УДК 517.95+511.2

В. С. Ільків[1], М. М. Симотюк[2✉], Я. О. Слоньовський[1]

МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ ХАРАКТЕРИСТИЧНОГО ВИЗНАЧНИКА БАГАТОТОЧКОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА

Встановлено оцінки знизу для характеристичного визначника задачі з багатоточковими умовами за виділеною змінною з простими вузлами інтерполяції та умовами періодичності за рештою змінних для рівняння із частинними похідними типу Ейлера. Розглянуто часткові випадки, коли вузли інтерполяції утворюють геометричну прогресію або дійсні частини коренів характеристичного рівняння мають степеневу поведінку на нескінченності.

Ключові слова: *багатоточкова задача, рівняння типу Ейлера, метричний підхід, проблема малих знаменників.*

1. Основні позначення та приклади. Використовуватимемо такі позначення: Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, Q_T^p – циліндр $(0,T)\times\Omega^p$; $x = (x_1,\dots,x_p)\in\Omega^p$, $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\dots+|k_p|$, $(k,x)=k_1x_1+\dots+k_px_p$, $D_x=(-i\partial/\partial x_1,\dots,-i\partial/\partial x_p)$, i – уявна одиниця; $\mathbb{C}_n[z_1,\dots,z_p]$ – множина многочленів степеня n від змінних $z_1,\dots,z_p$ з комплексними коефіцієнтами; симплекс Π^n – множина векторів $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_n)\in[1,T]^n$ таких, що $t_1<\dots<t_n$, S_n – симетрична група перестановок множини з n елементів; $C^n(I)$, $n\in\mathbb{N}$, – простір функцій, n разів неперервно диференційовних на проміжку I; $\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} A$ – n-вимірна міра Лебеґа вимірної множини $A\subset\mathbb{R}^n$, W_p – сукупність послідовностей дійсних чисел $(\tau_k)_{k\in\mathbb{Z}^p}$ таких, що $\tau_k>0$ для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$. Через $H(\tau_k)$ позначимо гільбертів простір усіх формальних тригонометричних рядів

$$\varphi(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k\exp(ik,x),\qquad \varphi_k\in\mathbb{C},$$

для яких є скінченною норма $\|\varphi(x);H(\tau_k)\|=\left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}|\varphi_k|^2\tau_k^2\right)^{1/2}$, породжена скалярним добутком $(\varphi(x),\psi(x))_{H(\tau_k)}=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\varphi_k\bar{\psi}_k\tau_k^2$, а через $C^n([a,b];H(\tau_k))$, $n\in\mathbb{Z}_+$, позначимо простір функцій

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}u_k(t)\exp(ik,x),\qquad u_k\in C^n[a,b],$$

зі скінченною нормою $\|u;C^n([a,b];H(\tau_k))\|=\sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[a,b]}\|(t\partial/\partial t)^j u(t,\cdot);H(\tau_k)\|$.

Нехай $n\in\mathbb{N}$, а поліноми $A_j(z_1,\dots,z_p)$, $j=1,\dots,n$, є такими, що $A_j\in\mathbb{C}_{N_j}[z_1,\dots,z_p]$, $N_j\ge 0$, $N_1+\dots+N_n>0$, і для кожного $k\in\mathbb{Z}^p$ многочлен

$$L_n(\lambda,k)\equiv\lambda^n+\sum_{j=0}^{n-1}A_{n-j}(k)\lambda^j \tag{1}$$

✉ mykhailo.m.symotiuk@gmail.com

має різні корені $\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k)$. Вважатимемо, що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ корені пронумеровані згідно з нерівностями

$$\operatorname{Re}\lambda_1(k) \leq \ldots \leq \operatorname{Re}\lambda_n(k). \tag{2}$$

Через γ позначимо число

$$\gamma = \max_{1 \leq j \leq n}\{N_j/j\}, \qquad \gamma > 0. \tag{3}$$

Відомо (див. [12, розд. 5, § 7]), що для кожного $k \in \mathbb{Z}^p$ виконуються оцінки

$$|\lambda_j(k)| \leq C_1(1 + |k|^\gamma), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

де C_1 – додатна стала, що не залежить від $k \in \mathbb{Z}^p$.

Умови коректності багатоточкової задачі для рівняння із частинними похідними типу Ейлера

$$L_n\left(t\frac{\partial}{\partial t}, D_x\right)u(t,x) \equiv \left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^n u + \sum_{j=0}^{n-1}\left(t\frac{\partial}{\partial t}\right)^j A_{n-j}(D_x)u = 0, \ (t,x) \in Q_T^p, \tag{5}$$

$$u(t_j, x) = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n, \quad 1 \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T, \quad x \in \Omega^p, \tag{6}$$

пов'язані із властивостями таких характеристичних визначників [6]:

$$\Delta_n(k) = \det\left\| t_j^{\lambda_q(k)} \right\|_{j,q=1}^n, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{7}$$

де точки $t_1, \ldots, t_n$ називають вузлами інтерполяції задачі (5), (6). Зокрема, при виконанні умови

$$\forall k \in \mathbb{Z}^p \quad \Delta_n(k) \neq 0 \tag{8}$$

задача (5), (6) має єдиний формальний розв'язок, що зображується рядом

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p}\sum_{j,q=1}^n \frac{\Delta_{j,q}(k)}{\Delta_n(k)}\varphi_{j,k}t^{\lambda_q(k)}\exp(ik,x), \tag{9}$$

де $\Delta_{j,q}(k)$ – алгебричне доповнення елемента $t_j^{\lambda_q(k)}$, $j,q = 1,\ldots,n$, у визначнику $\Delta_n(k)$, а $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathbb{Z}^p$, – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, n$.

Збіжність ряду (9) пов'язана із проблемою малих знаменників. Хоча визначники (7), які є знаменниками у (9), відмінні від нуля за умовою (8), проте вони можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$ і спричиняти розбіжність ряду (9). На це вказує такий приклад.

► ***Приклад 1.*** Формальний розв'язок задачі

$$t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (t,x) \in Q_T^1, \tag{10}$$

$$u(1,x) = 0, \qquad u(T,x) = \varphi(x), \qquad x \in \Omega^1, \tag{11}$$

у якій $\ln T \notin \pi\mathbb{Q}$, зображується формулою

$$u(t,x) = \frac{\varphi_0 \ln t}{\ln T} + \sum_{k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}}\frac{\sin(k\ln t)}{\sin(k\ln T)}\varphi_k\exp(ikx). \tag{12}$$

За теоремою Хінчина [13, с. 48], для довільної додатної функції $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ існує таке додатне число $\theta(g)$, що $\theta(g) \notin \pi\mathbb{Q}$ і нерівність

$$|k\theta(g) - m\pi| < g(|k|)$$

виконується для нескінченної кількості пар цілих чисел k, m. Оскільки для фіксованого k нерівність $|k\theta(g) - m\pi| < g(|k|)$ може виконуватися лише для скінченної кількості цілих чисел m, то з оцінки

$$|\sin(k\theta(g))| = |\sin(k\theta(g) - m\pi)| \le |k\theta(g) - m\pi|$$

випливає, що нерівність

$$|\sin(k\theta(g))| < g(|k|)$$

виконується для нескінченної множини $M(\theta(g))$ цілих чисел k. Зазначимо, що $\sin(k\theta(g)) \ne 0$ для всіх $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, оскільки $\theta(g) \notin \pi\mathbb{Q}$.

Нехай в умовах (11) функція $\varphi(x)$, що належить до простору $H(\tau_k)$, де $(\tau_k) \in W_1$, має спеціальний вигляд

$$\varphi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \varphi_k \exp(ikx), \qquad \varphi_k \equiv \frac{1}{k\tau_k}.$$

Тоді для розв'язку задачі (10), (11), зображеного рядом (12), одержимо

$$\left\| t\partial_t u(t,x)\big|_{t=1}; H(\rho_k)\right\|^2 \ge \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{|k\varphi_k|^2\rho_k^2}{\sin^2(k\ln T)} = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\rho_k^2}{\tau_k^2\sin^2(k\ln T)},$$

де $(\rho_k)\in W_1$. Виберемо тепер число $T>1$ таким, що $T = \exp(\theta(g))$, де функція $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}_+$ визначається рівністю $g(|k|) = \min\{\rho_{|k|}/\tau_{|k|}, \rho_{-|k|}/\tau_{-|k|}\}$. Тоді з огляду на нескінченність множини $M(\theta(g))$ отримуємо

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\rho_k^2}{\tau_k^2\sin^2(k\ln T)} \ge \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{\rho_k^2}{\tau_k^2 g^2(|k|)} \ge \sum_{k\in M(\theta(g))} 1 = +\infty.$$

Отже, яким би гладким не був простір $H(\tau_k)$, для нього знайдуться функція $\varphi\in H(\tau_k)$ і число $T>1$ в умовах (11) такі, що ряд (12) не належить до жодного простору $C^2([1,T];H(\rho_k))$, $(\rho_k)\in W_1$.

Для того щоб сума ряду (12) належала до простору $C^2([1,T];H(\rho_k))$ при деякій послідовності $(\rho_k)\in W_1$ (за умови, що $\varphi(x)$ є довільною функцією з простору $H(\tau_k)$ при фіксованій послідовності $(\tau_k)\in W_1$), достатньо, щоб число $\ln T\notin \pi\mathbb{Q}$ задовольняло оцінку

$$|\sin(k\ln T)| \ge C_2(1+|k|)^{-\omega} \tag{13}$$

для всіх $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, де $C_2>0$, $\omega\in\mathbb{R}$. Справді, в цьому випадку для довільної послідовності $(\rho_k)\in W_1$ такої, що $\rho_k \le \tau_k(1+|k|)^{-\omega-2}$, для функції $u(t,x)$, зображеної рядом (12), виконується нерівність

$$\left\|u(t,x);C^2([1,T];H(\rho_k))\right\| \le C_3\sqrt{|\varphi_0\rho_0|^2 + \sum_{k\ne 0}\left|k^2\varphi_k\right|^2\rho_k^2/\sin^2(k\ln T)} \le$$

$$\le C_4\sqrt{\sum_{k\in\mathbb{Z}}|\varphi_k\rho_k|^2(1+|k|)^{2\omega+4}} \le C_4\|\varphi(x);H(\tau_k)\|, \tag{14}$$

де додатні сталі C_3, C_4 не залежать від $k\in\mathbb{Z}$.

Завершимо приклад обговоренням питання про те, для яких чисел T може виконуватися нерівність (13). Нехай m − таке ціле число, що

$$-\frac{\pi}{2} < k\ln T - m\pi \le \frac{\pi}{2}.$$

Оскільки для всіх $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ справджується нерівність [3]

$$|\sin x| \geq \frac{2}{\pi}|x|,$$

то

$$|\sin(k\ln T)| = |\sin(k\ln T - m\pi)| \geq \frac{2}{\pi}|k\ln T - m\pi| = 2|k|\left|\frac{\ln T}{\pi} - \frac{m}{k}\right|,$$

$$k \neq 0.$$

Тому питання про можливість виконання нерівності (13) зводиться до питання про можливість виконання нерівності

$$\left|\frac{\ln T}{\pi} - \frac{m}{k}\right| \geq \frac{C_5}{|k|^{\omega-1}}, \tag{15}$$

тобто до з'ясування того, як наближення числа $\ln T/\pi$ раціональними дробами m/k залежить від величини знаменника $|k|$. У випадку, коли $\ln T/\pi$ − дійсне алгебричне число степеня $d \geq 2$, з теорем Ліувілля та Рота [6, с. 12] випливає, що нерівність (15) виконується для всіх раціональних чисел m/k, якщо $\omega = \omega(d)$, де $\omega(2) = 3$ і $\omega(d) > 3$ для $d \geq 3$. Із теореми Бореля [6, с. 12] випливає, що для майже всіх дійсних чисел $T > 1$ нерівність (15) виконується при $\omega > 3$ для всіх раціональних чисел m/k. ◄

Для інших рівнянь проблема малих знаменників не виникає.

► ***Приклад 2.*** Легко перевірити, що визначник $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, задачі з умовами (11) для рівняння

$$t^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (t, x) \in Q_T^1,$$

обчислюється за формулою

$$\Delta_2(k) = T^{|k|} - T^{-|k|}. \tag{16}$$

Для кожного $T > 1$ для визначника (16) виконується нерівність

$$|\Delta_2(k)| \geq T^{|k|}/2, \tag{17}$$

якщо $|k| \geq \ln 2/\ln(T^2)$. ◄

2. Формулювання основних завдань роботи. Для заданої додатної функції $g : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$ множину всіх векторів $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \Pi^n$, складених зі значень вузлів інтерполяції $t_1, \ldots, t_n$, розіб'ємо на дві підмножини $M_1(g)$ і $M_2(g)$. До підмножини $M_1(g)$ віднесемо ті вектори $\mathbf{t}$, для яких оцінка знизу

$$|\Delta_n(k)| \geq g(k) \tag{18}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, а до підмножини $M_2(g)$ − ті вектори $\mathbf{t}$, для яких нерівність $|\Delta_n(k)| < g(k)$ виконується для нескінченної кількості $k \in \mathbb{Z}^p$.

Наведені *приклади 1, 2* демонструють, що, *по-перше*, існує рівняння другого порядку таке, що множина $M_2(g)$ непорожня, якою б не була додатна функція $g : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$; *по-друге*, існують рівняння другого порядку і така додатна функція $g : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$, що множина $M_1(g)$ є множиною повної міри Лебеґа (відповідно, множина $M_2(g)$ має нульову міру Лебеґа); *по-третє*, існують рівняння другого порядку і додатна функція $g : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$ такі, що множина $M_1(g)$ співпадає із симплексом Π^n.

Метою цієї роботи є: ***1°***) побудувати для кожного рівняння типу Ейлера (5) таку додатну функцію $g : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$, що множина $M_1(g)$ є множиною повної міри Лебеґа (відповідно, множина $M_2(g)$ має нульову міру Лебеґа); ***2°***) довести існування рівняння (5) і додатної функції $g : \mathbb{Z}^p \to \mathbb{R}_+$ таких, що множина $M_1(g)$ співпадає з Π^n.

За допомогою метричного підходу [1, 6, 7] у цій праці встановлено (див. нижче теорему 1), що нерівність (18) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}^n$) векторів $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [1, T]^n$ для всіх (крім, можливо, скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо

$$g(k) = |V(k)|\left(1 + |k|\right)^{-\omega} \prod_{j=1}^{n} t_j^{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}, \qquad \omega > (p+\gamma)n(n-1)/2,$$

де $V(k) = \prod\limits_{n \ge j > q \ge 1} \left(\lambda_j(k) - \lambda_q(k)\right)$ – дискримінант полінома (1), а γ – число з формули (3). Подібна оцінка зберігається (див. нижче теорему 2) і для випадку логарифмічно рівновіддалених вузлів інтерполяції $t_1, \ldots, t_n$ в умовах (6). Для доведення теорем 1, 2 використано допоміжні леми 2, 3 про оцінки мір виняткових множин гладких функцій спеціального вигляду. У теоремі 3 встановлено точні оцінки знизу для визначника $\Delta_n(k)$ на основі допоміжної леми 4 про оцінки скалярних добутків. Підкреслимо, що для характеристичного визначника багатоточкової задачі для рівняння типу Ейлера (5) метричні оцінки знизу є новими, відсутні у науковій літературі і не є наслідком оцінок, встановлених раніше у [2, 3, 6–9] для рівнянь зі сталими коефіцієнтами.

3. Допоміжні твердження. Для доведення основних результатів будемо використовувати такі допоміжні твердження.

Лема 1 (Валле Пуссен, [14]). *Нехай у рівнянні*

$$y^{(n)}(t) + a_1(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n(t)y(t) = 0, \qquad n \ge 2, \tag{19}$$

коефіцієнти $a_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$, *є неперервними на* $[a, b]$ *функціями і нехай* $L_j = \max\limits_{t \in [a,b]} |a_j(t)|$, $j = 1, \ldots, n$. *Якщо* h_0 – *додатний корінь рівняння*

$$L_n \frac{h^n}{n!} + L_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + L_1 \frac{h}{1!} - 1 = 0, \tag{20}$$

то для довільних n *точок* $P_1 \equiv (t_1, A_1), \ldots, P_n \equiv (t_n, A_n)$, $A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}$, *таких, що*

$$a \le t_1 < \ldots < t_n \le b, \qquad t_n - t_1 = h \le h_0,$$

існує єдиний розв'язок рівняння (19), *який проходить через ці точки. Зокрема, цей розв'язок є тривіальним* ($y(t) \equiv 0$), *якщо* $A_1 = \ldots = A_n = 0$.

Зауважимо, що за умови $L_1 = \ldots = L_n = 0$ загальний розв'язок рівняння (19) є многочленом $(n-1)$-го степеня, коефіцієнти якого однозначно визначаються з умов $y(t_j) = A_j$, $j = 1, \ldots, n$, оскільки всі числа $t_1, \ldots, t_n$ є різними.

Якщо ж $\max\limits_{1 \le j \le n} L_j > 0$, то ліва частина рівняння (20), яку позначимо через $G(h)$, є зростаючою функцією від h на проміжку $[0, +\infty)$, від'ємною при $h = 0$ і додатною при досить великих додатних h, тому рівняння (20) має єдиний додатний нуль h_0. Знайдемо оцінку знизу для h_0. Позначимо

$$h_* = \min_{j:\, L_j \neq 0} \left\{ (j!\, n^{-1} L_j^{-1})^{1/j} \right\} > 0 .$$

Тоді для числа h_* виконуються нерівності

$$L_j \frac{h_*^j}{j!} \le \frac{1}{n}, \qquad j = 1, \dots, n ,$$

із яких випливає, що $G(h_*) \le n \cdot \frac{1}{n} - 1 = 0 = G(h_0)$, а отже, $h_* \le h_0$ внаслідок монотонності $G(h)$ на $[0, +\infty)$. Таким чином, для кореня h_0 рівняння (20) виконується оцінка $h_0 \ge h_*$. Враховуючи цю оцінку, з леми 1 отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1. *Якщо функція $y(t)$ є ненульовим розв'язком рівняння* (19), *коефіцієнти $a_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, якого є неперервними функціями на $[a, b]$, то кількість нулів функції $y(t)$ на відрізку $[a, b]$ не перевищує $C_6 H$, де*

$$C_6 = (n-1)\big(1 + (b-a)n\big), \qquad H = 1 + \max_{1 \le j \le n} \max_{t \in [a,b]} \left| a_j(t) \right|^{1/j} .$$

Наслідок 2. *Нехай $f(t)$ − ненульова функція вигляду*

$$f(t) = \sum_{j=1}^{m} p_j t^{\lambda_j}, \qquad \lambda_j \ne \lambda_q, \qquad j \ne q , \tag{21}$$

де $\lambda_j, p_j \in \mathbb{C}$, $j = 1, \dots, m$. Тоді для довільного відрізка $[a, b]$, $a \ge 1$, кількість нулів функції $f(t)$, які потрапляють на $[a, b]$, не перевищує $C_7\big(1 + \max_{1 \le j \le m} |\lambda_j|\big)$, де стала C_7 залежить тільки від a, b, m.

Д о в е д е н н я. Функція $f(t)$ є ненульовим розв'язком такого диференціального рівняння m-го порядку:

$$\prod_{j=1}^{m} \left(t \frac{d}{dt} - \lambda_j \right) Q(t) = 0 .$$

За теоремою Вієта модуль коефіцієнта при похідній $Q^{(m-j)}(t)$, $1 \le j \le m$, у цьому рівнянні не перевищує $C_8 \Lambda^j$, $\Lambda = 1 + \max_{1 \le j \le m} |\lambda_j|$, $C_8 = C_8(a, b, m)$. Тому твердження наслідку 2 випливає з наслідку 1. ♦

Для функції $f : I \to \mathbb{R}$, заданої на проміжку $I \subset \mathbb{R}$, через $E(f, \varepsilon, I)$, $\varepsilon > 0$, будемо позначати множину $E(f, \varepsilon, I) = \{ t \in I : |f(t)| < \varepsilon \}$.

Лема 2. *Якщо дійснозначна функція $f(t)$ належить до простору $C^n[a, b]$, $a > 1$, і є такою, що для всіх $t \in [a, b]$ виконується нерівність*

$$\left| \left(t \frac{d}{dt} \right)^n f(t) \right| \ge \delta, \qquad \delta > 0 ,$$

тоді для довільного $\varepsilon > 0$ справджується оцінка

$$\mathrm{mes}_{\mathbb{R}}\, E(f, \varepsilon, [a, b]) \le 2bn(n!)^{1/n} (\varepsilon/\delta)^{1/n} .$$

Д о в е д е н н я леми 2 проводиться із використанням міркувань, аналогічних до наведених у [4, 5]. ♦

Лема 3. *Нехай функція $f(t)$ має вигляд* (21). *Якщо для деяких комплексних чисел a_j, $j = 1, \dots, n$, виконується умова*

$$\left|(t\,d/dt)^n f(t) + a_1 (t\,d/dt)^{n-1} f(t) + \ldots + a_n f(t)\right| \geq \delta > 0$$

$$\forall t \in [a,b] \subset [1,+\infty),$$

то для довільного $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1)$ *справджується оцінка*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(f, \varepsilon, [a,b]) \leq C_9 \Lambda (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \qquad \Lambda \equiv 1 + \max_{1 \leq j \leq m} \left|\lambda_j\right|,$$

де $\varepsilon_1 = \dfrac{\delta}{2(n+1)A^n}$, $A \equiv 1 + \max\limits_{1 \leq j \leq n} \left|a_j\right|^{1/j}$, $C_9 = C_9(a,b,m,n)$.

Якщо функція $f(t)$ *є дійсною, тобто* $\lambda_j, p_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$, *то для довільного* $\varepsilon \in (0, 2\varepsilon_1)$ *справджується оцінка*

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(f, \varepsilon, [a,b]) \leq C_{10} (\varepsilon/\delta)^{1/n}, \qquad C_{10} = C_{10}(a,b,m,n).$$

Д о в е д е н н я. З умови леми випливає, що в кожній точці $t \in [a,b]$ виконується нерівність

$$\max_{0 \leq j \leq n} \left\{A^{n-j} \left|(t\,d/dt)^j \operatorname{Re} f(t)\right|, A^{n-j} \left|(t\,d/dt)^j \operatorname{Im} f(t)\right|\right\} \geq \delta/(2(n+1)). \quad (22)$$

Розглянемо функції

$$y_j(t) = A^{n-j} (t\,d/dt)^j \operatorname{Re} f(t), \qquad y_{n+1+j}(t) = A^{n-j} (t\,d/dt)^j \operatorname{Im} f(t),$$

$$j = 0, 1, \ldots, n,$$

а також функції

$$z_{jq}^+(t) = y_j(t) + y_q(t), \qquad z_{jq}^-(t) = y_j(t) - y_q(t), \qquad 0 \leq j < q \leq 2n+1.$$

Згідно з наслідком 2 кожна з функцій $z_{jq}^+(t)$, $z_{jq}^-(t)$ (якщо вона відмінна від тотожного нуля) має на $[a,b]$ не більше ніж $C_{11}\Lambda$ нулів. Через J позначимо розбиття відрізка $[a,b]$ на відрізки J_r, $[a,b] = \bigcup\limits_{r=1}^{M} J_r$, утворене точками a, b та всіма нулями всіх нетривіальних функцій $z_{jq}^{\pm}(t)$, $0 \leq j < q \leq$ $\leq 2n+1$. Очевидно, що кількість M відрізків розбиття не перевищує $C_{12}\Lambda$, $C_{12} = C_{12}(a,b,m,n)$. Згідно з побудовою розбиття J, на кожному відрізку J_r цього розбиття серед $2n+2$ функцій

$$A^{n-j} \left|(t\,d/dt)^j \operatorname{Re} f(t)\right|, \qquad A^{n-j} \left|(t\,d/dt)^j \operatorname{Im} f(t)\right|$$

деяка функція є максимальною. Тоді з (22) випливає, що для довільного r, $1 \leq r \leq M$, існує $j(r)$, $0 \leq j(r) \leq n$, таке, що в кожній точці $t \in J_r$ виконується нерівність

$$A^{n-j(r)} \left|(t\,d/dt)^{j(r)} \operatorname{Re} f(t)\right| \geq \delta / (2(n+1))$$

або нерівність

$$A^{n-j(r)} \left|(t\,d/dt)^{j(r)} \operatorname{Im} f(t)\right| \geq \delta / (2(n+1)).$$

Із цих нерівностей випливає, що при $\varepsilon < \varepsilon_1$ відрізок J_r не містить точок множини $E(f, \varepsilon, (a,b))$, якщо $j(r) = 0$. Якщо ж $j(r) \neq 0$, то згідно з лемою 2

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(\operatorname{Re} f, \varepsilon, I_r) \leq C_{13} \left(\varepsilon / (\delta A^{n-j(r)})\right)^{\frac{1}{j(r)}} \leq C_{13} (\varepsilon/\delta)^{\frac{1}{n}}, \; C_{13} = C_{13}(b,n),$$

або

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(\operatorname{Im} f, \varepsilon, I_r) \le C_{14}\left(\varepsilon/(\delta A^{n-j(r)})\right)^{\frac{1}{j(r)}} \le C_{14}(\varepsilon/\delta)^{\frac{1}{n}}, \quad C_{14} = C_{14}(b, n).$$

Таким чином, при $\varepsilon < \varepsilon_1$ маємо

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(f, \varepsilon, [a, b]) = \sum_{r=1}^{M} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(f, \varepsilon, I_r) \le C_{15}\Lambda \sqrt[n]{\varepsilon/\delta},$$

$$C_{15} = C_{15}(a, b, m, n). \qquad \blacklozenge$$

4. Метричні оцінки для характеристичного визначника в кубі $[1, T]^n$. Застосуємо лему 3 для встановлення оцінок знизу для визначника (7).

Теорема 1. *Нехай для кожного* $k \in \mathbb{Z}^p$ *корені многочлена* (1) *пронумеровані, як у* (2). *Тоді для майже всіх* (*стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}^n$) *векторів* $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in [1, T]^n$ *нерівність* (18) *виконується для всіх* (*крім, можливо, скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$, *якщо* $g(k)$ *визначена формулою*

$$g(k) = |V(k)|\left(1 + |k|\right)^{-\omega} \prod_{j=1}^{n} t_j^{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}, \qquad \omega > (p + \gamma)n(n-1)/2,$$

де γ *– число з формули* (3).

Д о в е д е н н я. З огляду на лему Бореля – Кантеллі [6, 7], для доведення теореми 1 достатньо встановити при $\omega > (p+\gamma)n(n-1)/2$ збіжність ряду

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} \left\{ \mathbf{t} \in [1, T]^n : |\Delta_n(k)| < |V(k)|\left(1 + |k|\right)^{-\omega} \prod_{j=1}^{n} t_j^{\operatorname{Re}\lambda_j(k)} \right\}. \tag{23}$$

Із кожного j-го рядка, $1 \le j \le n$, визначника $\Delta_n(k)$ винесемо множник $t_j^{\lambda_j(k)}$, отримаємо рівність

$$\Delta_n(k) = \Gamma_n(k) \prod_{j=1}^{n} t_j^{\lambda_j(k)}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{24}$$

де символом $\Gamma_n(k)$ позначено визначник $\det \left\| t_j^{\lambda_q(k) - \lambda_j(k)} \right\|_{j,q=1}^{n}$ з одиничною головною діагоналлю. Із рівності (24) випливає, що ряд (23) збігається тоді й тільки тоді, коли збігається ряд

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B(k), \tag{25}$$

де

$$B(k) := \left\{ \mathbf{t} \in [1, T]^n : \left|\Gamma_n(k)\right| < |V(k)|(1 + |k|)^{-\omega} \right\}, \qquad k \in \mathbb{Z}^p.$$

Встановимо збіжність ряду (25). Для цього зауважимо, що

$$B(k) \subset \bigcup_{q=2}^{n} B_q(k) \tag{26}$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$, де символом $B_q(k)$, $q = 2, \ldots, n$, позначено множину

$$\left\{ \mathbf{t} \in [1, T]^n : \left|\Gamma_q(k; \boldsymbol{\tau}_q)\right| < \nu_q(k), \left|\Gamma_{q-1}(k; \boldsymbol{\tau}_{q-1})\right| \ge \nu_{q-1}(k) \right\}.$$

Тут $\Gamma_q(k; \boldsymbol{\tau}_q)$, $q = 1, \ldots, n$, – визначник, який отримується з визначника $\Gamma_n(k)$ викреслюванням останніх $n - q$ рядків та останніх $n - q$ стовпців,

$\boldsymbol{\tau}_q = (t_1,\ldots,t_q)$, $q = 1,\ldots,n$, і числа $\nu_q(k)$ визначаються рівностями

$$\nu_1(k) = 1, \qquad \nu_q(k) = \frac{\prod_{j=2}^{q} \left|\Lambda_j(k)\right|}{(1+|k|)^{(p+\gamma+\varepsilon)q(q-1)/2}}, \qquad q = 2,\ldots,n,$$

де $\varepsilon = \omega/C_n^2 - p - \gamma$, $\Lambda_q(k) = \big(\lambda_q(k)-\lambda_1(k)\big)\ldots\big(\lambda_q(k)-\lambda_{q-1}(k)\big)$, $q = 2,\ldots,n$.

Із включення (26) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ виконується

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B(k) \le \sum_{q=2}^{n} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B_q(k). \tag{27}$$

Згідно з теоремою Фубіні, для кожного $q = 2,\ldots,n$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B_q(k) = \int\limits_{[0,T]^{n-1}} \operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_q(k;\mathbf{t}_q)\,dt_1\ldots dt_{q-1}dt_{q+1}\ldots dt_n, \tag{28}$$

де $\mathbf{t}_q = (t_1,\ldots,t_{q-1},t_{q+1},\ldots,t_n)$, $q = 2,\ldots,n$, а символом $B_q(k;\mathbf{t}_q)$, $q = 2,\ldots,n$, позначено множину $\{t_q \in [1,T] : (t_1,\ldots,t_{q-1},t_q,t_{q+1},\ldots,t_n) \in B_q(k)\}$.

Застосуємо лему 3 для оцінки зверху мір множин $B_q(k;\mathbf{t}_q)$, $q = 2,\ldots,n$. Для цього зауважимо, що функція $\Gamma_q(k;\boldsymbol{\tau}_q)$ як функція від змінної t_q (при фіксованих $t_1,\ldots,t_{q-1}$) має вигляд (21), модулі показників $\left|\lambda_q(k)-\lambda_j(k)\right|$ якої не перевищують $2C_1\big(1+|k|^{\gamma}\big)$, де C_1 − стала з формули (4).

Побудуємо лінійні диференціальні вирази порядку $q-1$ у вигляді добутку диференціальних виразів першого порядку:

$$R_{q-1}\left(t_q\frac{d}{dt_q},k\right) = \prod_{j=1}^{q-1}\left(t_q\frac{d}{dt_q} + \lambda_q(k) - \lambda_j(k)\right), \qquad q = 2,\ldots,n.$$

Легко перевірити, що $\left(t\dfrac{d}{dt}+\lambda\right)[t^{-\lambda}] = 0$, тому для кожного $q = 2,\ldots,n$ правильними є рівності

$$R_{q-1}\left(t_q\frac{d}{dt_q},k\right)\left[t_q^{\lambda_j(k)-\lambda_q(k)}\right] = 0, \qquad j = 1,\ldots,q-1,$$

$$R_{q-1}\left(t_q\frac{d}{dt_q},k\right)[1] = \Lambda_q(k).$$

Розвиваючи визначники $\Gamma_q(k;\boldsymbol{\tau}_q)$, $q = 2,\ldots,n$, за елементами останнього рядка, отримаємо такі рівності:

$$\Gamma_q(k;\boldsymbol{\tau}_q) = \sum_{j=1}^{q}(-1)^{j+q}t_q^{\lambda_j(k)-\lambda_q(k)}\Gamma_{q,j}(k;\boldsymbol{\tau}_{q-1}), \qquad q = 2,\ldots,n, \tag{29}$$

де $\Gamma_{q,j}(k;\boldsymbol{\tau}_{q-1})$ − алгебричне доповнення елемента, що розміщений на перетині q-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\Gamma_q(k;\boldsymbol{\tau}_q)$. Із розвинень (29) і лінійності диференціальних виразів R_{q-1} випливають такі рівності:

$$R_{q-1}\left(t_q\frac{\partial}{\partial t_q},k\right)\Gamma_q(k;\boldsymbol{\tau}_q) = \Lambda_q(k)\Gamma_{q-1}(k;\boldsymbol{\tau}_{q-1}), \qquad q = 2,\ldots,n. \tag{30}$$

Якщо $\mathbf{t} \in B_q(k)$, $q = 2,\ldots,n$, то з формул (30) та означення множин $B_q(k)$, $q = 2,\ldots,n$, випливає, що

$$\forall t_q \in [1,T] \qquad \left| R_{q-1}\left(t_q \frac{\partial}{\partial t_q}, k\right) \Gamma_q(k; \boldsymbol{\tau}_q) \right| \ge \nu_{q-1}(k) \left| \Lambda_q(k) \right|. \tag{31}$$

Оскільки $\deg_\mu R_{q-1}(\mu, k) = q-1$, а модуль коефіцієнта при $\left(t_q \dfrac{\partial}{\partial t_q}\right)^{q-1-j}$, $j = 0,1,\ldots,q-1$, у диференціальному виразі $R_{q-1}(t_q \partial/\partial t_q, k)$ не перевищує $C_{16}(1+|k|)^{\gamma j}$, то з оцінок (31) і леми 3 отримуємо, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} B_q(k; \mathbf{t}_q) \le C_{17}(1+|k|)^{\gamma} \left(\frac{\nu_q(k)}{\nu_{q-1}(k)\left|\Lambda_q(k)\right|} \right)^{1/(q-1)} \le$$

$$\le C_{18}(1+|k|)^{-p-\varepsilon}, \qquad q = 2,\ldots,n, \tag{32}$$

де додатна стала C_{18} не залежить від вибору значень $\mathbf{t}_q = (t_1,\ldots,t_{q-1},t_{q+1},\ldots,t_n) \in [1,T]^{n-1}$. Тоді з формул (28), (32) отримуємо оцінки

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}^n} B_q(k) \le C_{18} T^{n-1} (1+|k|)^{-p-\varepsilon}, \qquad q = 2,\ldots,n, \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{33}$$

Із нерівностей (27) і (33) випливає збіжність ряду (25). Теорему доведено. ♦

5. Метричні оцінки для характеристичного визначника на кривій Веронезе. Встановимо оцінки знизу для визначника $\Delta_n(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, у частковому випадку логарифмічно рівновіддаленних вузлів

$$t_j = t_1^j, \qquad j = 1,\ldots,n, \qquad t_1 > 1, \tag{34}$$

тобто вузли $t_1,\ldots,t_n$ є членами геометричної прогресії зі знаменником $t_1 \in (1, T^{1/n}]$. У цьому випадку визначник (7) залежить від t_1 і обчислюється за формулою

$$\Delta_n(k) = \begin{vmatrix} t_1^{\lambda_1(k)} & \ldots & t_1^{\lambda_n(k)} \\ t_1^{2\lambda_1(k)} & \ldots & t_1^{2\lambda_n(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{n\lambda_1(k)} & \ldots & t_1^{n\lambda_n(k)} \end{vmatrix} = t_1^{\lambda_1(k)+\ldots+\lambda_n(k)} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ t_1^{\lambda_1(k)} & \ldots & t_1^{\lambda_n(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ t_1^{(n-1)\lambda_1(k)} & \ldots & t_1^{(n-1)\lambda_n(k)} \end{vmatrix} =$$

$$= t_1^{\lambda_1(k)+\ldots+\lambda_n(k)} \prod_{n \ge j > q \ge 1} \left(t_1^{\lambda_j(k)} - t_1^{\lambda_q(k)} \right), \qquad k \in \mathbb{Z}^p. \tag{35}$$

Тут враховано формулу для визначника Вандермонда [12] чисел $t_1^{\lambda_1(k)},\ldots,t_1^{\lambda_n(k)}$. Зауважимо, що твердження теореми 1 для оцінки знизу визначника (7) не можна застосувати для оцінки визначника (35), оскільки цей визначник залежить від вектора $\mathbf{t} = (t_1, t_1^2, \ldots, t_1^n)$, що знаходиться на кривій Веронезе:

$$\left\{ (t_1, t_1^2, \ldots, t_1^n) \in \mathbb{R}^n : t_1 \in (1, T^{1/n}] \right\},$$

яка має нульову n-вимірну міру Лебеґа, $n \ge 2$. Застосування одновимірної міри Лебеґа дозволяє встановити майже всюди на кривій Веронезе таку ж оцінку знизу для визначника (35), як і в теоремі 1 для визначника (7). Таким чином, крива Веронезе успадковує оцінку з куба $[1,T]^n$.

Теорема 2. *Нехай справджуються рівності* (34) *і для кожного* $k \in \mathbb{Z}^p$ *корені многочлена* (1) *пронумеровані, як у* (2). *Тоді для визначника* (35) *нерівність* (18) *виконується для майже всіх* (*стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}$) *чисел* $t_1 \in (1, T^{1/n}]$ *для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$, *якщо* $g(k)$ *визначена формулою*

$$g(k) = |V(k)|\left(1+|k|\right)^{-\omega}\prod_{j=1}^{n} t_j^{\operatorname{Re}\lambda_j(k)}, \qquad \omega > (p+\gamma)n(n-1)/2\,,$$

де γ *– число з формули* (3).

Д о в е д е н н я. Нескладними перетвореннями формули (35) одержуємо

$$\Delta_n(k) = t_1^{\lambda_1(k)+2\lambda_2(k)+\ldots+n\lambda_n(k)}\prod_{n\ge j>q\ge 1}\left(1 - t_1^{\lambda_q(k)-\lambda_j(k)}\right), \qquad k\in\mathbb{Z}^p\,. \tag{36}$$

Запровадимо функції

$$\psi(k,t_1) = \prod_{n\ge j>q\ge 1}\psi_{jq}(k,t_1), \qquad k\in\mathbb{Z}^p, \qquad t_1\in(1,T^{1/n}]\,,$$

$$\psi_{jq}(k,t_1) = 1 - t_1^{\lambda_q(k)-\lambda_j(k)}, \qquad n\ge j>q\ge 1, \qquad k\in\mathbb{Z}^p\,,$$

диференціальні вирази

$$R_{jq}\left(t_1\frac{d}{dt_1}\right) = t_1\frac{d}{dt_1} + \lambda_j(k) - \lambda_q(k), \qquad n\ge j>q\ge 1, \qquad k\in\mathbb{Z}^p\,,$$

та множини

$$E(k) = \left\{t_1\in(1,T^{1/n}] : |\psi(k,t_1)| < \eta(k)\right\}, \qquad k\in\mathbb{Z}^p\,,$$

$$E_{jq}(k) = \left\{t_1\in(1,T^{1/n}] : |\psi_{jq}(k,t_1)| < \eta_{jq}(k)\right\}, \qquad n\ge j>q\ge 1, \qquad k\in\mathbb{Z}^p\,,$$

де $\eta(k) = \prod_{n\ge j>q\ge 1}\eta_{jq}(k)$, $\eta_{jq}(k) = |k|^{-(p+\gamma)-\varepsilon}\,|\Lambda_{jq}(k)|$, $\Lambda_{jq}(k) = \lambda_j(k)-\lambda_q(k)$. Легко перевірити, що $\left(t\dfrac{d}{dt}+\lambda\right)[1-t^{-\lambda}] = \lambda$, тому

$$\left|R_{jq}\left(t_1\frac{d}{dt_1}\right)\psi_{jq}(k,t_1)\right| = |\lambda_j(k)-\lambda_q(k)|, \qquad n\ge j>q\ge 1, \qquad k\in\mathbb{Z}^p\,. \tag{37}$$

Із рівностей (37) на підставі леми 3 та оцінок $|\lambda_j(k)-\lambda_q(k)| \le 2C_1\left(1+|k|^{\gamma}\right)$, де C_1 – стала з формули (4), отримуємо

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E_{jq}(k) \le C_{19}\left(1+|k|\right)^{\gamma}\frac{\eta_{jq}(k)}{|\Lambda_{jq}(k)|} \le C_{20}\,|k|^{-p-\varepsilon}\,,$$

$$n\ge j>q\ge 1, \qquad k\in\mathbb{Z}^p\,. \tag{38}$$

Оскільки $E(k)\subset\bigcup_{n\ge j>q\ge 1}E_{jq}(k)$, то

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(k) \le \sum_{n\ge j>q\ge 1}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E_{jq}(k)\,. \tag{39}$$

Тоді з нерівностей (38), (39) випливає збіжність ряду

$$\sum_{k\in\mathbb{R}^p}\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(k)\,. \tag{40}$$

Тому за лемою Бореля – Кантеллі [6, 7] зі збіжності ряду (40) випливає, що для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{R}$) чисел $t_1\in(1,T^{1/n}]$ нерівність $|\psi(k,t_1)|\ge\eta(k)$, а отже, й нерівність

$$|\Delta_n(k)| \ge \eta(k)t_1^{\operatorname{Re}(\lambda_1+2\lambda_2+\ldots+n\lambda_n)} = \eta(k)t_1^{\operatorname{Re}\lambda_1}t_2^{\operatorname{Re}\lambda_2}\ldots t_n^{\operatorname{Re}\lambda_n} \tag{41}$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) $k\in\mathbb{Z}^p$.

Теорему доведено. ♦

Зауваження 1. У формулюваннях теорем 1, 2 у вирази для оцінюючої функції $g(k)$ входить множником модуль $|V(k)|$ дискримінанта полінома (1). Для нього можна встановити степеневі (щодо $|k|$) оцінки знизу для майже всіх векторів, складених із коефіцієнтів полінома

$$A_n(z_1,\ldots,z_p) = \sum_{|s|\le N_n} A_n^s z_1^{s_1}\ldots z_p^{s_p}\,.$$

Нехай $r_q = (0,\ldots,0,N_n,0,\ldots,0)$, $q=1,\ldots,p$, − мультиіндекс довжини p, на q-му місці якого знаходиться N_n, вектор $\mathbf{y}$, $\mathbf{y} = (A_n^{r_1},\ldots,A_n^{r_p}) \in \mathbb{C}^p$, складений з коефіцієнтів A_n^s, які фігурують при найстарших похідних виразу $A_n(D_x)$, $j=1,\ldots,n$. Відомо [7, 8], що для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в $\mathbb{C}^p$) векторів $\mathbf{y}$ нерівність $|V(k)| \ge (1+|k|)^{-\delta}$ виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p$, якщо $\delta > (n-1)(p/2 - N_n)$

6. Рівномірні оцінки для характеристичного визначника на симплексі. У випадку, коли дійсні частини коренів многочлена (1) мають степеневу поведінку на нескінченності, можна встановити оцінки знизу для характеристичних визначників, які є сильнішими порівняно з оцінками із теорем 1, 2 і виконуються для всіх векторів із симплекса Π^n. Для цього використаємо таку лему.

Лема 4. *Якщо дійсні числа* $a_1,\ldots,a_n$, $b_1,\ldots,b_n$, $n\ge 2$, *є впорядкованими за зростанням*:

$$a_1 < \ldots < a_n, \qquad b_1 < \ldots < b_n,$$

то для довільної перестановки $(i_1,\ldots,i_n)\in S_n$, *відмінної від тотожної* $(1,\ldots,n)$, *виконується нерівність*

$$a_{i_1}b_1 + \ldots + a_{i_n}b_n < a_1b_1 + \ldots + a_nb_n\,.$$

Д о в е д е н н я. Використаємо метод математичної індукції за n, $n\ge 2$. Встановимо істинність леми для $n=2$. Нехай $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Тоді добуток $(a_1-a_2)(b_2-b_1)$ є додатним числом. Розкриваючи дужки, отримуємо

$$a_1b_2 + a_2b_1 - a_1b_1 - a_2b_2 < 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1b_2 + a_2b_1 < a_1b_1 + a_2b_2\,,$$

тобто базу індукції доведено, оскільки S_2 містить два елементи.

Припустимо, що твердження леми є істинним для заданого натурального $n=m$, $m\ge 2$. Доведемо лему для $n=m+1$. Для цього розглянемо числа $a_1,\ldots,a_m,a_{m+1}$, $b_1,\ldots,b_m,b_{m+1}$ такі, що

$$a_1 < \ldots < a_m < a_{m+1}, \qquad b_1 < \ldots < b_m < b_{m+1}\,,$$

і нетотожну перестановку $(i_1,\ldots,i_m,i_{m+1})\in S_{m+1}$. Можливими є такі два випадки: $i_{m+1} = m+1$, $i_{m+1} < m+1$. У першому випадку, коли $i_{m+1}=m+1$, перестановка $(i_1,\ldots,i_m)\in S_m$ є нетотожною і тоді нерівність

$$a_1b_1 + \ldots + a_mb_m + a_{m+1}b_{m+1} > a_{i_1}b_1 + \ldots + a_{i_m}b_m + a_{m+1}b_{m+1} =$$

$$= a_{i_1}b_1 + \ldots + a_{i_m}b_m + a_{i_{m+1}}b_{m+1}$$

виконується за припущенням індукції. У другому випадку, коли $i_{m+1} < m+1$, існує таке $q\in\{1,\ldots,m\}$, що $i_q = m+1$. Оскільки за умовою $a_{i_{m+1}} < a_{i_q} =$

$= a_{m+1}$, $b_q < b_{m+1}$, то згідно з базою індукції

$$a_{i_{m+1}} b_{m+1} + a_{i_q} b_q < a_{m+1} b_{m+1} + a_{i_{m+1}} b_q .$$

Таким чином,

$$a_{i_1} b_1 + \ldots + a_{i_m} b_m + a_{i_{m+1}} b_{m+1} < a_{i_{m+1}} b_q + \sum_{j=1, j\neq q}^{m} a_{i_j} b_j + a_{m+1} b_{m+1} . \tag{42}$$

Оскільки перестановка $(i_1, \ldots, i_{q-1}, i_{m+1}, i_{q+1}, \ldots, i_m)$ належить до S_m, то за припущенням індукції

$$a_{i_{m+1}} b_q + \sum_{j=1, j\neq q}^{m} a_{i_j} b_j < a_1 b_1 + \ldots + a_m b_m . \tag{43}$$

Із оцінок (42), (43) випливає істинність кроку індукції також і в цьому випадку. ♦

Зауваження 2. Для $n = 2$ твердження леми 4 має простий геометричний зміст. Нехай $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. У декартовій системі координат Oxy відкладемо точки $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(a_2, a_1)$. Точки A і B лежать вище від прямої $y = x$, а точка C − нижче. Нехай θ_1 − кут між прямими OA і прямою $y = x$, θ_2 − кут між прямою OB і прямою $y = x$, φ − кут між векторами $\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OB}$, ψ − кут між векторами $\overrightarrow{OC}$ і $\overrightarrow{OB}$. Для запроваджених кутів виконуються нерівності $0 < \theta_1$, $\theta_2 \le \pi/2$, $0 \le \varphi < \pi$, $0 \le \psi < \pi$. Оскільки точка C є симетричною до точки A відносно прямої $y = x$, то $\psi = \varphi + 2\min\{\theta_1, \theta_2\}$, тому кут φ є меншим, ніж кут ψ, а отже, $\cos\psi < \cos\varphi$, оскільки функція $y = \cos x$ спадає на проміжку $[0, \pi]$. Беручи до уваги, що $OA = OC$ з отриманої нерівності для косинусів одержимо

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = OC \cdot OB \cdot \cos\psi < OA \cdot OB \cdot \cos\varphi = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} .$$

Залишається врахувати, що $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OB} = a_2 b_1 + a_1 b_2$ і $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

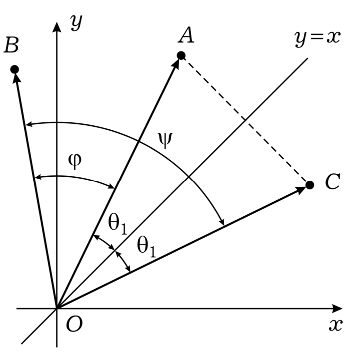

Рис. 1. $\psi = \varphi + 2\theta_1$.

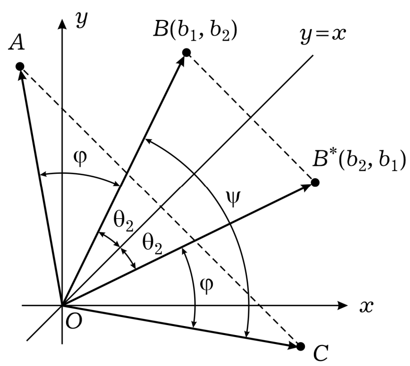

Рис. 2. $\psi = \varphi + 2\theta_2$.

Теорема 3. *Нехай для коренів многочлена* (1) *виконуються рівності*

$$\mathrm{Re}\,\lambda_j(k) = \mu_j |k|^{\gamma} + o(|k|^{\gamma}), \qquad |k| \to \infty, \qquad j = 1, \ldots, n, \qquad \gamma > 0 , \tag{44}$$

де $\mu_1 < \ldots < \mu_n$. *Тоді для всіх векторів* $\mathbf{t} \in \Pi^n$ *нерівність* (18) *виконується для всіх* (*крім скінченної кількості*) $k \in \mathbb{Z}^p$, *якщо* $g(k) = \frac{1}{2} \prod_{j=1}^{n} t_j^{\mathrm{Re}\,\lambda_j(k)}$.

Д о в е д е н н я. Запишемо розвинення для визначника $\Delta_n(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, у вигляді суми $n!$ доданків:

$$\Delta_n(k) = \sum_{\omega=(i_1,\dots,i_n)\in S_n} (-1)^{\operatorname{inv}\omega} t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \dots t_n^{\lambda_{i_n}(k)}, \tag{45}$$

де $\operatorname{inv}\omega$ − кількість інверсій у перестановці $\omega = (i_1,\dots,i_n)$. Оскільки

$$\left| t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \dots t_n^{\lambda_{i_n}(k)} \right| = \exp\left(\operatorname{Re}\lambda_{i_1}(k)\ln t_1 + \dots + \operatorname{Re}\lambda_{i_n}(k)\ln t_n\right),$$

то з рівностей (44) одержимо

$$\left| t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \dots t_n^{\lambda_{i_n}(k)} \right| = \exp\left((\mu_{i_1}\ln t_1 + \dots + \mu_{i_n}\ln t_n + \beta_\omega(k))|k|^\gamma\right), \tag{46}$$

де $\beta_\omega(k)$, $\omega \in S_n$, − нескінченно малі послідовності при $|k| \to \infty$. Позначимо

$$\delta = \max\{\mu_{i_1}\ln t_1 + \dots + \mu_{i_n}\ln t_n : \omega = (i_1,\dots,i_n) \in S_{n,0}\},$$

де $S_{n,0} \setminus \{\omega_0\}$, $\omega_0 = (1,\dots,n)$. Тоді з рівностей (46) отримуємо оцінки

$$\left| t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \dots t_n^{\lambda_{i_n}(k)} \right| \le \exp\left((\delta + \beta_\omega(k))|k|^\gamma\right), \qquad \omega = (i_1,\dots,i_n) \in S_{n,0},$$

$$\left| \frac{t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \dots t_n^{\lambda_{i_n}(k)}}{t_1^{\lambda_1(k)} \dots t_n^{\lambda_n(k)}} \right| \le \frac{\exp\left((\delta + \beta_\omega(k))|k|^\gamma\right)}{\exp\left((\mu_1\ln t_1 + \dots + \mu_n\ln t_n + \beta_{\omega_0}(k))|k|^\gamma\right)},$$

$$\omega \in S_{n,0}. \tag{47}$$

За умовою теореми $\mu_1 < \dots < \mu_n$, $\ln t_1 < \dots < \ln t_n$, тому з леми 4 випливає, що $\delta < \mu_1\ln t_1 + \dots + \mu_n\ln t_n$. Звідси, враховуючи, що $\gamma > 0$, одержимо

$$\lim_{|k|\to\infty} \left| \frac{t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \dots t_n^{\lambda_{i_n}(k)}}{t_1^{\lambda_1(k)} \dots t_n^{\lambda_n(k)}} \right| = 0, \qquad \omega = (i_1,\dots,i_n) \in S_{n,0}.$$

Таким чином, існує $K > 0$, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K$, виконується оцінка

$$\left| \frac{t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \dots t_n^{\lambda_{i_n}(k)}}{t_1^{\lambda_1(k)} \dots t_n^{\lambda_n(k)}} \right| \le \frac{1}{2(n!-1)}, \qquad \omega = (i_1,\dots,i_n) \in S_{n,0}.$$

Тоді з розвинення (45) та нерівності трикутника випливає, що для всіх векторів $\mathbf{t} \in \Pi^n$ виконується оцінка знизу

$$|\Delta_n(k)| = \left| t_1^{\lambda_1(k)} \dots t_n^{\lambda_n(k)} \right| \cdot \left| 1 + \sum_{\omega=(i_1,\dots,i_n)\in S_{n,0}} (-1)^{\operatorname{inv}\omega} \frac{t_1^{\lambda_{i_1}(k)} \dots t_n^{\lambda_{i_n}(k)}}{t_1^{\lambda_1(k)} \dots t_n^{\lambda_n(k)}} \right| \ge$$

$$\ge \left| t_1^{\lambda_1(k)} \dots t_n^{\lambda_n(k)} \right| \cdot \left(1 - \frac{n!-1}{2(n!-1)} \right) = \frac{1}{2} t_1^{\operatorname{Re}\lambda_1(k)} \dots t_n^{\operatorname{Re}\lambda_n(k)},$$

якщо $|k| > K$. Теорему доведено. ♦

Зауваження 3. Із розвинення (45) і формул (47) випливає, що для всіх векторів $\mathbf{t} \in \Pi^n$ виконується така оцінка зверху:

$$|\Delta_n(k)| \le \left| t_1^{\lambda_1(k)} \dots t_n^{\lambda_n(k)} \right| \cdot \left| 1 + \frac{n!-1}{2(n!-1)} \right| = \frac{3}{2} t_1^{\operatorname{Re}\lambda_1(k)} \dots t_n^{\operatorname{Re}\lambda_n(k)}, \quad |k| > K. \tag{48}$$

Оцінка (48) підтверджує точність оцінки знизу в теоремі 3.

Висновки. У роботі встановлено метричні оцінки знизу характеристичного визначника багатоточкової задачі з простими вузлами інтерполяції для лінійного рівняння типу Ейлера зі змінними коефіцієнтами. Застосовано метричний підхід [9, 10, 11] для встановлення таких оцінок. Розглянуто часткові випадки задачі, коли вузли інтерполяції утворюють геометричну прогресію або корені характеристичного полінома мають певну поведінку на нескінченності. Результати роботи можна перенести на випадок інтерполяційної задачі Ніколетті для лінійних рівнянь із частинними похідними типу Ейлера.

1. *Берник В. И., Мельничук Ю. В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.
2. *Берник В. И., Пташник Б. И., Сальга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637–645.
3. *Бобик О. І., Боднарчук П. І., Пташник Б. Й., Скоробогатько В. Я.* Елементи якісної теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 1972. – 175 с.
4. *Ільків В. С.* Аналоги леми Пяртлі із абсолютними константами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 68–74.
5. *Ільків В. С., Магеровська Т. В.* Про константу в лемі Пяртлі // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2007. – № 601. – С. 12–17.
6. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
7. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
8. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 241–254.
9. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М.* Багатоточкова задача з кратними вузлами для диеренціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 3. – С. 400–413.
10. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения: В 2 т. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1953. – Т. 1. – 346 с.
11. *Симотюк М. М.* Багатоточкова задача для псевдодиференціальних рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 2. – С. 26–41.
12. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. – Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.
13. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – Москва: Наука, 1978. – 112 с.
14. *De la Vallée-Poussin C.* Sur l'equation differentielle lineaire du second ordre. Determination d'une integrale par deux valeurs assignees. Extension aux equations d'ordre *n* // J. Math. Pures Appl. – 1929. – Ser. 9, Tom 8. – P. 125–144.

METRIC ESTIMATES OF THE CHARACTERISTIC DETERMINANT OF THE MULTIPOINT PROBLEM FOR THE EULER-TYPE EQUATION

The estimates from below are established for the characteristic determinant of the problem with multipoint conditions on a single variable with simple interpolation nodes and periodicity conditions on the remaining variables for an Euler-type partial differential equation. Partial cases are considered when the interpolation nodes form a geometric progression or the real parts of the roots of the characteristic equation have power behavior at infinity.

Key words: *multipoint problem, Euler-type equation, metric approach, problem of small denominators.*

[1] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,
[2] Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано 15.02.22