

ЕФЕКТИВНІ ТЕРМОПРУЖНІ МОДУЛІ ДИСКРЕТНИХ КОМПОЗИЦІЙНИХ ШАРІВ У МЕЖАХ МОДЕЛІ ОРТОТРОПНОГО МАТЕРІАЛУ

Запропоновано новий структурний підхід визначення ефективних термопружних модулів шаруватого композита в межах моделі ортотропного матеріалу. Сформульовані гіпотези про напружено-деформований стан тонких дискретно розглядуваних шарів вибрано за основу для усереднення їхніх властивостей по товщині. Всі шари поділені на дві підмножини залежно від переважаючої жорсткості в одному з двох взаємно перпендикулярних напрямків. Для кожної з підмножин використано окремі алгоритми усереднення, які комбінують способи Фойгта і Реусса (усереднення жорсткості або податливості, відповідно). Отримано повну просторову модель термопружних характеристик шаруватого композита, що враховує поперечні нормальні та зсувні деформації.

Ключові слова: шаруватий композит, ортотропний матеріал, правило усереднення, ефективні термопружні модулі.

Вступ. Композиційні матеріали (КМ) складають значну частку в конструкціях, приладах, устаткуванні та виробих низки високотехнологічних сучасних галузей. Це стосується, насамперед, аерокосмічної промисловості, суднобудування і спеціального машинобудування, де ставляться підвищені вимоги щодо міцності та надійності, а також щодо оптимальності за критерієм матеріаломісткості [8, 13, 17, 20]. Серед КМ важливе місце займають шаруваті структури. До них відносять, зокрема, полімерні композити, що формуються шляхом неперервної намотки чи на тканій основі. Такі КМ забезпечують необхідний баланс між складністю виготовлення і рівнем експлуатаційних навантажень. Визначення напружено-деформованого стану (НДС) конструктивних елементів із шаруватих КМ залежить від числових оцінок фізико-механічних, зокрема термомеханічних, характеристик [9, 12, 14, 23, 25]. Для пакета шарів їх не завжди можна визначити експериментально в повному обсязі, навіть у межах моделі ортотропного матеріалу [2, 10].

Для усереднення характеристик КМ часто використовують підходи мікро-, мезо- та макромеханіки у поєднанні з чисельним моделюванням і лабораторним експериментом. Такі дослідження не втрачають актуальності й на сучасному етапі [1, 4–6, 11, 22]. Для шаруватих композитів аналітичний підхід передбачає застосування структурних даних (зокрема, про розподіл армувальних волокон по товщині і по напрямках у площині шарів) і деяких правил усереднення з метою заміни реальної структури певним представницьким об'ємом (моношаром). Чисельне моделювання, зокрема, з використанням методу скінченних елементів [28], можна виконувати як для знаходження констант, що входять у рівняння стану, так і для розв'язування прикладних задач для елементів конструкцій із шаруватих КМ на основі класичної або уточненої теорії пластин [7, 18, 19, 21]. Натурний експеримент та інструментальні вимірювання дають змогу підтвердити теоретичні результати й адекватність прийнятих гіпотез та оцінити статистичну похибку [17, 26].

Єдиної методики визначення усереднених характеристик матеріалу, задовільно узгоджених з експериментом та практикою їхньої експлуатації, для композиційних матеріалів не існує [2, 7, 17, 24, 27]. Переважно застосовують деякі правила змішування у межах феноменологічного або структурного підходів. У першому підході передбачається опрацювання та узгодження експериментальних і теоретичних даних, а в структурному підході

✉ mv_marchuk@ukr.net

використовується, як правило, низка гіпотез, що дає змогу отримати розрахункові формули, які комбінують пружні модулі, відносні вмісти армувальних складових тощо.

Відомі два підходи до усереднення по об'єму – Фойґта (W. Voigt) [7] і Реусса (A. Reuss) [7], що базуються на гіпотезах про однакові деформації ($\epsilon = \text{const}$) чи однакові напруження ($\sigma = \text{const}$), відповідно (див. рис. 1). Наприклад, для ефективного модуля Юнга E_1 у напрямку армування на рівні мікрOMEХАНІКИ застосовують *пряме* правило усереднення (жорсткостей) – підхід Фойґта, що, як відомо, дає завищені значення:

$$E_1 = \omega^{(1)}E^{(1)} + (1 - \omega^{(1)})E^{(2)},$$

де $E^{(1)}$, $E^{(2)}$ – модулі Юнга матриці та армувальних волокон, $\omega^{(1)}$ і $1 - \omega^{(1)}$ – їхні відносні об'ємні вмісти відповідно. І навпаки, в напрямку, перпендикулярному до укладки волокон, значно кращі оцінки дає усереднення податливостей (тобто величин, *обернених* до модулів пружності) – підхід Реусса:

$$1/E_2 = \omega^{(1)}/E^{(1)} + (1 - \omega^{(1)})/E^{(2)}.$$

Застосування до одного параметра обох правил арифметичного й геометричного усереднення дає, відповідно, верхню та нижню оцінки. Сучасні структурні підходи, як правило, комбінують ці гіпотези з метою уточнення вірогідного ефективного значення [15, 16].

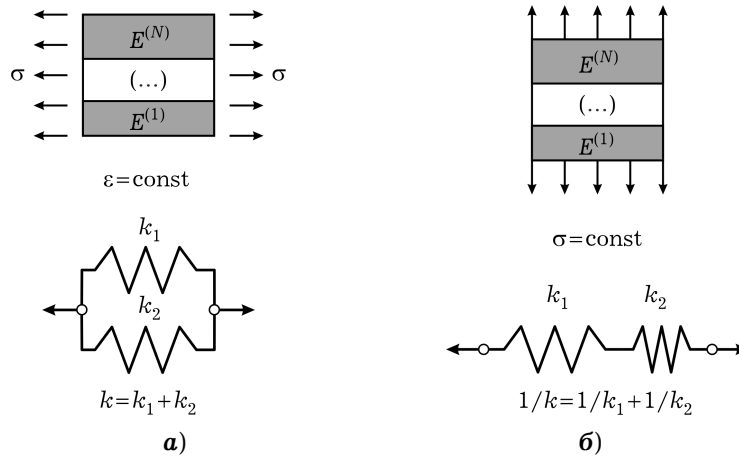


Рис. 1. Пряме (а) й обернене (б) усереднення пружних модулів $E^{(N)}$ шаруваті пластини та аналогія з простими елементами пружин з жорсткостями k_1 , k_2 .

Мета дослідження – запропонувати для визначення ефективних термopужних модулів шаруватого композита достатньо простий і практичний *структурний* підхід, який враховує відмінності деформування у двох взаємно перпендикулярних напрямках у площині моношару, який розглядатимемо як ортотропний матеріал з усередненими властивостями. Залежно від жорсткості окремих шарів, тобто від напрямків переважаючого армування, використовуватимемо пряме або обернене усереднення для отримання повного набору «інженерних» сталих ортотропного матеріалу.

Обмежимося припущенням, що окремі шари композита, які розглядатимемо дискретно, мають властивості, адекватні до моделі ортотропного матеріалу. Також увесь пакет шарів як моношар вважатимемо ортотропним матеріалом. Прикладами є симетрично перехресно-армований у площині шарів матеріал зі спільною віссю симетрії для усіх систем армування шарів або шари з ортогональним армуванням у двох напрямках [3]. Це дає змогу ввести спільну систему координат, що відповідатиме напрямкам ортотропії усереднених властивостей. Особливістю підходу також є те, що не ігноруватимемо трансверсальні деформації зсуву та стиснення.

1. Модель ортотропного матеріалу. Рівняння стану ортотропного матеріалу з урахуванням температурного розширення для деформацій у загальноприйнятих тензорних позначеннях [7, 18, 19, 21] має вигляд

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{km} + \delta_{ij} \alpha_{ij} \Delta T, \quad (1)$$

де σ_{ij} , ε_{ij} – компоненти симетричних тензорів напружень та деформацій відповідно, α_{ii} – коефіцієнти температурного розширення, $\Delta T = T - T_0$ – приріст температури T відносно деякого початкового значення T_0 , C_{ijkl} – симетричний тензор податливостей четвертого рангу, δ_{ij} – символ Кронекера. У розгорнутому вигляді з використанням нотації Фойгта та фізико-механічних характеристик матеріалу (модулів Юнга E_{ii} , модулів зсуву G_{ij} і коефіцієнтів Пуассона μ_{ij}) отримаємо матричне рівняння:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_{11} & -\mu_{21}/E_{22} & -\mu_{31}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{12}/E_{11} & 1/E_{22} & -\mu_{32}/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ -\mu_{13}/E_{11} & -\mu_{23}/E_{22} & 1/E_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{33} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T. \quad (2)$$

Матриця податливостей C_{ijkl} є симетричною, оскільки

$$C_{iijj} = C_{jjii} = -\mu_{ij}/E_{ii} = -\mu_{ji}/E_{jj}.$$

Вважатимемо модель ортотропного матеріалу фізично допустимою, що дає умову невиродженості матриці податливостей:

$$\Delta_3/(E_{11}E_{22}E_{33}G_{12}G_{13}G_{23}) \neq 0 \Rightarrow \Delta_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & -\mu_{21} & -\mu_{31} \\ -\mu_{12} & 1 & -\mu_{32} \\ -\mu_{13} & -\mu_{23} & 1 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Тоді обернені співвідношення до рівняння (1) можна записати і для напружень:

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} \varepsilon_{km} - \delta_{ij} \beta_{ij} \Delta T, \quad (3)$$

де A_{ijkl} – симетричний тензор жорсткостей четвертого рангу, β_{ij} – коефіцієнти термічної жорсткості.

Для подальших викладок зручно розглядати перші два з матричного рівняння (2) як систему для визначення нормальних напружень σ_{11} і σ_{22} :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \bar{E}_{11}(\varepsilon_{11} + \mu_{21}\varepsilon_{22}) + \lambda_1\sigma_{33} - \beta_{11}\Delta T, \\ \sigma_{22} &= \bar{E}_{22}(\varepsilon_{22} + \mu_{12}\varepsilon_{11}) + \lambda_2\sigma_{33} - \beta_{22}\Delta T, \end{aligned} \quad (4)$$

які потім підставимо в третє з рівнянь (2):

$$\sigma_{33} = \bar{E}_3(\varepsilon_{33} + \lambda_1\varepsilon_{11} + \lambda_2\varepsilon_{22}) - \beta_{33}\Delta T. \quad (5)$$

Тут позначено

$$\bar{E}_{11} = E_{11}/\delta, \quad \beta_{11} = \bar{E}_{11}(\alpha_{11} + \mu_{21}\alpha_{22}), \quad 1 \leftrightarrow 2,$$

$$\lambda_1 = \frac{\bar{E}_{11}(\mu_{31} + \mu_{21}\mu_{32})}{E_{33}} = \frac{\mu_{12}\mu_{23} + \mu_{13}}{\delta}, \quad 1 \leftrightarrow 2,$$

$$\bar{E}_{33} = (\delta/\Delta_3)E_{33}, \quad \delta = 1 - \mu_{12}\mu_{21}, \quad \beta_{33} = \bar{E}_{33}(\alpha_{33} + \lambda_1\alpha_{11} + \lambda_2\alpha_{22}).$$

Рівняння (4), (5) надалі використовуємо для побудови термопружних співвідношень між деформаціями та напруженнями для пакета відносно тонких шарів як деякого гомогенізованого ортотропного матеріалу, з урахуванням просторового характеру НДС. Зокрема, отримуємо пружні сталі та термічні жорсткості, асоційовані з σ_{i3} та ε_{i3} , $i = 1, 2, 3$.

Постулюємо модель ортотропії матеріалу як для окремих шарів, так і для всього пакета як деякого моношару з усередненими властивостями. Верхній індекс у дужках (ℓ) вказуватиме на приналежність до ℓ -шару ($\ell \in S = \{1, \dots, N\}$, N – кількість шарів), а для пакета в цілому його опускатимемо. Вважатимемо, що компоненти жорсткості $A_{ijkl}^{(\ell)}$ для всіх шарів є відомими, а метою є визначення ефективних (усереднених) модулів пакета як моношару. Зауважимо, що характеристики жорсткості однозначно пов'язані з фізико-механічними характеристиками матеріалу, які найчастіше використовуються на практиці: модулями Юнга $E_{ii}^{(\ell)}$, коефіцієнтами Пуассона $\mu_{ij}^{(\ell)}$, модулями зсуву матеріалу $G_{ij}^{(\ell)}$ та трьома коефіцієнтами температурного розширення α_{ii} . Зокрема, вони є вхідними даними для програм скінченно-елементного аналізу, причому для отримання числового результату, як правило, вимагається повний набір характеристик, що притаманний для тривимірного НДС. Загалом можна вважати, що всі шари мають різні властивості, однак на практиці структура пакета шарів часто містить значно меншу кількість різних наборів властивостей (у межах моделі ортотропного матеріалу), що можуть повторюватися й чергуватися, зокрема, з варіацією товщин шарів або орієнтацією напрямків армувальних волокон.

Важливим випадком є шаруваті полімерні композитні матеріали та виготовлені з них осесиметричні ємності, отримані шляхом неперервної намотки із симетричним укладанням волокон армування однакового об'ємного вмісту або тільки коловою намоткою, коли кут між напрямком волокна та віссю обертання складає майже 90° . Іншим прикладом можуть бути композитні матеріали на тканий основі, де волокна в двох напрямках армування є взаємно перпендикулярними. Можливі й складніші просторові схеми армування. У випадку, коли осі ортотропії всіх шарів будуть співнапрявлені до осей деякої ортогональної системи координат, то для пакета шарів можна запропонувати усереднення властивостей, виходячи з моделі ортотропного матеріалу. Загальноприйнято вважати, що осі **1** і **2** цієї системи координат розміщені у площині армування шарів, а вісь **3** напрямлена перпендикулярно до площини шару. Нехай також існує спільна відліку, в якій всі елементарні шари є ортотропними, тобто без повороту осей координат окремих шарів. Зауважимо, що напрямки армування можуть відхилитися від напрямку осі **1** (але симетрично) незалежно для кожного шару. Якщо $E_{11}^{(\ell)} > E_{22}^{(\ell)}$, то напрямком **1** називатимемо напрямком переважаючого армування. Якщо $E_{11}^{(\ell)} < E_{22}^{(\ell)}$, то напрямком переважаючого армування буде напрямком **2**. Шаруватий композит може мати як шари з чітко вираженим переважаючим напрямком армування, так і трансверсально-ізотропні або ізотропні шари, якщо $E_{11}^{(\ell)} \sim E_{22}^{(\ell)}$.

2. Основні гіпотези. У цій роботі в межах структурного підходу приймемо такі гіпотези для шаруватого композиційного матеріалу.

I. Фізико-механічні властивості представницького (елементарного) об'єму КМ є результатом взаємодії пакета *елементарних* шарів (постійної товщини), які вважатимемо для представницького об'єму достатньо тонкими. Тому компоненти напружень, деформацій та температури вважатимемо постійними по товщині у кожному шарі. Ефектами міжконтактної взаємодії шарів на мікрорівні (поблизу поверхонь контакту) нехтуємо.

II. Деформування кожного з елементарних шарів відбувається пружно, з урахуванням температурної складової деформації, а зв'язок між напруженнями, деформаціями і температурою має вигляд співвідношень Дюамеля – Неймана для ортотропного матеріалу (1).

III. Між шарами композита існує повний силовий контакт без проковзування чи інших дефектів (непроклеїв, відшарувань тощо). Це передбачає рівність нормальних і дотичних напружень, пов'язаних із напрямком 3:

$$\sigma_{33}^{(\ell)} = \sigma_{33}^{(\ell+1)}, \quad \sigma_{13}^{(\ell)} = \sigma_{13}^{(\ell+1)}, \quad \sigma_{23}^{(\ell)} = \sigma_{23}^{(\ell+1)},$$

де вже використано гіпотезу про кусково-сталий характер напружень у дискретних шарах.

IV. Мають зміст усереднені значення компонент поля напружень, деформацій і температури, отримані за правилом «простої суміші», пропорційно до відносних (парціальних) вмістів $\omega^{(\ell)}$:

$$\sigma_{ij} = \sum \omega^{(\ell)} \sigma_{ij}^{(\ell)}, \quad \varepsilon_{ij} = \sum \omega^{(\ell)} \varepsilon_{ij}^{(\ell)}, \quad T = \sum \omega^{(\ell)} T^{(\ell)}, \quad (6)$$

де $\sum(\dots) = \sum_{\ell \in S}(\dots)$, $\omega^{(\ell)} = h^{(\ell)} / H$, $\sum \omega^{(\ell)} = 1$, $h^{(\ell)}$ – товщина шару (ℓ) , H – сумарна товщина пакета.

V. Середня температура композита дорівнює температурі кожного з шарів:

$$T = T^{(\ell)}, \quad 1 \leq \ell \leq N.$$

Крім цих основних гіпотез I–V, необхідні *додаткові* гіпотези щодо параметрів НДС шарів КМ, які уможливають практичне отримання залежностей для ефективних властивостей композита як моношару. Такі припущення-обмеження визначають специфіку теоретичної моделі шаруватого композита.

Особливістю запропонованого підходу є гіпотетична можливість однозначно віднести кожен із шарів до однієї з двох підмножин S_1 і S_2 , $S_1 \cap S_2 = 0$: S_1 – це шари, в яких переважає жорсткість в напрямку 1, а S_2 – шари, в яких переважає жорсткість у напрямку 2. Уздовж переважаючих напрямків армування *нормальні деформації* шарів $e_{11}^{(\ell_1)}$, $\ell_1 \in S_1$, і $e_{22}^{(\ell_2)}$, $\ell_2 \in S_2$, замінимо їхніми середніми значеннями (*підхід Фойгта*), а в поперечному напрямку 2 усереднюватимемо *напруження* (*підхід Реусса*). Отже, наприклад, для підмножини S_1 деформації $e_{11}^{(\ell_1)}$ є визначальними для усереднених деформацій композита як макрооднорідного моношару. Тоді в іншому напрямку жорсткість є значно меншою, і компоненти напружень окремих шарів $\sigma_{22}^{(\ell_1)}$ можемо замінити деякими середніми значеннями. Аналогічні гіпотези приймаємо щодо підмножини шарів S_2 . Згідно з гіпотезою I («тонких» шарів), щодо напружень $\sigma_{33}^{(\ell)}$ можна припустити, що в усіх шарах реалізується рівень цих напружень, близький до середнього значення в усьому пакеті.

Зауважимо, що включення шарів (наприклад, ізотропних) до однієї з підмножин є доволі суб'єктивним, а тому вимагає додаткових експертних чи статистичних оцінок. Критерієм класифікації ℓ -го шару може слугувати, наприклад, порівняння модуля Юнга з максимальним по всьому пакету: $E_{11}^{(\ell)} \geq k E_{11}^{\max}$, де $k < 1$ – деякий заданий рівень. Неоднозначність щодо можливого залучення шарів до однієї з підмножин можна використати для узгодження з експериментальними даними шляхом порівняння двох варіантів оцінок, які відповідають належності шару до тієї чи іншої підмножини.

3. Техніка усереднення полягає в додаванні внесків деформацій кожного з шарів з урахуванням прийнятих гіпотез, а потім – підстановці отриманих виразів у рівняння стану – співвідношення Дюамеля – Неймана (1). З іншого боку, усереднюючи напруження (3), зокрема покомпонентно, згідно з рівняннями (4) і (5), та порівнюючи отримані співвідношення з моделлю ортотропного матеріалу, можна встановити розрахункові формули для ефективних пружних сталей і коефіцієнтів температурного розширення матеріалу.

Продемонструємо техніку усереднення для двох підмножин шарів на прикладі нормальних компонент деформацій і напружень у площині армування:

$$\varepsilon_{11} = \sum_{s=1,2} \omega^{(\ell_s)} \varepsilon_{11}^{(\ell_s)}, \quad \sigma_{11} = \sum_{s=1,2} \omega^{(\ell_s)} \sigma_{11}^{(\ell_s)}, \quad 1 \leftrightarrow 2,$$

де $\sum_{\ell_s \in S_s} (\dots) = \sum_s (\dots)$.

Введемо позначення

$$\omega^{<1>} = \sum_1 \omega^{(\ell_1)}, \quad \omega^{<2>} = \sum_2 \omega^{(\ell_2)}, \quad \omega^{<1>} + \omega^{<2>} = 1.$$

Прийmemo додаткові гіпотези:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^{(\ell_1)}, \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^{(\ell_2)}, \quad (7)$$

$$\hat{\sigma}_{11} = \sigma_{11}^{(\ell_2)}, \quad \hat{\sigma}_{22} = \sigma_{22}^{(\ell_1)}, \quad (8)$$

$$\sigma_{33} = \sigma_{33}^{(\ell_1)} = \sigma_{33}^{(\ell_2)}, \quad (9)$$

$$T = T^{(\ell_1)} = T^{(\ell_2)}. \quad (10)$$

Формули (7) пов'язують усереднені деформації пакета шарів із деформаціями однієї з підмножин шарів у відповідному напрямку переважаючого армування (підхід Фойгта). Формули (8) постулюють деякий середній рівень напружень у поперечному напрямку щодо напрямку переважаючого армування, а формули (9) фактично є наслідком прийнятих гіпотез *I* і *III*. Формули (10) є наслідком гіпотези *V*. Отже, запропонований підхід передбачає два внутрішні параметри $\hat{\sigma}_{11}$ і $\hat{\sigma}_{22}$, які надалі потрібно виключити з розгляду.

Приймаючи гіпотези (7), для деформацій ε_{11} отримаємо

$$(1 - \omega^{<1>})\varepsilon_{11} = \omega^{<2>}\varepsilon_{11} = \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \varepsilon_{11}^{(\ell_2)}. \quad (11)$$

З урахуванням гіпотез (7)–(10) для деформацій $\varepsilon_{11}^{(\ell_2)}$ з першого із матричного рівняння (2) маємо

$$\varepsilon_{11}^{(\ell_2)} = \frac{\hat{\sigma}_{11}}{E_{11}^{(\ell_2)}} - \mu_{21}^{(\ell_2)} \frac{\sigma_{22}^{(\ell_2)}}{E_{22}^{(\ell_2)}} - \mu_{13}^{(\ell_2)} \frac{\sigma_{33}}{E_{33}^{(\ell_2)}} + \alpha_{11}^{(\ell_2)} T. \quad (12)$$

Невідоме напруження $\hat{\sigma}_{11}$ також можна знайти через обернені співвідношення (4):

$$\hat{\sigma}_{11} = \sigma_{11}^{(\ell_2)} = \bar{E}_{11}^{(\ell_2)} (\varepsilon_{11}^{(\ell_2)} + \mu_{21}^{(\ell_2)} \varepsilon_{22}) + \lambda_1^{(\ell_2)} \sigma_{33} - \beta_{11}^{(\ell_2)} T. \quad (13)$$

Щоб виразити $\hat{\sigma}_{11}$ через інші усереднені напруження та деформації, пропонуємо декілька підходів:

(i) підставити (12) в (11) та оцінити доданки вигляду $(\mu_{21}^{(\ell_2)} / E_{22}^{(\ell_2)}) \sigma_{22}^{(\ell_2)}$;

(ii) усереднити (13) по шарах підмножини S_2 та оцінити доданки вигляду $\bar{E}_{11}^{(\ell_2)} \varepsilon_{11}^{(\ell_2)}$;

(iii) прийняти додаткові спрощення, які формально можна отримати з (13), ігноруючи решту доданків, крім першого:

$$\varepsilon_{11}^{(\ell_2)} \approx \hat{\sigma}_{11} / \bar{E}_{11}^{(\ell_2)}, \quad 1 \leftrightarrow 2. \quad (14)$$

Якщо підставити (14) в (11), то отримаємо найпростішу оцінку:

$$\hat{\sigma}_{11} \approx \omega^{<2>} \left(\sum_2 \omega^{(\ell_2)} / \bar{E}_{11}^{(\ell_2)} \right)^{-1} \varepsilon_{11}. \quad (15)$$

Якщо ж додати зважені внески (13) для шарів підмножини S_2 , то з урахуванням (11) отримаємо

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{11} \sum_2 \omega^{(\ell_2)} / \bar{E}_{11}^{(\ell_2)} &= \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \varepsilon_{11}^{(\ell_2)} + \varepsilon_{22} \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \mu_{21}^{(\ell_2)} + \\ &+ \sigma_{33} \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \lambda_1^{(\ell_2)} / \bar{E}_{11}^{(\ell_2)} - T \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \beta_{11}^{(\ell_2)} / \bar{E}_{11}^{(\ell_2)} \end{aligned}$$

або в компактному вигляді

$$\hat{\sigma}_{11} = \bar{E}_{11}^{<2>} (\varepsilon_{11} + \mu_{21}^{<2>} \varepsilon_{22}) + \lambda_1^{<2>} \sigma_{33} - \beta_{11}^{<2>} T, \quad (16)$$

де позначено

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11}^{<2>} &= \left(\frac{1}{\omega^{<2>}} \sum_2 \frac{\omega^{(\ell_2)}}{\bar{E}_{11}^{(\ell_2)}} \right)^{-1}, \quad \mu_{21}^{<2>} = \frac{1}{\omega^{<2>}} \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \mu_{21}^{(\ell_2)}, \\ \lambda_1^{<2>} &= \frac{\bar{E}_{11}^{<2>}}{\omega^{<2>}} \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \frac{\lambda_1^{(\ell_2)}}{\bar{E}_{11}^{(\ell_2)}} = \frac{\bar{E}_{11}^{<2>}}{\omega^{<2>}} \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \frac{\mu_{13}^{(\ell_2)} + \mu_{12}^{(\ell_2)} \mu_{23}^{(\ell_2)}}{\bar{E}_{11}^{(\ell_2)}}, \\ \beta_{11}^{<2>} &= \frac{\bar{E}_{11}^{<2>}}{\omega^{<2>}} \sum_2 \frac{\omega^{(\ell_2)} \beta_{11}^{(\ell_2)}}{\bar{E}_{11}^{(\ell_2)}} = \frac{\bar{E}_{11}^{<2>}}{\omega^{<2>}} \sum_2 \omega^{(\ell_2)} (\alpha_{11}^{(\ell_2)} + \mu_{21}^{(\ell_2)} \alpha_{22}^{(\ell_2)}). \end{aligned} \quad (17)$$

Зауважимо, що формула (16) для оцінки $\hat{\sigma}_{11}$ має перевагу над простішою формулою (15), оскільки зберігає структуру формули (4). Тому надалі будемо використовувати саме її, однак у деяких розрахунках можна передбачити також і спрощений варіант – формулу (15). Перший підхід (i) – підстановку (12) в (11), не розглядатимемо, оскільки він теж дає формулу (16), але викладки є значно громіздкішими та потрібно ігнорувати потрібні добутки з коефіцієнтами Пуассона в неосновних напрямках армування, а також доданки з температурою T з квадратичними добутками $\mu_{12}^{(\ell)} \mu_{21}^{(\ell)}$.

Для оцінки $\hat{\sigma}_{22}$ аналогічно усереднюємо деформації ε_{22} :

$$\hat{\sigma}_{22} = \bar{E}_{22}^{<1>} (\varepsilon_{22} + \mu_{12}^{<1>} \varepsilon_{11}) + \lambda_2^{<1>} \sigma_{33} - \beta_{22}^{<1>} T. \quad (18)$$

Тут введено такі позначення:

$$\begin{aligned} \bar{E}_{22}^{<1>} &= \left(\frac{1}{\omega^{<1>}} \sum_1 \frac{\omega^{(\ell_1)}}{\bar{E}_{22}^{(\ell_1)}} \right)^{-1}, \quad \mu_{12}^{<1>} = \frac{1}{\omega^{<1>}} \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \mu_{12}^{(\ell_1)}, \\ \lambda_2^{<1>} &= \frac{\bar{E}_{22}^{<1>}}{\omega^{<1>}} \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \frac{\lambda_2^{(\ell_1)}}{\bar{E}_{22}^{(\ell_1)}} = \frac{\bar{E}_{22}^{<1>}}{\omega^{<1>}} \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \frac{\mu_{23}^{(\ell_1)} + \mu_{21}^{(\ell_1)} \mu_{13}^{(\ell_1)}}{\bar{E}_{22}^{(\ell_1)}}, \\ \beta_{22}^{<1>} &= \frac{\bar{E}_{22}^{<1>}}{\omega^{<1>}} \sum_1 \frac{\omega^{(\ell_1)} \beta_{22}^{(\ell_1)}}{\bar{E}_{22}^{(\ell_1)}} = \frac{\bar{E}_{22}^{<1>}}{\omega^{<1>}} \sum_1 \omega^{(\ell_1)} (\alpha_{22}^{(\ell_1)} + \mu_{12}^{(\ell_1)} \alpha_{11}^{(\ell_1)}). \end{aligned} \quad (19)$$

З іншого боку, для усереднених напружень (6), урахувавши гіпотези (7)–(10), з обернених співвідношень (4) можна отримати вирази:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \sum_1 \omega^{(\ell_1)} [\bar{E}_{11}^{(\ell_1)} (\varepsilon_{11}^{(\ell_1)} + \mu_{21}^{(\ell_1)} \varepsilon_{22}^{(\ell_1)}) + \lambda_1^{(\ell_1)} \sigma_{33}^{(\ell_1)} - \beta_{11}^{(\ell_1)} T^{(\ell_1)}] + \\ & + \hat{\sigma}_{11} \sum_2 \omega^{(\ell_2)}, \quad 1 \leftrightarrow 2. \end{aligned}$$

З урахуванням гіпотез (7)–(10) звідси отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & \varepsilon_{11} \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \bar{E}_{11}^{(\ell_1)} + \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \bar{E}_{11}^{(\ell_1)} \mu_{21}^{(\ell_1)} \varepsilon_{22}^{(\ell_1)} + \sigma_{33} \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \lambda_1^{(\ell_1)} - \\ & - T \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \beta_{11}^{(\ell_1)} + \hat{\sigma}_{11} \sum_2 \omega^{(\ell_2)}, \quad 1 \leftrightarrow 2. \end{aligned} \quad (20)$$

Для другого доданка (з коефіцієнтом Пуассона) прийнемо гіпотези $\varepsilon_{22}^{(\ell_1)} \approx \hat{\sigma}_{22} / \bar{E}_{22}^{(\ell_1)}$, аналогічні до (14):

$$\begin{aligned} \boxed{\sum_1 \omega^{(\ell_1)} \bar{E}_{11}^{(\ell_1)} \mu_{21}^{(\ell_1)} \varepsilon_{22}^{(\ell_1)}} &= \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \bar{E}_{11}^{(\ell_1)} \mu_{21}^{(\ell_1)} \frac{\hat{\sigma}_{22}}{\bar{E}_{22}^{(\ell_1)}} = \\ &= \hat{\sigma}_{22} \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \mu_{12}^{(\ell_1)} = \boxed{\omega^{<1>} \mu_{12}^{<1>} \hat{\sigma}_{22}}, \quad 1 \leftrightarrow 2. \end{aligned} \quad (21)$$

Зауважимо, що виділені рамками вирази у формулах (21) можна розглядати як «глобальні» гіпотези усереднення для усіх шарів підмножини в цілому, на відміну від «локальних» гіпотез вигляду (14) для кожного з шарів.

Підставимо вирази (21), а також вирази (16) і (18) для $\hat{\sigma}_{11}$ і $\hat{\sigma}_{22}$ у формули (20) і згрупуємо при ε_{11} , ε_{22} , σ_{33} , T :

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & [\omega^{<1>} \bar{E}_{11}^{<1>} + \omega^{<2>} \bar{E}_{11}^{<2>}] \varepsilon_{11} + [\omega^{<1>} \mu_{12}^{<1>} \bar{E}_{22}^{<1>} + \omega^{<2>} \mu_{12}^{<2>} \bar{E}_{22}^{<2>}] \varepsilon_{22} + \\ & + [\omega^{<1>} \lambda_1^{<1>} + \omega^{<2>} \lambda_1^{<2>}] \sigma_{33} - [\omega^{<1>} \beta_{11}^{<1>} + \omega^{<2>} \beta_{11}^{<2>}] T, \\ & 1 \leftrightarrow 2, \end{aligned} \quad (22)$$

де, крім (17) і (19), введено позначення

$$\begin{aligned} \bar{E}_{11}^{<1>} &= \frac{1}{\omega^{<1>}} \sum_{\ell_1=1}^{N_1} \omega^{(\ell_1)} \bar{E}_{11}^{(\ell_1)}, & \bar{E}_{22}^{<2>} &= \frac{1}{\omega^{<2>}} \sum_{\ell_2=1}^{N_2} \omega^{(\ell_2)} \bar{E}_{22}^{(\ell_2)}, \\ \lambda_1^{<1>} &= \frac{1}{\omega^{<1>}} \sum_{\ell_1=1}^{N_1} \omega^{(\ell_1)} \lambda_1^{(\ell_1)}, & \lambda_2^{<2>} &= \frac{1}{\omega^{<2>}} \sum_{\ell_2=1}^{N_2} \omega^{(\ell_2)} \lambda_2^{(\ell_2)}, \\ \beta_{11}^{<1>} &= \frac{1}{\omega^{<1>}} \sum_{\ell_1=1}^{N_1} \omega^{(\ell_1)} \beta_{11}^{(\ell_1)}, & \beta_{22}^{<2>} &= \frac{1}{\omega^{<2>}} \sum_{\ell_2=1}^{N_2} \omega^{(\ell_2)} \beta_{22}^{(\ell_2)}. \end{aligned}$$

У формулах (22) ефективні пружні сталі шаруватого матеріалу (в квадратних дужках) є результатом усереднення по шарах кожної із двох підмножин: у напрямку переважаючого армування використовуємо усереднення (жорсткостей) за правилом простої суміші (підхід Фойгта), а в поперечному до нього напрямку, в площині армування, усереднюємо обернені величини (податливості) (підхід Реусса). Наприклад, для модулів Юнга $E_{11}^{<1>}$ підмножини шарів S_1 використовуємо підхід Фойгта, а для модулів $\bar{E}_{22}^{<1>}$ цієї самої підмножини – підхід Реусса.

Порівнюючи (22) з першими двома рівняннями стану (4), матимемо шукані ефективні пружні й термічні жорсткості пакета шарів:

$$\begin{aligned}
\bar{E}_{11} &= \omega^{<1>} \bar{E}_{11}^{<1>} + \omega^{<2>} \bar{E}_{11}^{<2>}, & \bar{E}_{22} &= \omega^{<2>} \bar{E}_{22}^{<2>} + \omega^{<1>} \bar{E}_{22}^{<1>}, \\
\bar{E}_{11} \mu_{21} &= \bar{E}_{22} \mu_{12} = \omega^{<1>} \mu_{12}^{<1>} \bar{E}_{22}^{<1>} + \omega^{<2>} \mu_{21}^{<2>} \bar{E}_{11}^{<2>}, \\
\lambda_1 &= \omega^{<1>} \lambda_1^{<1>} + \omega^{<2>} \lambda_1^{<2>}, & \lambda_2 &= \omega^{<1>} \lambda_2^{<1>} + \omega^{<2>} \lambda_2^{<2>}, \\
\beta_{11} &= \omega^{<1>} \beta_{11}^{<1>} + \omega^{<2>} \beta_{11}^{<2>}, & \beta_{22} &= \omega^{<2>} \beta_{22}^{<2>} + \omega^{<1>} \beta_{22}^{<1>}.
\end{aligned} \tag{23}$$

Зауважимо, що в рівняннях (22) маємо $\bar{E}_{11} \mu_{21} = \bar{E}_{22} \mu_{12}$, тобто забезпечено симетричність співвідношень для жорсткостей у межах ортотропної моделі.

Формули (23) дають правило усереднення для ефективних властивостей шаруватого композита. Хоча, аналізуючи формально структуру цих виразів, бачимо аналогію з правилом середнього зваженого для обох підмножин шарів, однак у межах кожної з них деякі величини фактично усереднюємо за правилом простої суміші (за правилом середнього арифметичного), а інші – усереднюємо як обернені величини (за правилом середнього геометричного).

Тепер розглянемо усереднення деформацій ε_{33} :

$$\varepsilon_{33} = \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \varepsilon_{33}^{(\ell_1)} + \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \varepsilon_{33}^{(\ell_2)}. \tag{24}$$

Використовуючи співвідношення (5), для кожної з двох підмножин шарів композитного пакета можна записати

$$\varepsilon_{33}^{(\ell_1)} = \sigma_{33}^{(\ell_1)} / \bar{E}_{33}^{(\ell_1)} - \lambda_1^{(\ell_1)} \varepsilon_{11}^{(\ell_1)} - \lambda_2^{(\ell_1)} \varepsilon_{22}^{(\ell_1)} + T^{(\ell_1)} \beta_{33}^{(\ell_1)} / \bar{E}_{33}^{(\ell_1)}, \quad 1 \leftrightarrow 2. \tag{25}$$

Підставляючи формули (25) в (24), з урахуванням прийнятих гіпотез (7)–(10) і гіпотез $e_{22}^{(\ell_1)} \approx \hat{\sigma}_{22} / \bar{E}_{22}^{(\ell_1)}$, $\varepsilon_{11}^{(\ell_2)} \approx \hat{\sigma}_{11} / \bar{E}_{11}^{(\ell_2)}$ для доданків $\lambda_1^{(\ell_2)} \varepsilon_{11}^{(\ell_2)}$ і $\lambda_2^{(\ell_1)} \varepsilon_{22}^{(\ell_1)}$, після перегрупування отримаємо

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{33} &= \sigma_{33} \left(\sum_1 \omega^{(\ell_1)} / \bar{E}_{33}^{(\ell_1)} + \sum_2 \omega^{(\ell_2)} / \bar{E}_{33}^{(\ell_2)} \right) - \\
&\quad - \varepsilon_{11} \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \lambda_1^{(\ell_1)} - \varepsilon_{22} \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \lambda_1^{(\ell_2)} - \\
&\quad - \hat{\sigma}_{22} \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \lambda_2^{(\ell_1)} / \bar{E}_{22}^{(\ell_1)} - \hat{\sigma}_{11} \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \lambda_1^{(\ell_2)} \bar{E}_{11}^{(\ell_2)} + \\
&\quad + T \left(\sum_1 \omega^{(\ell_1)} \beta_{33}^{(\ell_1)} / \bar{E}_{33}^{(\ell_1)} + \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \beta_{33}^{(\ell_2)} / \bar{E}_{33}^{(\ell_2)} \right).
\end{aligned}$$

Введемо позначення

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\bar{E}_{33}} &= \sum_1 \frac{\omega^{(\ell_1)}}{\bar{E}_{33}^{(\ell_1)}} + \sum_2 \frac{\omega^{(\ell_2)}}{\bar{E}_{33}^{(\ell_2)}} = \sum \frac{\omega^{(\ell)}}{\bar{E}_{33}^{(\ell)}}, \\
\alpha_{33} &= \sum_1 \omega^{(\ell_1)} \frac{\beta_{33}^{(\ell_1)}}{\bar{E}_{33}^{(\ell_1)}} + \sum_2 \omega^{(\ell_2)} \frac{\beta_{33}^{(\ell_2)}}{\bar{E}_{33}^{(\ell_2)}} = \sum \omega^{(\ell)} (\alpha_{33}^{(\ell)} + \lambda_1^{(\ell)} \alpha_{11}^{(\ell)} + \lambda_2^{(\ell)} \alpha_{22}^{(\ell)})
\end{aligned} \tag{26}$$

та скористаємося позначеннями (17), (19) і (26). Тоді для ε_{33} матимемо

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{33} &= \frac{\sigma_{33}}{\bar{E}_{33}} - (\omega^{<1>} \lambda_1^{<1>}) \varepsilon_{11} - (\omega^{<2>} \lambda_2^{<2>}) \varepsilon_{22} - \\
&\quad - \frac{\omega^{<1>} \lambda_2^{<1>}}{\bar{E}_{22}^{<1>}} \hat{\sigma}_{22} - \frac{\omega^{<2>} \lambda_1^{<2>}}{\bar{E}_{11}^{<2>}} \hat{\sigma}_{11} + \alpha_{33} T.
\end{aligned} \tag{27}$$

Нарешті, підставимо у (27) вирази (16), (18) для $\hat{\sigma}_{11}$ і $\hat{\sigma}_{22}$, ігноруючи добутки з коефіцієнтами Пуассона, тобто приймаючи $\hat{\sigma}_{11} \approx \bar{E}_{11}^{<2>} \varepsilon_{11}$, $\hat{\sigma}_{22} \approx \bar{E}_{22}^{<1>} \varepsilon_{22}$. Остаточного рівняння (5) для шаруватого композита запишемо у такому вигляді:

$$\sigma_{33} = \bar{E}_{33} [\varepsilon_{33} + (\omega^{<1>} \lambda_1^{<1>} + \omega^{<2>} \lambda_1^{<2>}) \varepsilon_{11} + (\omega^{<1>} \lambda_1^{<2>} + \omega^{<2>} \lambda_2^{<2>}) \varepsilon_{22}] + \alpha_{33} \bar{E}_{33} T. \quad (28)$$

Рівняння (28) разом з формулами (22) за структурою цілком аналогічні до співвідношень (4) та (5).

Завершальним кроком є усереднення зсувних компонент деформацій і напружень. Прийняті гіпотези I–IV допускають як усереднення деформацій (у припущенні, що мають зміст середні по товщині напруження), так і усереднення напружень (у припущенні, що деформації усього пакета шарів можна замінити середніми по товщині). З урахуванням гіпотези III про сумісну роботу шарів (ідеальний міжшаровий контакт) рекомендуємо усереднювати деформації:

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{\ell=1, \dots, N} \omega^{(\ell)} \varepsilon_{ij}^{(\ell)} = \sum_{\ell=1, \dots, N} \frac{\omega^{(\ell)} \sigma_{ij}^{(\ell)}}{2G_{ij}^{(\ell)}} = \frac{\sigma_{ij}}{2G_{ij}}, \quad (29)$$

де

$$1/G_{ij} = \sum_{\ell=1, \dots, N} \omega^{(\ell)} / G_{ij}^{(\ell)}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i < j.$$

Отже, для усереднення модулів зсуву правило простої суміші застосуємо до обернених величин $1/G_{12}$, $1/G_{13}$ і $1/G_{23}$.

Висновки. На основі структурного підходу запропоновано схему усереднення для ефективних термопружних характеристик шаруватих структур, що комбінує правила усереднення жорсткостей та податливостей відповідно до поділу шарів на дві підмножини, залежно від напрямку переважального армування. Система рівнянь (23), (26) і (29) описує модель пружного ортотропного матеріалу з урахуванням температурних складових деформації для шаруватого композита, що враховує просторовий НДС пакета шарів. Легко показати, що ефективні фізико-механічні характеристики матеріалу моношару (модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона, модулі зсуву та коефіцієнти температурного розширення) на основі цих формул визначаються однозначно. Тоді за загальними формулами (2) можна знайти коефіцієнти матриці податливості C_{ijklm} або матриці жорсткості A_{ijklm} , які є взаємооберненими.

У подальших дослідженнях покажемо ефективність запропонованого підходу в задачах для композитних пластин і оболонок, де тривимірні ефекти деформування можуть бути істотними. Програмний інтерфейс і взаємодія з комплексами інженерних розрахунків таких задач, зокрема, з програмами скінченноелементного аналізу, слугуватимуть практичному впровадженню комбінованої схеми пошарового усереднення, а її валідність можна буде оцінити через числовий експеримент.

1. Гребенюк С. М. Ефективні пружні сталі композиційного матеріалу з армуванням двома сортами односпрямованих волокон // Вісн. Запорізького університету. Фіз.-мат. науки. – 2016. – № 1. – С. 48–56. – http://nbuv.gov.ua/UJRN/Vznu_mat_2016_1_8.
2. Композиционные материалы / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наук. думка, 1985. – 592 с.
3. Марчук М. В., Харченко В. М., Хом'як М. М. Математична модель визначення ефективних фізико-механічних характеристик перехресно армованого композитного шару // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2018. – Вип. 16. – С. 64–73. – <http://doi.org/10.15407/apmm2018.16.64-73>.

4. Морозов А. В. Визначення ефективних пружних характеристик односпрямованого композиційного матеріалу // Вчені зап. Тавр. нац. ун-ту ім. В. І. Вернадського. Сер. Техн. науки. – 2020. – **31**(70), Ч. 1, № 2. – С. 44–51.
– <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2020.2-1/07>.
5. Немировский Ю. В., Янковский А. П. Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально-изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2007. – **13**, № 1. – С. 3–32.
6. Хорошун Л. П., Левчук О. И. Эффективные упругие свойства слоистых композитов при несовершенной адгезии // Доп. НАН України. – 2019. – № 5. – С. 56–66.
7. Altenbach H., Altenbach J., Kissing W. Mechanics of composite structural elements. – Singapore: Springer, 2018. – 504 p.
8. Barbero E. J. Introduction to composite materials design. – Boca Raton: Taylor & Francis Group, CRC Press, 2017. – 536 p.
9. Bojtár G., Csizmadia B. M., Égert J. Numerical determination of orthotropic material properties of textile composite layers and their validation by measurement // Acta Polytechnica Hungarica. – 2017. – **14**, No. 2. – P. 47–67.
– <https://doi.org/10.12700/APH.14.2.2017.2.3>.
10. Clyne T. W., Hull D. An Introduction to composite materials. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2019. – 360 p.
11. Ejeh C. J., Barsoum I., Chizindu G. O., Kodje G. M., Anachuna J. I. Thermo-elastic behaviour of carbon-fiber reinforced polymer and the effect of adding nanoparticles at elevated heat intensity // Heliyon. – 2020. – **6**, No. 3. – e03622.
– <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2020.e03622>.
12. Farooq U., Myler P. Efficient determination of mechanical properties of carbon fibre-reinforced laminated composite panels // ARPN J. Eng. Appl. Sci. – 2017. – **12**, No. 5. – P. 1375–1392. – <https://www.researchgate.net/publication/320067938>.
13. Gibson R. F. Principles of composite material mechanics. – Boca Raton: Taylor & Francis, CRC Press, 2007. – 426 p. – <https://doi.org/10.1201/b19626>.
14. Grigorenko A. Ya., Müller W. H., Grigorenko Ya. M., Vlaiikov G. G. Recent developments in anisotropic heterogeneous shell theory. Applications of refined and three-dimensional theory. Volume II B. – Berlin: Springer, 2016. – 108 p.
15. Hashin Z., Shtrikman S. A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials // J. Mech. Phys. Solids. – 1963. – **11**, No. 2. – P. 127–140. – [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(63\)90060-7](https://doi.org/10.1016/0022-5096(63)90060-7).
16. Hill R. A self-consistent mechanics of composite materials // J. Mech. Phys. Solids. – 1965. – **13**, No. 4. – P. 213–222. – [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(65\)90010-4](https://doi.org/10.1016/0022-5096(65)90010-4).
17. Jones R. M. Mechanics of composite materials. – Boca Raton: Taylor & Francis, CRC Press, 1999. – 538 p.
18. Kollár L. P., Springer G. S. Mechanics of composite structures. – Cambridge: Cambr. Univ. Press, 2003. – 500 p.
19. Li D. Analysis of composite laminates: Theories and their applications. – Elsevier, 2022. – 542 p.
20. Rana S., Figueiro R. (Eds). Advanced composite materials for aerospace engineering: Processing, properties and applications. – Duxford, UK: Elsevier, Woodhead Publ., 2016. – 496 p. – <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100037-3.00001-8>.
21. Reddy J. N. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. – Boca Raton: Taylor & Francis, CRC Press, 2004. – 832 p.
22. Rubashevskiy V., Shukayev S. Estimation of limit state for quasi-isotropic $[90^\circ/\pm 45^\circ/0^\circ]_S$ AS4/3501-6 carbon/epoxy under uniaxial and biaxial loads // Mech. Adv. Technol. – 2019. – **2**(86). – P. 7–13.
– <https://doi.org/10.20535/2521-1943.2019.86.176173>.
23. Sertse H., Yu W. Three-dimensional effective properties of layered composites with imperfect interfaces // Adv. Aircr. Spacecr. Sci. – 2017. – **4**, No. 6. – P. 639–650.
– <https://doi.org/10.12989/aas.2017.4.6.639>.
24. Soden P. D., Hinton M. J., Kaddour A. S. Lamina properties, lay-up configurations and loading conditions for a range of fibre-reinforced composite laminates // Compos. Sci. Technol. – 1998. – **58**, No. 7. – P. 1011–1022.
– [https://doi.org/10.1016/S0266-3538\(98\)00078-5](https://doi.org/10.1016/S0266-3538(98)00078-5).
25. Tokovyy Y. V., Yasinsky A. V., Lubovicki S., Perkowski D. M. Elastic and thermoelastic responses of orthotropic half-planes // Materials (MDPI). – 2022. – **15**,

No. 1. – Art. 297. – <https://doi.org/10.3390/ma15010297>.

26. Tsai S. W. Structural behavior of composite materials // NASA CR-71. – Newport Beach, CA: Philco Corp., 1964. – 72 p.
27. Tsai S. W., Hahn H. T. Introduction to composite materials. – Westport, CT: Technomic Publ., 1980. – 466 p.
28. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J. Z. The finite element method: Its basis and fundamentals. – Oxford, UK: Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2013. – 714 p.

EFFECTIVE THERMOELASTIC MODULI OF DISCRETE COMPOSITE LAYERS WITHIN THE FRAMEWORK OF THE ORTHOTROPIC MATERIAL MODEL

A new structural approach is proposed to determine the effective thermoelastic moduli of a layered composite within the orthotropic material model. Formulated hypotheses on the stress-strain state of thin layers considered discretely are chosen as a base to averaging the properties along the thickness. All layers are divided into two subsets depending on the prevailing stiffness in one of two mutually perpendicular directions. For each of the subsets, different averaging algorithms are used, combining the Voigt and Reuss methods (stiffness or compliance averaging, respectively). A complete three-dimensional model for thermoelastic characteristics of layered composites is obtained, taking into account transverse normal and shear strains.

Key words: layered composite, orthotropic material, averaging rule, effective thermoelastic moduli.

¹ Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

² Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

³ ДП «КБ «Південне» ім. М. К. Янгеля», Дніпро,

⁴ Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів

Одержано

29.11.22