1007/s11003-014-9714-7>.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 707 с.
 The same: Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1977. – xxxi+732 p.
7. Нобл Б. Применение метода Винера – Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
 The same: Noble B. Methods based on the Wiener–Hopf technique for the solution of partial differential equations. – London: Pergamon Press, 1958. – x+246 p.
8. Острик В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера – Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.

9. *Острик В. І.* Асимптотичні розподіли напружень і переміщень в околі краю області контакту // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 4. – С. 58–71.
 The same: *Ostryk V. I.* Asymptotic distributions of stresses and displacements near the edge of a contact zone // *J. Math. Sci.* – 2019. – **238**, No. 1. – P. 63–82.
 – <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04218-9>.
10. *Острик В. І.* Контакт берегів міжфазної напівнескінченної тріщини // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 1. – С. 106–121.
 The same: *Ostryk V. I.* Contact of the faces of an interface semiinfinite crack // *J. Math. Sci.* – 2023. – **270**, No. 1. – P. 123–142.
 – <https://doi.org/10.1007/s10958-023-06336-x>.
11. *Острик В. І., Улітко А. Ф.* Контактна задача для міжфазної напівнескінченної тріщини // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2001. – **44**, № 3. – С. 88–95.
12. *Острик В. І., Щокотова О. М.* Ковзний контакт штампа з пружним клином // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2011. – **47**, № 4. – С. 82–91.
 The same: *Ostryk V. I., Shchokotova O. M.* Sliding contact of a punch with elastic wedge // *Mater. Sci.* – 2012. – **47**, No. 4. – P. 514–526.
 – <https://doi.org/10.1007/s11003-012-9423-z>.
13. *Попов Г. Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
14. *Улітко А. Ф.* Полубесконечный разрез вдоль границы жестко соединенных полуплоскостей из различных материалов // *Соврем. проблемы механики сплошной среды.* – Ростов-на-Дону: Книга, 1995. – С. 185–193.
15. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами // *Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение.* – 1962. – № 1. – С. 131–137.
16. *Comninou M.* Interface crack with friction in the contact zone // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* – 1977. – **44**, No. 4. – P. 780–781. – <https://doi.org/10.1115/1.3424179>.

CONTACT PROBLEM FOR INTERFACIAL EXFOLIATED SEMI-INFINITE INCLUSION

The equilibrium of two rigidly connected elastic half-planes made of different materials, at the interface of which a semi-infinite thin rigid inclusion is placed, is considered. One side of the inclusion is connected to one of the half-planes, and the other is exfoliated with the formation of a crack. Normal and tangential concentrated forces are applied to one of the edges of the crack. The frictional contact of the crack faces near its tip is taken into account. Using the Wiener – Hopf method, the solution of the integral equation of the problem is obtained in a closed form. The size of the contact zone of the crack faces, stress distributions in the contact zone, as well as at the interface of the half-planes outside the crack and at the junction of the inclusion with the half-plane are found.

Key words: *interfacial exfoliated inclusion, crack, Comninou's model, Mellin integral, stress intensity factor.*