УДК 539.3: 620.198

В. А. Шевчук ✉

ДОСЛІДЖЕННЯ ТЕРМОНАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПІВПРОСТОРУ З БАГАТОШАРОВИМ ПОКРИТТЯМ ЗА ЦИКЛІЧНОГО КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМІНУ ІЗ ЗОВНІШНІМ СЕРЕДОВИЩЕМ

З використанням отриманого замкненого аналітичного розв'язку задачі термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям при циклічній кусково-однорідній зміні температури зовнішнього середовища досліджено вплив умов термоциклічного навантаження на термонапружений стан такої системи.

Ключові слова: *теплопровідність, термопружність, півпростір, багатошарове покриття, узагальнені граничні умови, термоциклювання.*

Вступ. Термоциклічна обробка (ТЦО) є одним із сучасних та широко використовуваних термічних методів зміцнення, в якому застосовується багаторазова циклічна зміна температури зовнішнього середовища за відсутності витримки при максимальних температурах нагрівання [7]. Формування властивостей і структури однорідних матеріалів, сплавів, багатошарових структур, деталей обладнання з одно- чи багатошаровими покриттями при ТЦО визначається вибраними режимами. Дослідження впливу окремих параметрів ТЦО дає необхідну інформацію для подальшої оптимізації процесу в цілому. Термічні напруження, що виникають в цих елементах конструкцій, залежать від таких параметрів як швидкість нагрівання і охолодження, максимальна і мінімальна температура в періодах циклів, кількість та тривалість циклів, інтенсивність конвективного теплообміну з робочим середовищем [9].

Аналітичному розв'язанню задач про термонапружений стан однорідних тіл та багатошарових структур за термоциклічного навантаження присвячено роботи [1, 2, 8, 16, 18–20, 22, 25–28, 30, 31]. Результати числового дослідження термонапруженого стану таких об'єктів при термоциклюванні наведено в роботах [4–6, 17, 21, 23, 24, 29, 34–36]. Слід зауважити, що не всі підходи, які використано у вищезгаданих працях, є цілком придатними для дослідження термонапруженого стану тіл з тонкими багатошаровими покриттями.

Однією з ефективних методик, що дозволяє суттєво спростити отримання розв'язку нестаціонарних задач термопружності для тіл з такими багатошаровими покриттями відомими аналітичними методами, є застосування підходу з використанням узагальнених граничних умов [12, 13, 32, 33].

Так, за сталої в часі температури зовнішнього середовища в [11] розв'язано задачу термопружності для півпростору з багатошаровим покриттям за конвективного, а в [15] – за променево-конвективного теплообміну з робочим середовищем.

За циклічного конвективного теплообміну, коли температура зовнішнього середовища є кусково-однорідною функцією часу, в [14] отримано аналітичний розв'язок нестаціонарної задачі теплопровідності для півпростору з багатошаровим покриттям. На його основі у пропонованій роботі розв'язано відповідну задачу термопружності і проведено розрахунок та аналіз впливу зміни параметрів конвективного термоциклічного навантаження на температурні напруження, що виникають у системі півпростір – багатошарове покриття.

1. Формулювання та розв'язок задачі теплопровідності. Теоретична оцінка рівня термонапруженого стану півпростору з багатошаровим покрит-

✉ shevchuk@iapmm.lviv.ua

тям на першому етапі передбачає визначення розподілу температури в такій системі.

З цією метою розглянемо процес конвективного багатоциклового теплообміну півпростору із зовнішнім середовищем через n-шарове тонке покриття товщини $\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i$, де δ_i – товщина i-го шару покриття. Декартові координати (x, y, z) вибрано таким чином, що площина $z = 0$ розміщена на контактній поверхні покриття з основою, а додатний відлік осі z скеровано вглиб системи. Процес термоциклювання розділено на K циклів, кожен з яких складається з двох періодів (нагрівання та охолодження) [3]. Тривалість k-го циклу становить $\tau_k - \tau_{k-1}$, а $\tau_{k-1\leftrightarrow k}$ $(\tau_{k-1} < \tau_{k-1\leftrightarrow k} < \tau_k)$ – момент миттєвого перемикання періодів у межах одного циклу [3]. У момент часу $\tau_0 = 0$ початковий розподіл температури вздовж координати z вважаємо відомим і постійним.

Одновимірна нестаціонарна крайова задача теплопровідності формулюється таким чином:

– рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial t_j(z,\tau)}{\partial \tau} = a_j \frac{\partial^2 t_j(z,\tau)}{\partial z^2}, \qquad j \in \{\mathbf{I}\} \cup \{1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

– початкова умова

$$t_j(z,0) = t_0 = \text{const}, \tag{2}$$

– гранична умова конвективного теплообміну між покриттям і середовищем

$$\lambda_n \frac{\partial t_n(z,\tau)}{\partial z} = \mu\big(t_n(z,\tau) - t_{\mathbf{II}}(\tau)\big) \qquad \text{при} \qquad z = z_n = -\delta, \tag{3}$$

– умови ідеального теплового контакту на поверхнях поділу шарів покриття та покриття з основою

$$t_i(z,\tau) = t_{i-1}(z,\tau), \qquad \lambda_i \frac{\partial t_i(z,\tau)}{\partial z} = \lambda_{i-1} \frac{\partial t_{i-1}(z,\tau)}{\partial z}$$

$$\text{при} \qquad z = z_{i-1} = -\sum_{m=1}^{i-1} \delta_m, \qquad i \in \{2, \ldots, n\},$$

$$t_1(z,\tau) = t_{\mathbf{I}}(z,\tau), \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1(z,\tau)}{\partial z} = \lambda_{\mathbf{I}} \frac{\partial t_{\mathbf{I}}(z,\tau)}{\partial z} \quad \text{при} \quad z = z_0 = 0, \tag{4}$$

– умова на безмежності

$$t_{\mathbf{I}}(z,\tau) \to t_0 \qquad \text{при} \qquad z \to \infty. \tag{5}$$

У формулах (1)–(5) уведено такі позначення: t, $a = \lambda / \omega$, λ, ω, τ – температура, температуропровідність, теплопровідність, теплоємність, час; μ – коефіцієнт теплообміну між поверхнею покриття і зовнішнім середовищем. Індексами i, $\mathbf{I}$ та $\mathbf{II}$ позначено величини, що стосуються відповідно i-го шару покриття, півпростору та зовнішнього середовища.

У граничній умові (3) температура середовища $t_{\mathbf{II}}(\tau)$ задається кусково-однорідною функцією часу:

$$t_{\mathbf{II}}(\tau) = \sum_{k=1}^{K} \left[t_{\mathbf{II}}^{(k,1)} S(\tau - \tau_{k-1}) + \big(t_{\mathbf{II}}^{(k,2)} - t_{\mathbf{II}}^{(k,1)}\big) S(\tau - \tau_{k-1\leftrightarrow k}) \right] \times$$

$$\times \left[S(\tau - \tau_{k-1}) - S(\tau - \tau_k) \right], \tag{6}$$

де $t_{\mathbf{II}}^{(k,1)}$, $t_{\mathbf{II}}^{(k,2)}$ – температури зовнішнього середовища в першому і другому періодах k-го циклу, $S(\zeta) = \begin{cases} 1, & \zeta \ge 0, \\ 0, & \zeta < 0, \end{cases}$ – одинична функція Гевісайда.

Для розв'язування задачі теплопровідності (1)–(5) використано підхід, який ґрунтується на моделюванні впливу покриття на теплоперенесення у системі узагальненою граничною умовою [13, 32, 33], яка у розглядуваному випадку має вигляд [14]

$$\lambda_{\mathbf{I}}\left(1 + \frac{\mu}{H}\right)\frac{\partial t_{\mathbf{I}}(z,\tau)}{\partial z} + \mu\big(t_{\mathbf{II}}(\tau) - t_{\mathbf{I}}(z,\tau)\big) = \Omega\,\frac{\partial t_{\mathbf{I}}(z,\tau)}{\partial \tau}, \qquad t_{\mathbf{I}}(z,0) = t_0,$$

$$\text{при} \qquad z = 0, \tag{7}$$

де $\Omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \delta_i$, $\dfrac{1}{H} = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\delta_i}{\lambda_i}$ – зведені теплоємність і термоопір покриття. Температура в шарах покриття визначається за формулами відновлення [10, 13, 32, 33].

Аналітичний розв'язок задачі теплопровідності для півпростору з багатошаровим покриттям має вигляд [14]:

1°. Для $\Omega \ne 0$ при $1 + \xi\mathrm{Bi} - 2\sqrt{\eta\mathrm{Bi}} \ne 0$

$$\theta_{\mathbf{I}}(\bar z,\mathrm{Fo}) = 1 - Z_0^{(1)}(\bar z,\mathrm{Fo}) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{\ell=1}^{2} \theta_{\mathbf{II}}^{(k,\ell)}(-1)^{\ell+1}\big(Z_{k+\ell-2}^{(1)}(\bar z,\mathrm{Fo}) -$$

$$- Z_{k-1\leftrightarrow k}^{(1)}(\bar z,\mathrm{Fo})\big), \qquad 0 \le \bar z < \infty, \tag{8}$$

$$\theta_i(\bar z,\mathrm{Fo}) = 1 - \chi_0^{(1,i)}(\bar z,\mathrm{Fo}) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{\ell=1}^{2} \theta_{\mathbf{II}}^{(k,\ell)}(-1)^{\ell+1}\big(\chi_{k+\ell-2}^{(1,i)}(\bar z,\mathrm{Fo}) -$$

$$- \chi_{k-1\leftrightarrow k}^{(1,i)}(\bar z,\mathrm{Fo})\big), \qquad \bar z_i \le \bar z \le \bar z_{i-1},\ i \in \{1,\dots,n\}, \tag{9}$$

де

$$Z_p^{(1)}(\bar z,\mathrm{Fo}) = \Big\{\mathrm{erfc}\,(\varphi_p) - \frac{1}{2\Delta}\big[(1+\Delta)F_1(\bar z,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p) -$$

$$- (1-\Delta)F_2(\bar z,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\big]\Big\} S(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p),$$

$$\chi_p^{(1,i)}(\bar z,\mathrm{Fo}) = Z_p^{(1)}(0,\mathrm{Fo}) + \frac{r_i(\bar z)}{2\Delta}\big[(1-\Delta)q_2F_2(0,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p) -$$

$$- (1+\Delta)q_1F_1(0,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\big]S(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p),$$

$$p \in \{0, 0\leftrightarrow 1, 1, 1\leftrightarrow 2, 2, \dots, K-1, K-1\leftrightarrow K, K\}.$$

2°. Для $\Omega \ne 0$ при $1 + \xi\mathrm{Bi} - 2\sqrt{\eta\mathrm{Bi}} = 0$

$$\theta_{\mathbf{I}}(\bar z,\mathrm{Fo}) = 1 - Z_0^{(2)}(\bar z,\mathrm{Fo}) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{\ell=1}^{2} \theta_{\mathbf{II}}^{(k,\ell)}(-1)^{\ell+1}\big(Z_{k+\ell-2}^{(2)}(\bar z,\mathrm{Fo}) -$$

$$- Z_{k-1\leftrightarrow k}^{(2)}(\bar z,\mathrm{Fo})\big), \qquad 0 \le \bar z < \infty, \tag{10}$$

$$\theta_i(\bar z,\mathrm{Fo}) = 1 - \chi_0^{(2,i)}(\bar z,\mathrm{Fo}) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{\ell=1}^{2} \theta_{\mathbf{II}}^{(k,\ell)}(-1)^{\ell+1}\big(\chi_{k+\ell-2}^{(2,i)}(0,\mathrm{Fo}) -$$

$$- \chi_{k-1\leftrightarrow k}^{(2,i)}(0,\mathrm{Fo})\big), \qquad \bar z_i \le \bar z \le \bar z_{i-1},\quad i \in \{1,\dots,n\}, \tag{11}$$

де

$$Z_p^{(2)}(\bar z,\mathrm{Fo}) = \left[\operatorname{erfc}(\varphi_p) - 2\text{æ}\sqrt{\frac{\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p}{\pi}}\exp(-\varphi_p^2) + \right.$$

$$\left. + (\text{æ}\bar z + 2\text{æ}^2(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p) - 1)F_3(\bar z, \mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\right] S(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\,,$$

$$\chi_p^{(2,i)}(\bar z,\mathrm{Fo}) = Z_p^{(2)}(0,\mathrm{Fo}) + 2\text{æ}^2 r_i(\bar z)\left[\text{æ}(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)F_3(0,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p}{\pi}}\right] S(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\,.$$

3°. Для $\Omega = 0$

$$\theta_{\mathbf{I}}(\bar z,\mathrm{Fo}) = 1 - Z_0^{(3)}(\bar z,\mathrm{Fo}) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{\ell=1}^{2}\theta_{\mathbf{II}}^{(k,\ell)}(-1)^{\ell+1}\left(Z_{k+\ell-2}^{(3)}(\bar z,\mathrm{Fo}) - \right.$$

$$\left. - Z_{k-1\leftrightarrow k}^{(3)}(\bar z,\mathrm{Fo})\right), \qquad 0 \le \bar z < \infty\,, \tag{12}$$

$$\theta_i(\bar z,\mathrm{Fo}) = 1 - \chi_0^{(3,i)}(\bar z,\mathrm{Fo}) + \sum_{k=1}^{K}\sum_{\ell=1}^{2}\theta_{\mathbf{II}}^{(k,\ell)}(-1)^{\ell+1}\left(\chi_{k+\ell-2}^{(3,i)}(0,\mathrm{Fo}) - \right.$$

$$\left. - \chi_{k-1\leftrightarrow k}^{(3,i)}(0,\mathrm{Fo})\right), \quad \bar z_i \le \bar z \le \bar z_{i-1},\ i \in \{1,\dots,n\} \tag{13}$$

де

$$Z_p^{(3)}(\bar z,\mathrm{Fo}) = \left[\operatorname{erfc}(\varphi_p) - F_4(\bar z,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\right] S(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\,,$$

$$\chi_p^{(3,i)}(\bar z,\mathrm{Fo}) = \left[1 - (1 + \mathrm{Bi}^* r_i(\bar z))F_4(0,\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\right] S(\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p)\,.$$

У формулах (8)–(13) позначено

$$F_m(\bar z,\mathrm{Fo}) = \exp(q_m\bar z + q_m^2\mathrm{Fo})\operatorname{erfc}(\varphi + q_m\sqrt{\mathrm{Fo}}), \quad m \in \{1,2,3,4\}\,,$$

$$\theta_{\mathbf{I}} = \frac{t_{\mathbf{I}}}{t_0},\ \theta_{\mathbf{II}}^{(k,1)} = \frac{t_{\mathbf{II}}^{(k,1)}}{t_0},\ \theta_{\mathbf{II}}^{(k,2)} = \frac{t_{\mathbf{II}}^{(k,2)}}{t_0},\ \theta_i = \frac{t_i}{t_0},\ i \in \{1,\dots,n\},\ \bar z = \frac{z}{z_*},\ \mathrm{Fo} = \frac{a_{\mathbf{I}}\tau}{z_*^2}\,,$$

$$\mathrm{Fo}_p = \frac{a_{\mathbf{I}}\tau_p}{z_*^2},\ \varphi = \frac{\bar z}{2\sqrt{\mathrm{Fo}}},\ \varphi_p = \frac{\bar z}{2\sqrt{\mathrm{Fo}-\mathrm{Fo}_p}},\ r_i(\bar z) = \lambda_{\mathbf{I}}\left(-\sum_{m=1}^{i-1}\frac{\delta_m}{z_*\lambda_m} + \frac{\bar z - \bar z_{i-1}}{\lambda_i}\right),$$

$$i \in \{1,\dots,n\},\ \bar z_j = \frac{z_j}{z_*},\ j \in \{0,1,\dots,n\}\,,$$

$$q_1 = (1-\Delta)\text{æ},\ q_2 = (1+\Delta)\text{æ},\ q_3 = \text{æ},\ q_4 = \mathrm{Bi}^* = \frac{\mathrm{Bi}}{1+\xi\mathrm{Bi}},\ \Delta = \sqrt{\left|1 - \frac{4\eta\mathrm{Bi}}{(1+\xi\mathrm{Bi})^2}\right|}\,,$$

$\text{æ} = \dfrac{1+\xi\mathrm{Bi}}{2\eta}$, $\mathrm{Bi} = \dfrac{\mu z_*}{\lambda_{\mathbf{I}}}$ – критерій Біо, $\xi = \dfrac{H^{-1}}{z_*/\lambda_{\mathbf{I}}}$ – відносний ефективний термоопір покриття, $\eta = \dfrac{\Omega}{\omega_{\mathbf{I}} z_*}$ – відносна ефективна теплоємність покриття, z_* – масштабний параметр.

2. Розв'язок задачі термопружності. Дослідимо термонапружений стан системи, викликаний конвективним термоциклічним впливом зовнішнього середовища.

За відсутності зовнішнього навантаження на поверхні покриття нерівномірний розподіл температури в системі зумовлює в ній виникнення температурних напружень, які визначаються за формулами [11, 15]

$$\sigma_{xx}^{\mathbf{I}} = \sigma_{yy}^{\mathbf{I}} = \sigma^{\mathbf{I}}(z,\tau) = -\frac{E_{\mathbf{I}}}{1-\nu_{\mathbf{I}}}\beta_{\mathbf{I}}\left[t_{\mathbf{I}}(z,\tau) - t_0\right], \qquad 0 \le z < \infty ,$$

$$\sigma_{xx}^{i} = \sigma_{yy}^{i} = \sigma^{i}(z,\tau) = -\frac{E_i}{1-\nu_i}\beta_i\left[t_i(z,\tau) - t_0\right],$$

$$z_i \le z \le z_{i-1}, \quad i \in \{1,\ldots,n\}, \qquad (14)$$

де E_j – модулі Юнґа; β_j – коефіцієнти лінійного температурного розширення; ν_j – коефіцієнти Пуассона.

Увівши безрозмірну температуру та безрозмірні напруження

$$\bar{\theta}_j(\bar{z},\mathrm{Fo}) = \frac{t_j(z,\tau) - t_0}{t_{\mathbf{II}}^{(1,1)} - t_0}, \qquad \tilde{\sigma}^j(\bar{z},\mathrm{Fo}) = \sigma^j(z,\tau) \Bigg/ \frac{E_{\mathbf{I}}\beta_{\mathbf{I}}(t_{\mathbf{II}}^{(1,1)} - t_0)}{1-\nu_{\mathbf{I}}},$$

$$j \in \{\mathbf{I}\} \cup \{1,\ldots,n\}, \qquad (15)$$

остаточно отримаємо співвідношення для знаходження теплових напружень у системі

$$\tilde{\sigma}^j(\bar{z},\mathrm{Fo}) = -\left(\frac{E_j\beta_j}{1-\nu_j} \Bigg/ \frac{E_{\mathbf{I}}\beta_{\mathbf{I}}}{1-\nu_{\mathbf{I}}}\right)\bar{\theta}_j(\bar{z},\mathrm{Fo}). \qquad (16)$$

3. Числові результати та їх аналіз. Дослідження термонапруженого стану системи півпростір – багатошарове покриття за термоциклічного навантаження проводили за таких значень вхідних параметрів: температура нагрівання $t_{\mathbf{II}}^{(k,1)} = 1073$ К, температура охолодження $t_{\mathbf{II}}^{(k,2)} = 293$ К, $k \in \{1,2,\ldots,K\}$; початкова температура системи $t_0 = 293$ К; для рис. 1, 2, 5 – при $\xi = 0.2$, $\eta = 0.2$; для рис. 2 – рис. 4 значення моменту перемикання періодів $\mathrm{Fo}_{0\leftrightarrow 1} = 1.5$; для рис. 1 – $\mathrm{Bi} = 4$, для рис. 3, рис. 5 – $\mathrm{Bi} = 1$.

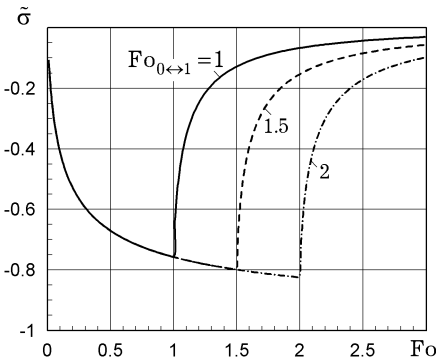


Рис. 1. Вплив зміни моменту перемикання на безрозмірні напруження $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{\mathbf{I}}(0,\mathrm{Fo})$

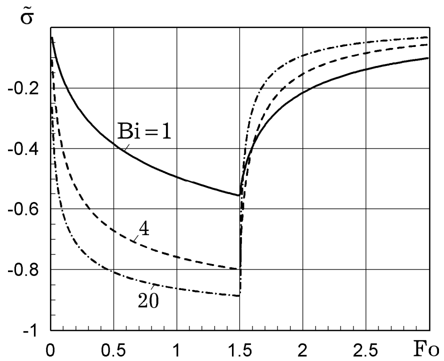


Рис. 2. Вплив інтенсивності конвективного теплообміну на безрозмірні напруження $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{\mathbf{I}}(0,\mathrm{Fo})$.

На рис. 1 показано зміну з часом безрозмірних стискальних напружень $\tilde{\sigma}^{\mathbf{I}}(0,\mathrm{Fo})$ у півпросторі на поверхні контакту з покриттям для значень моментів перемикання періодів $\mathrm{Fo}_{0\leftrightarrow 1} = 1, 1.5, 2$ у межах одного циклу тривалістю $\mathrm{Fo}_1 = 3$. Бачимо, що протягом першого періоду при збільшенні $\mathrm{Fo}_{0\leftrightarrow 1}$ напруження за абсолютною величиною збільшуються. Зростання моменту перемикання спричиняє певну різницю в значеннях напружень у момент завершення циклу. Зміною моментів перемикання можна досягнути їх необхідного рівня.

Рис. 2 ілюструє поведінку з часом напружень $\tilde{\sigma}^{\mathbf{I}}(0,\mathrm{Fo})$ в основі на поверхні її контакту з покриттям для різних значень критерію Bi. Протягом періоду нагрівання збільшення величини Bi викликає зростання напружень за абсолютною величиною на поверхні півпростору, а протягом періоду охолодження − їх зменшення. Потрібний рівень таких напружень може бути теоретично прогнозований шляхом підбору рівня інтенсивності термообробки.

На рис. 3 наведено зміну з часом безрозмірних напружень $\tilde{\sigma}^{\mathbf{I}}(0,\mathrm{Fo})$ на поверхні півпростору за відсутності покриття ($\xi = 0$, $\eta = 0$) та у півпросторі на поверхні поділу з покриттям залежно від ефективних характеристик останнього. У періоді нагрівання такі напруження досягають найбільшого значення за абсолютною величиною на поверхні основи без покриття. Наявність покриття спричиняє зменшення напружень у півпросторі на поверхні контакту з покриттям. У момент завершення циклу $\mathrm{Fo}_1 = 3$ безрозмірні стискальні напруження $\tilde{\sigma}^{\mathbf{I}}(0,\mathrm{Fo})$ стають майже однаковими.

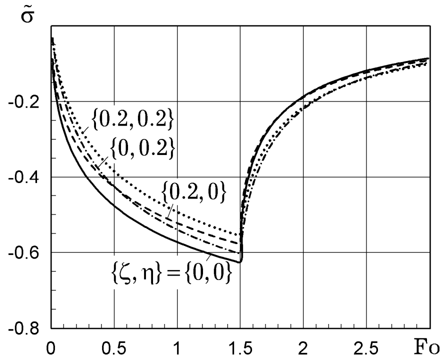
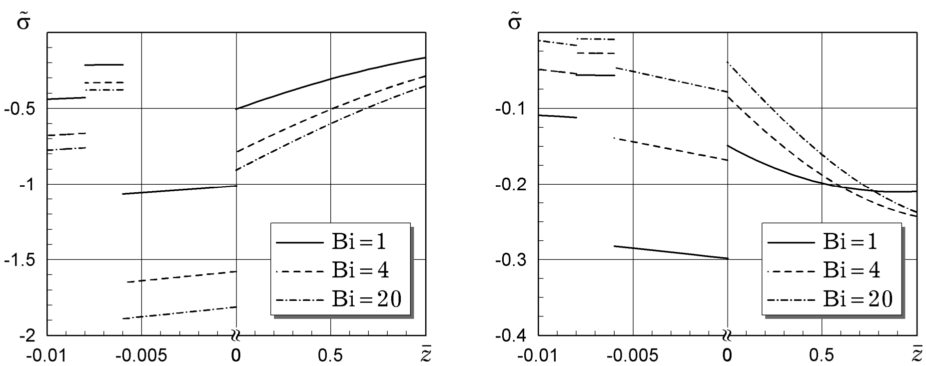


Рис. 3. Залежність напружень $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{\mathbf{I}}(0,\mathrm{Fo})$ від часу Fo для різних значень ефективних характеристик покриття ξ та η.



а) $\mathrm{Fo} = 0.75$ ***б***) $\mathrm{Fo} = 2.25$

Рис. 4. Розподіл напружень $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{j}(\overline{z},\mathrm{Fo})$ у системі основа – тришарове покриття для фіксованих моментів часу Fo.

На рис. 4 показано розподіл напружень за просторовою координатою $\overline{z}$ в системі півпростір − тришарове покриття для моментів часу $\mathrm{Fo} = 0.75$ протягом періоду нагрівання та $\mathrm{Fo} = 2.25$ − протягом періоду охолодження для різних значень Bi за таких співвідношень геометричних та термомеханічних параметрів шарів покриття:

$$\delta_1 : \delta_2 : \delta_3 = 3 : 1 : 1 , \quad \lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 = 3 : 10 : 2 ,$$

$$\omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = 3 : 6 : 1, \qquad \frac{E_1\beta_1}{1-\nu_1} : \frac{E_2\beta_2}{1-\nu_2} : \frac{E_3\beta_3}{1-\nu_3} = 5 : 1 : 2,$$

при $\lambda_{\mathbf{I}} / \lambda_1 = 10$, $\omega_{\mathbf{I}} / \omega_1 = 1$, $\dfrac{E_{\mathbf{I}}\beta_{\mathbf{I}}}{1-\nu_{\mathbf{I}}} : \dfrac{E_1\beta_1}{1-\nu_1} = 0.5$, $\dfrac{\delta}{z_*} = 0.01$. В обох періодах циклу напруження у покритті мають розривний характер, зростають за абсолютним значенням протягом періоду нагрівання і спадають протягом періоду охолодження при збільшенні Bi. Величину стрибка на поверхнях контакту шарів покриття визначає співвідношення $\dfrac{E_i\beta_i}{1-\nu_i} : \dfrac{E_{i-1}\beta_{i-1}}{1-\nu_{i-1}}$, $i \in \{2, \ldots, n\}$, а на поверхні поділу покриття і півпростору – $\dfrac{E_1\beta_1}{1-\nu_1} : \dfrac{E_{\mathbf{I}}\beta_{\mathbf{I}}}{1-\nu_{\mathbf{I}}}$.

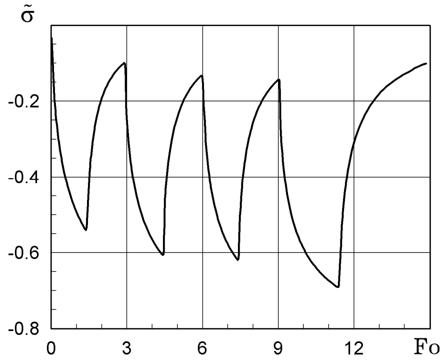


Рис. 5. Циклічна поведінка напружень $\tilde{\sigma} = \tilde{\sigma}^{\mathbf{I}}(0, \mathrm{Fo})$ у півпросторі на поверхні поділу з покриттям.

Рис. 5 ілюструє циклічну зміну з часом напружень в основі на поверхні поділу з покриттям за чотирициклової ($K = 4$) двоперіодичної термообробки системи для таких тривалостей циклів та моментів перемикання періодів: $\mathrm{Fo}_0 = 0$, $\mathrm{Fo}_{0\leftrightarrow 1} = 1.4$, $\mathrm{Fo}_1 = 3$; $\mathrm{Fo}_{1\leftrightarrow 2} = 4.4$, $\mathrm{Fo}_2 = 6$, $\mathrm{Fo}_{2\leftrightarrow 3} = 7.4$, $\mathrm{Fo}_3 = 9$, $\mathrm{Fo}_{3\leftrightarrow 4} = 11.4$, $\mathrm{Fo}_4 = 15$. Отже, зміною кількості циклів та їх тривалості, моментів перемикання періодів у кожному з циклів, а також інтенсивності конвективного теплообміну можна досягнути необхідного рівня напружень на поверхні контакту півпростору з покриттям.

Висновки. У статті з використанням аналітичного розв'язку задачі теплопровідності отримано співвідношення для дослідження і розрахунку термонапруженого стану системи півпростір – багатошарове покриття при кусково-сталій зміні температури середовища. Проаналізовано вплив параметрів термоциклічного навантаження (зміни тривалості циклу, моментів перемикання періодів у межах одного циклу, інтенсивності конвективного теплообміну із зовнішнім середовищем), співвідношення теплофізичних і фізико-механічних характеристик покриття та основи на поведінку стискальних напружень на поверхні поділу півпростору з покриттям. Досліджено розподіл таких напружень у півпросторі з тришаровим покриттям у деяких моментах часу. Також проілюстровано характер циклічної зміни з часом напружень на поверхні контакту півпростору з покриттям. Отже, зміна умов термоциклювання дозволяє досягати необхідного рівня термонапружень у системі, що є основою теоретичного підбору раціональних режимів термоциклічної обробки виробів з багатошаровими покриттями.

1. *Будиновский С. А., Каблов Е. Н., Мубояджян С. А.* Применение аналитической модели определения упругих напряжений в многослойной системе при решении задач по созданию высокотемпературных жаростойких покрытий для рабочих лопаток авиационных турбин // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Машино-

строение». – 2011. – Спец. выпуск «Перспективные конструкционные материалы и технологии». – С. 26–37.

2. *Карышев А. К., Супельняк М. И.* Термоциклические напряжения в цилиндре, вызванные нестационарными периодическими условиями теплообмена с внешней средой // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. «Машиностроение». – 2012. – № 2 (87). – С. 47–58.
3. *Кирсанов Ю. А.* Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухонагревателях. – Москва: Физматлит, 2007. – 240 с.
4. *Кобельский С. В., Куриат Р. И., Кравченко В. И., Квитка А. Л.* Методика и исследование пространственного термонапряженного состояния моделей лопаток турбин с покрытиями при термоциклическом нагружении // Проблемы прочности. – 1999. – № 6. – С. 56–64.

   Те саме: *Kobel'skii S. B., Kuriat R. I., Kravchenko B. I., Kvitka A. L.* Procedure and analysis of three dimensional thermal stressed states of turbine blades with coatings subjected to thermal cycling // Strength Mater. – 1999. – **31**, No. 6. – P. 564–570. – https://doi.org/10.1007/BF02510892.
5. *Кравчук Л. В., Куриат Р. И., Буйских К. П., Задворный Е. А., Киселевская С. Г.* Исследование кинетики повреждения жаропрочных сплавов при термоциклическом нагружении в газовом потоке // Проблемы прочности. – 2006. – № 4. – С. 79–86.

   Те саме: *Kravchuk L. V., Kuriat R. I., Buiskikh K. P., Zadvornyi E. A., Kiselevskaya S. G.* Investigation of the kinetics of damage to refractory alloys under cyclic thermal loading in a gas flow // Strength Mater. – 2006. – **38**, No. 4. – P. 386–391. – https://doi.org/10.1007/s11223-006-0054-1.
6. *Лебедев В. А., Ермолаев Г. В., Лой С. А., Матвиенко М. В.* Напряженное состояние напыленного покрытия при испытаниях на термостойкость // Упрочняющие технологии и покрытия. – 2014. – № 11. – С. 8–12.
7. *Тихонов А. С., Белов В. В., Леушин И. Г., Еременко В. И., Забелин С. Ф.* Термоциклическая обработка сталей, сплавов и композиционных материалов. – Москва: Наука, 1984. – 186 с.
8. *Третьяченко Г. Н., Карпинос Б. С.* Прочность и долговечность материалов при циклических тепловых воздействиях. – Киев: Наук. думка, 1990. – 256 с.
9. *Федюкин В. К., Смагоринский М. Е.* Термоциклическая обработка металлов и деталей машин. – Ленинград: Машиностроение, 1989. – 256 с.
10. *Шевчук В. А.* Аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием // Инж.-физ. журн. – 2013. – **86**, № 2. – С. 423–431.

    Те саме: *Shevchuk V. A.* Analytical solution of nonstationary heat conduction problem for a half-space with a multilayer coating // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2013. – **86**, No. 2. – P. 450–459. – https://doi.org/10.1007/s10891-013-0854-7.
11. *Шевчук В. А.* Задача термопружності для півпростору з багатошаровим покривом // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2013. – Вип. 11. – С. 157–163.
12. *Шевчук В. А.* Методологія дослідження термонапруженого стану тіл із тонкими багатошаровими покриттями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64,** № 3. – С. 41–54.
13. *Шевчук В. А.* Узагальнені граничні умови радіаційно-конвективного теплообміну тіл зі середовищем через багатошарові неплоскі покриття // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62,** № 2. – С. 82–97.

    Те саме: *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions of radiant-convection heat exchange of bodies with ambient medium through multilayer nonplanar coatings // J. Math. Sci. – 2022. – **261**, No. 1. – P. 95–114. – https://doi.org/10.1007/s10958-022-05741-y.
14. *Шевчук В. А., Гаврись А. П.* Нестационарная задача теплопроводности для полупространства с многослойным покрытием при циклическом изменении температуры внешней среды // Инж.-физ. журн. – 2020. – **93**, № 6. – С. 1543–1551.

    Те саме: *Shevchuk V. A., Gavris' A. P.* Nonstationary heat-conduction problem for a half-space with a multilayer coating upon cyclic change in the ambient temperature // J. Eng. Phys. Thermophys. – 2020. – **93**, No. 6. – P. 1489–1497. – https://doi.org/10.1007/s10891-020-02254-w.
15. *Шевчук В. А., Гаврись О. П.* Термонапружений стан півпростору з багатошаровим покривом за променево-конвективного теплообміну // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2017. – Вип. 15. –С. 171–179.
16. *Adolfsson E.,* Steady-periodic thermal stresses in an infinite hollow compound cylinder // J. Therm. Stresses. – 2021. – **44**, No. 9. – P. 1150–1168.

– https://doi.org/10.1080/01495739.2021.1945516.
17. *Ansari R., Alisafaei F., Ghaedi P.* Dynamic analysis of multi-layered filament-wound composite pipes subjected to cyclic internal pressure and cyclic temperature // Comput. Struct. – 2010. – **92**, No. 5. – P. 1100–1109.
– https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.09.058.
18. *Apatay T., Eraslan A. N.* Analyses of elastic limit heat loads in thick walled tubes subjected to periodic surface temperatures: analytical treatment // Arch. Mech. – 2018. – **70**, No. 1. – P. 37–53.
19. *Chen D., Crisci A., Boichot R., Colas J., Charpentier L., Balat-Pichelin M., Pons M., Merciere F.* Modeling multilayer coating systems in solar receivers // Surf. Coat. Technol. – 2020. – **399**. – Article 126102.
– https://doi.org/10.1016/j.surfcoat.2020.126102.
20. *Eraslan A. N., Apatay T.* Thermoelastic stresses in a rod subjected to periodic boundary condition: an analytical treatment // J. Multidiscip. Eng. Sci. Technol. – 2015. – **2**, No. 9. – P. 2438–2444.
21. *Fuad K., Daimaruya M., Kobayashi H.* Temperature and thermal stresses in a brake drum subjected to cyclic heating // J. Therm. Stresses. – 1994. – **17**, No. 4. – P. 515–527. – https://doi.org/10.1080/01495739408946277.
22. *Hawa H.A.E., Bhattacharyya A, Maurice D.* Modeling of thermal and lattice misfit stresses within a thermal barrier coating // Mech. Mater. – 2018. – **122**. – P. 159–170. – https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2018.03.009.
23. *Hendricks R. C., McDonald G., Mullen R. L., Braun M. J., Chung B. T., Padovan J.* Thermomechanical loading of multilayered cylindrical geometries in thermal cycling from 300 to 1300 K // ASME/JSME Thermal Engineering Joint Conference, Honolulu, HI, March, 20–24, 1983 / Y. Mori M. J. Tang (Eds.). – New York: ASME, 1983. – Vol. 3. – P. 329–340.
24. *Humfeld G. R. (Jr.)* Mechanical behavior of adhesive joint subjected to thermal cycling: Thesis for Master of Science in Engineereing Mechanics. – Virginia Polytechnic Institute. – Blackburg, 1997. – 81 p.
25. *Kaya Y., Eraslan A. N.* Thermo-elastoplastic solutions of a thick-walled tube with fixed ends subjected to a temperature cycle from its inner surface // Sigma J. Eng. Nat. Sci. – 2018. – **9**, No. 2. – P. 203–212.
26. *Li B., Fan X., Zhou K., Wang T.* A semi-analytical model for predicting stress evolution in multilayer coating systems during thermal cycling // Int. J. Mech. Sci. – 2018. – **135**. – P. 31–42. – https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2017.11.010.
27. *Mahmoudi H., Atefi G.* Analytical solution for thermal stresses in a hollow cylinder under periodic thermal loading // J. Mech. Eng. Sci. – 2012. – **226**, No. 7. – P. 1705–1724. – https://doi.org/10.1177/0954406211429757.
28. *Mao W. G., Zhou Y. C., Yang L., Yu X. H.* Modeling of residual stresses variation with thermal cycling in thermal barrier coatings // Mech. Mater. – 2006. – **38**, No. 12. – P. 1118–1127. – https://doi.org/10.1016/j.mechmat.2006.01.002.
29. *Noda N.-A., Uchicoba T., Ueno M., Sano Y., Iida K., Wang Z., Wang G.* Convenient debonding strength evaluation for spray coating based on intensity of singular stress // ISIJ Int. – 2015. – **55**, No. 12. – P. 2624–2630.
– https://doi.org/10.2355/isijinternational.ISIJINT-2015-458.
30. *Radu V., Taylor N., Paffumi E.* Development of new analytical solutions for elastic thermal stress components in a hollow cylinder under sinusoidal transient thermal loading // Int. J. Press. Vessels Pip. – 2008. – **85**, No. 12. – P. 885–893.
– https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2008.04.010.
31. *Shen Y-L., Suresh S.* Elastoplastic deformation of multilayered materials during thermal cycling // J. Mater. Res. – 1995. – **10**, No. 5. – P. 1200–1215.
– https://doi.org/10.1557/JMR.1995.1200.
32. *Shevchuk V. A.* Calculation of thermal state of bodies with multilayer coatings // Lect. Notes in Comput. Sci. / Computational Science – ICCS 2002. ICCS 2002 / (P. M. A. Sloot, A. G. Hoekstra, C. J. K. Tan, J. J. Dongarra (Eds.)). – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002. – **2330**. – P. 500–509.
– https://doi.org/10.1007/3-540-46080-2_52.
33. *Shevchuk V. A.* Generalized boundary conditions to solving thermal stress problems for bodies with thin coatings // In: Encyclopedia of Thermal Stresses / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 4. – P. 1942–1953.
– https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_601.
34. *Srivathsa B., Das D. K.* Parametric studies of failure mechanisms in thermal barrier coatings during thermal cycling using FEM // Int. J. Appl. Mech. Eng. –

2015. – **20**, No. 4. – P. 899–915. – https://doi.org/10.1515/ijame-2015-0058.
35. *Teixeira V., Andritschky M., Fisher W., Buchkremer H. P., Stover D.* Effect of deposition temperature and thermal cycling on residual stress state in zirconia-based thermal barrier coatings // Surf. Coat. Technol. – 1999. – **120-121**. – P. 103–111. – https://doi.org/10.1016/S0257-8972(99)00341-2.
36. *Zheng X., Chen H., Ma Z.* Shakedown boundaries of multilayered thermal barrier systems considering interface imperfections // Int. J. Mech. Sci. – 2018. – **144**, P. 33–40. – https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.05.016.

THE INVESTIGATION OF THERMAL STRESS STATE OF A HALF-SPACE WITH A MULTILAYER COATING UNDER CYCLIC CONVECTIVE HEAT EXCHANGE WITH THE AMBIENT MEDIUM

With the use of the obtained analytical solution of the thermoelasticity problem for a half-space with a multilayer coating under cyclic piecewise-uniform variation of the ambient temperature, the influence of thermocyclic loading on thermal stress state of such a system is investigated.

***Key words**: heat conduction, thermoelasticity, half-space, multilayer coating, generalized boundary conditions, thermal cycling.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
10.10.22