УДК 512.53+512.58

В. М. Бондаренко[1,2✉], О. В. Зубарук[1,2]

Σ -ФУНКЦІЇ КАТЕГОРІЙ МАТРИЧНИХ ЗОБРАЖЕНЬ НІЛЬПОТЕНТНИХ НАПІВГРУП

Досліджуються категорії матричних зображень нільпотентних напівгруп над довільним полем. Основна увага приділяється матричним алгебрам Ауслендера як одній із форм задання категорій зображень, що мають скінченне число класів еквівалентності нерозкладних об'єктів, і їхнім дискретним характеристикам. Поняття алгебри Ауслендера узагальнюється на категорії зображень без додаткових умов. Для довільної нільпотентної циклічної напівгрупи описано її алгебру Ауслендера та обчислено її Σ -функцію.

***Ключові слова*:** *нільпотентна напівгрупа, циклічна напівгрупа, ідеал, матричне зображення, пряма сума, клітка Жордана, еквівалентність, категорія, скелет і хребет категорії, алгебра Ауслендера, Σ -функція.*

Вступ. Математика, і особливо сучасна, вивчає не лише ті чи інші об'єкти, а й зв'язки між ними. Яскравим прикладом такої тенденції є виникнення теорії категорій та її широке розповсюдження в різних галузях науки. Якщо говорити про теорію зображень алгебраїчних об'єктів (на мові відображень скінченновимірних векторних просторів чи матричній мові), то на першому етапі розвитку основними були проблеми, пов'язані з описом зображень. Багато результатів про нормальні й канонічні форми зображень добре відомі і навіть стали класичними. Зокрема, це стосується матриць як у класичній, так і в сучасній лінійній алгебрі (наприклад, див. [1–7, 10–13, 15, 17–20, 26, 27, 30, 31, 35, 37]). З часом категорний метод дослідження зображень став одним із основних, а задачі, безпосередньо пов'язані з описом зображень, у працях часто відходять на другий план або й зовсім не розглядаються (зокрема, див. [21–25, 28, 29, 32–34, 36]).

У цій статті вивчаються категорні властивості матричних зображень нільпотентних напівгруп над довільним полем. Основні поняття детально аналізуються та підтверджуються прикладами. Особлива увага приділяється опису алгебр Ауслендера як однієї із форм задання категорій зображень і обчисленню відповідних Σ -функцій.

1. Матричні зображення напівгруп. *Матричним зображенням напівгрупи S розмірності $n \in \mathbb{N}$ над полем K* називається довільний гомоморфізм $T : a \to T(a)$ напівгрупи S у напівгрупу $M_n^{\circ}(K)$ (відносно множення) всіх матриць розміру $n \times n$ із елементами з поля K. Якщо напівгрупа задана твірними та визначальними співвідношеннями, то матричне зображення однозначно задається набором матриць, що відповідають твірним, і відповідними співвідношеннями між цими матрицями. Надалі такий набір матриць будемо ототожнювати із самим зображенням.

Еквівалентність матричних зображень T і T' напівгрупи S означає існування оборотної матриці C такої, що $T(a) = CT'(a)C^{-1}$ для всіх $a \in S$.

Прямою сумою матричних зображень T і T' напівгрупи S називається зображення $T \oplus T'$, де

$$T \oplus T'(a) = T(a) \oplus T'(a) = \begin{pmatrix} T(a) & 0 \\ 0 & T'(a) \end{pmatrix}$$

для будь-якого $a \in S$.

Зображення T напівгрупи S називається *розкладним*, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох зображень, і *нерозкладним* − в іншому разі.

✉ vitalij.bond@gmail.com

Перейдемо до категорної точки зору. З основними поняттями та ідеями загальної теорії категорій можна ознайомитися в монографії С. Маклейна [16].

Матричні зображення напівгрупи S над полем K утворюють категорію, яку позначаємо через $\mathrm{Rep}_K(S)$ або, скорочено, через $\mathrm{Rep}(S)$ (коли зрозуміло, про яке поле йде мова). Її об'єктами є всі зображення, а множина морфізмів $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(S)}(T,T')$ із об'єкта T розмірності n в об'єкт T' розмірності m складається з усіх матриць $X=(x_{ij})$ розміру $n\times m$ таких, що $T(a)X = XT'(a)$ для кожного $a \in S$. Очевидно, що множини морфізмів є векторними просторами над полем K. Оскільки всі рівності вигляду $T(a)X =$ $= XT'(a)$ утворюють у сукупності лінійну однорідну систему рівнянь відносно x_{ij}, то маємо таке твердження.

Лема 1. *Якщо множина морфізмів* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(S)}(T,T')$ *має розмірність* d*, то її можна розглядати як параметричну матрицю* $X=(x_{ij})$ *з* d *вільними параметрами* $x_{i_1 j_1},\ldots,x_{i_d j_d}$*, всі інші елементи якої лінійно виражені через них.*

Така параметрична матриця X визначається множиною морфізмів $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(S)}(T,T')$ неоднозначно (в сенсі вибору вільних параметрів і подальших співвідношень між x_{ij}), але, якщо вона зафіксована, то позначаємо її через $X(T,T')$ і ототожнюємо з $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(S)}(T,T')$.

Для категорії $\mathrm{Rep}_K(S)$ виконується теорема Крулля – Шмідта [16, 22], тобто кожне зображення розкладається у (скінченну) пряму суму нерозкладних зображень, до того ж однозначно з точністю до еквівалентності та перестановки прямих доданків.

Зауваження 1. Оскільки напівгрупа необов'язково має одиничний чи нульовий елемент, то у випадку, коли такий елемент існує, із загального означення матричного зображення не випливає, що йому відповідає відповідно одинична або нульова матриця. Але природно вимагати, щоб ці умови виконувались, що, по суті, не обмежує загальності (більш точно, в кожному випадку з усіх нерозкладних зображень втрачається лише одне розмірності 1, а саме: при існуванні одиничного елемента – зображення, яке складається лише з нульових матриць, а при існуванні нульового елемента – зображення, яке складається лише з одиничних матриць). Надалі притримуємося цієї природної точки зору. При цьому елемент напівгрупи порядку 1 вважаємо нульовим і не вважаємо одиничним.

Зауваження 2. Щоб категорія $\mathrm{Rep}_K(S)$, була «хорошою» (якщо говорити точно, абелевою), потрібно додати (єдине) зображення розмірності нуль, яке буде нульовим об'єктом категорії, тобто, якщо його позначити через 0, тоді $T\oplus 0 = 0\oplus T = T$ для будь-якого зображення T (зокрема, $0\oplus 0 = 0$). Такий об'єкт вважається розкладним і у наведених вище означеннях нерозкладного і розкладного зображень участі не бере. Згідно з *зауваженням 1,* напівгрупа, що складається з одного елемента (а він формально є і нульовим, і одиничним), має лише одне зображення, а саме 0. Дослідження, які проводимо у цій статті, не вимагають такого трактування категорії зображень.

Повну підкатегорію категорії $\mathrm{Rep}_K(S)$, що складається з вибраних представників усіх класів еквівалентності, називають *скелетом*, а лише з усіх класів еквівалентності нерозкладних зображень – *хребтом.* Позначаємо їх відповідно через $\mathrm{R}_K(S)$ і $\mathrm{Sp}_K(S)$. Згідно з наведеними означеннями, категорії $\mathrm{Rep}_K(S)$ і $\mathrm{R}_K(S)$ є еквівалентними. Якщо хребет категорії зафіксовано, то найбільш природними є скелети, об'єкти яких є прямими сумами об'єктів хребта. Хребет категорії $\mathrm{Rep}_K(S)$ називаємо *скінченним* (відповідно *нескінченним*), якщо скінченним (відповідно нескінченним) є число його об'єктів.

Важливість цих означень полягає в тому, що при дослідженні категорії зображень її можна замінити скелетом − більш простою еквівалентною їй категорією. А оскільки довільний морфізм між прямими сумами зображень однозначно визначається сім'єю морфізмів між їхніми доданками, то в багатьох випадках достатньо обмежитися навіть категорією $\mathrm{Sp}_K(S)$. Саме на цьому шляху виникає поняття алгебри Аусдендера як алгебри ендоморфізмів прямої суми всіх об'єктів хребта. Вона (з точністю до ізоморфізму) не залежить від вибору хребта і є однією з форм задання всієї категорії зображень.

Наведемо приклади напівгруп зі скінченним і нескінченним хребтом їхніх категорій матричних зображень.

Приклад 1. Нехай $S_1^{(m)}$ − циклічна напівгрупа, породжена елементом a таким, що $a^m = 0$, $m \in \mathbb{N}$. Розглядаючи матричні зображення цієї напівгрупи, вважаємо (див. *зауваження 1*), що нульовому елементу відповідає нульова матриця. Тоді її матричне зображення задається матрицею A такою, що $A^m = 0$. Згідно з теоремою лінійної алгебри про нормальну форму однієї матриці відносно перетворень подібності за об'єкти хребта категорії $\mathrm{Rep}_K(S_1^{(m)})$ природно взяти клітки Жордана $J_s = J_s(0)$ розміру $s \times s$, $s = 1, \ldots, m$, із власним числом 0. Отже, хребет є скінченним. ◄

Приклад 2. Введемо такі позначення: E_s − одинична матриця розміру $s \times s$, $J_s(a)$ − клітка Жордана розміру $s \times s$ з власним числом a (записана як верхньотрикутна матриця).

Нехай S_2 − напівгрупа з нулем, породжена елементами b і c з визначальними співвідношеннями $b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $bc = cb = 0$.

Матричні зображення

$$b \to \begin{pmatrix} 0 & E_s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c \to \begin{pmatrix} 0 & J_s(a) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad s \geq 1, \qquad a \in K,$$

нерозкладні і попарно нееквівалентні, а отже, будь-який хребет категорії $\mathrm{Rep}_K(S_2)$ є нескінченним. ◄

Зауважимо, що у випадку нескінченного поля вказані зображення показують, що існує нескінченне число розмірностей, у кожній з яких є нескінченне (з точністю до еквівалентності) число нерозкладних зображень. Це стандартна ситуація для матричних зображень [18].

Задачу про класифікацію всіх нерозкладних зображень напівгрупи S_2 вперше розв'язано (на мові зображень груп) у роботі [1] для алгебраїчно замкненого поля характеристики 2. У загальному випадку ідея доведення аналогічна (див., наприклад, [9]).

2. Алгебра Ауслендера. Як і раніше, матричні зображення розглядаємо над полем K, яке, для простоти, в різних позначеннях як нижній індекс часто опускаємо. Запис $\mathrm{Sp}(S) = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ означатиме, що множина об'єктів категорії $\mathrm{Sp}(S)$ складається із зображень $T_1, T_2, \ldots, T_m$, а запис $T_i \in \mathrm{Sp}(S)$ − що T_i є об'єктом категорії $\mathrm{Sp}(S)$.

Нехай S – напівгрупа скінченного зображувального типу (тобто число класів еквівалентності нерозкладних зображень є скінченним). Зафіксуємо хребет $\mathrm{Sp}(S) = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ категорії $\mathrm{Rep}(S)$ і покладемо $T_0 = T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_m$. *Матричною алгеброю* (або просто *алгеброю*) *Ауслендера* $\mathrm{Aus}_K(S)$ напівгрупи S над полем K називається алгебра (з одиницею) $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}(S)} T_0 := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(S)}(T_0, T_0)$. Вона не залежить від вибору хребта та нумерації його об'єктів у тому сенсі, що відповідні алгебри Ауслендера будуть ізоморфними (і навіть спряженими в повній матричній алгебрі $M_n(K)$, де n – сума розмірностей матричних зображень $T_1, T_2, \ldots, T_m$).

Приклад 3. Нехай $S_1^{(2)}$ – циклічна напівгрупа, породжена елементом a таким, що $a^2 = 0$. За об'єкти хребта категорії $\mathrm{Rep}_K(S_1^{(2)})$ виберемо такі два зображення (див. *приклад 1*):

1) $T_1 : a \to 0$;

2) $T_2 : a \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді

$$T_0 = T_1 \oplus T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

і матрична алгебра Ауслендера складається з матриць вигляду

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{22} \end{pmatrix},$$

де x_{11}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} пробігають поле K. ◄

Приклад 4. Нехай S_3 – напівгрупа з нулем, породжена елементами a, b такими, що $a^2 = a$, $b^2 = b$, $ab = 0$. Її матричне зображення задається матрицями A, B такими, що $A^2 = A$, $B^2 = B$, $AB = 0$. Згідно з [8], за об'єкти хребта категорії $\mathrm{Rep}_K(S_3)$ можна вибрати такі чотири зображення:

1) $T_1 : a \to 0, \quad b \to 0$;

2) $T_2 : a \to 0, \quad b \to 1$;

3) $T_3 : a \to 1, \quad b \to 0$;

4) $T_4 : a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Тоді $T_0 = T_1 \oplus T_2 \oplus T_3 \oplus T_4$, тобто

$$T_0(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_0(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

і алгебра Ауслендера складається, як доведено в [14], з матриць вигляду

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix}. \qquad \blacktriangleleft$$

Матриці, які задають алгебру Ауслендера, можна обчислювати не лише, користуючись безпосередньо означенням, а й поблочно. Розглянемо цей спосіб більш детально. Для простоти нижній індекс $\mathrm{Rep}(S)$ при Hom будемо опускати.

Якщо означення алгебри Ауслендера $\mathrm{Aus}(S) = \mathrm{Hom}(T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_m, T_1 \oplus T_2 \oplus \ldots \oplus T_m)$ запишемо в розгорнутому вигляді, то вона складається з усіх блочних матриць $X = (X_{ij})$ (над K) таких, що розмір блока X_{ij} дорівнює $\dim T_i \times \dim T_j$, $1 \le i, j \le m$, і виконується рівність

$$\begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mm} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_m \end{pmatrix}.$$

Якщо множення матриць здійснювати поблочно, то ця матрична рівність еквівалентна системі матричних рівностей $T_i X_{ij} = X_{ij} T_j$, де i, j пробігають множину $\{1, 2, \ldots, m\}$, а значить,

$$\mathrm{Aus}_K(S) = \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}(T_1, T_1) & \mathrm{Hom}(T_1, T_2) & \cdots & \mathrm{Hom}(T_1, T_m) \\ \mathrm{Hom}(T_2, T_1) & \mathrm{Hom}(T_2, T_2) & \cdots & \mathrm{Hom}(T_2, T_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{Hom}(T_m, T_1) & \mathrm{Hom}(T_m, T_2) & \cdots & \mathrm{Hom}(T_m, T_m) \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Цю рівність можемо трактувати або як рівність алгебр

$$\mathrm{Aus}_K(S) = \left\{ \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1m} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_{m1} & H_{m2} & \cdots & H_{mm} \end{pmatrix} \right\}, \qquad (2)$$

де H_{ij} пробігає $\mathrm{Hom}(T_i, T_j)$ для всіх $i, j = 1, \ldots, m$, або (див. лему 1) як рівність

$$\mathrm{Aus}_K(S) = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1m} \\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & X_{m2} & \cdots & X_{mm} \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

де $X_{ij} := X(T_i, T_j)$.

Вказаний поблочний спосіб обчислення алгебри Ауслендера є особливо ефективним тоді, коли хребет містить складні зображення або їх багато. Саме так обчислюється алгебра Ауслендера при доведенні одного з основних результатів цієї статті (див. теорему 3).

Покладемо

$$D_K(S) = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1} & d_{m2} & \cdots & d_{mm} \end{pmatrix}, \qquad (4)$$

де d_{ij} – розмірність векторного простору $\mathrm{Hom}(T_i, T_j)$, якщо виходити з формули (2), і число вільних параметрів матриці $X(T_i, T_j)$, якщо виходити з формули (3).

Нескінченну матрицю зі скінченним числом ненульових елементів у будь-якому рядку і будь-якому стовпці назвемо rc -*скінченною*. Якщо в означенні зображення напівгрупи S дозволяти і нескінченні rc -скінченні матриці, то рівності $T(a)X = XT'(a)$, $a \in S$, завжди мають сенс, а добуток морфізмів має сенс, коли як морфізми також дозволяти лише rc -скінченні матриці. Наведені міркування показують, що для категорії зображень скінченної розмірності $\mathrm{Rep}_K(S)$ можна говорити про алгебру Ауслендера також і у випадку нескінченного хребта. А саме, тоді зображення T_0 нескінченної розмірності складається з rc -скінченних матриць $T_0(a)$, $a \in S$, і за її елементи візьмемо всі rc -скінченні матриці X такі, що $T_0(a)X = XT_0(a)$ для будь-якого $a \in S$.

Якщо врахувати, що множина ендоморфізмів будь-якого об'єкта категорії $\mathrm{Rep}_K(S)$ є ненульовою (оскільки має скалярний ендоморфізм), то зі сказаного випливає таке твердження (як у випадку скінченного, так і нескінченного хребта).

Твердження 1.

$$\sum\nolimits_{T_i, T_j \in \mathrm{Sp}_K(S)} \dim_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_K(S)}(T_i, T_j) = \dim_K \mathrm{Aus}_K(S) \geq |\mathrm{Sp}_K(S)|.$$

Алгебри Ауслендера дозволяють більш наглядно зрозуміти зв'язок між прямими сумами та їхніми алгебрами ендоморфізмів і внутрішньою структурою підалгебр.

Зокрема, як наслідок того факту, що функтор вкладення є адитивним, є наступне твердження [16].

Твердження 2. *Нехай S – напівгрупа така, що її категорія зображень $\mathrm{Rep}_K(S)$ має скінченний хребет $\mathrm{Sp}_K(S) = \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$. Зафіксуємо послідовність натуральних чисел $\boldsymbol{I} = (i_1, i_2, \ldots, i_s)$, $1 \leq s < m$, таку, що $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq m$, і позначимо через T_I пряму суму зображень T_{i_1}, $T_{i_2}, \ldots, T_{i_s}$. Тоді $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_K(S)}(T_I)$ – підалгебра алгебри Ауслендера $\mathrm{Aus}_K(S)$.*

Практичну реалізацію такої відповідності пояснює таке твердження, сформульоване в більш загальній ситуації.

Твердження 3. *Нехай $T_1, T_2, \ldots, T_m$, $m > 1$, – довільні матричні зображення напівгрупи S над полем K і T – їхня пряма сума. Зафіксуємо послідовність натуральних чисел $\boldsymbol{I} = (i_1, i_2, \ldots, i_s)$, $1 \leq s < m$, таку, що $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_s \leq m$, і позначимо через T_I пряму суму зображень T_{i_1}, $T_{i_2}, \ldots, T_{i_s}$. Параметричні матриці, які задають $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}(S)}(T)$ і $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}(S)}(T_I)$, будемо вважати, як і матриці зображень T та T_I, блочними (розміри блоків визначаються розмірностями зображень $T_1, T_2, \ldots, T_m$). Тоді $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}(S)}(T_I)$ – блочна підматриця матриці $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}(S)}(T)$, яка розміщена на перетині горизонтальних і вертикальних смуг із номерами з послідовності $\boldsymbol{I}$.*

3. Σ-функція (означення і приклади). Інтервал $[p,q]$, де p і $q \geq p$ – натуральні числа, завжди вважатимемо цілочисловим, тобто $[p,q] :=$ $:= \{p, p+1, \ldots, q\}$.

Нехай $T : a \to T(a)$, $a \in S$, – матричне зображення над полем K напівгрупи S. Позначимо через $d(T)$ максимальне число вільних параметрів однорідної системи лінійних рівнянь $T(a)X = XT(a)$, де a пробігає S, відносно елементів матриці X, яке, згідно з лемою 1, дорівнює розмірності алгебри ендоморфізмів $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}(S)}(T)$. Підкреслимо, що $d(T)$ не змінюється при заміні T на еквівалентне йому зображення. Якщо тепер S – напівгрупа скінченного зображувального типу над K (тобто, за означенням, має скінченне число класів еквівалентності нерозкладних зображень), а $T =$ $= \{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$ – хребет її категорії зображень $\mathrm{Rep}_K(S)$, то для $n \in [1,m]$ покладемо

$$d_n(T) := \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_n} d\left(T_{i_1} \oplus T_{i_2} \oplus \ldots \oplus T_{i_n}\right), \qquad \Sigma_{S,K}(n) := d_n(T).$$

Введена функція $\Sigma_{S,K} : [1,m] \to \mathbb{N}$ називається Σ*-функцією категорії* $\mathrm{Rep}_K(S)$ або Σ*-функцією напівгрупи* S *над* K [8].

Обчислення Σ-функції можна спростити, якщо категорію зображень розглядати в формі алгебри Ауслендера і скористатися твердженням 3. У наступних двох прикладах воно використовується таким чином. Спочатку обчислюємо матричну алгебру Ауслендера (як параметричну матрицю), а потім розглядаємо її головні підматриці. Для простоти нижній індекс у виразах $\mathrm{End}_{\mathrm{Rep}(S)}$ і $\dim_K$ опускаємо.

Приклад 5. Для напівгрупи $S = S_1^{(2)}$, алгебра Ауслендера якої задається параметричною матрицею

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ 0 & 0 & x_{22} \end{pmatrix}$$

(див. *приклад 3*), маємо

$$\Sigma_{S,K}(n) = \begin{cases} 3, & n = 1, \\ 5, & n = 2. \end{cases}$$

Дійсно, $\Sigma_{S,K}(2) = \dim \mathrm{Aus}_K(S) = 5$ і, згідно з твердженням 3,

$$(x_{11}) = \mathrm{End}\,(T_1),$$

$$\begin{pmatrix} x_{22} & x_{23} \\ 0 & x_{22} \end{pmatrix} = \mathrm{End}\,(T_2),$$

а значить, $\Sigma_{S,K}(1) = 3$. ◄

Приклад 6. Для напівгрупи $S = S^3$, алгебра Ауслендера якої задається параметричною матрицею

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_{33} & x_{34} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ 0 & x_{52} & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix}$$

(див. *приклад 4*), маємо таку формулу [8]:

$$\Sigma_{S,K}(n) = \begin{cases} 4, & n = 1, \\ 14, & n = 2, \\ 16 & n = 3, \\ 6, & n = 4. \end{cases}$$

Очевидно, що $\Sigma_{S,K}(4) = \dim \mathrm{Aus}_K(S) = 6$. Тому, використовуючи твердження 3, маємо:

– $\dim \mathrm{End}(T_1) = \dim \mathrm{End}(T_2) = \dim \mathrm{End}(T_3) = 1$, $\dim \mathrm{End}(T_4) = 2$,
  а значить, $\Sigma_{S,K}(1) = 4$;

– $\dim \mathrm{End}(T_1 \oplus T_2) = \dim \mathrm{End}(T_1 \oplus T_3) = \dim \mathrm{End}(T_1 \oplus T_4) =$
  $= \dim \mathrm{End}(T_2 \oplus T_3) = 2$, $\dim \mathrm{End}(T_2 \oplus T_4) = \dim \mathrm{End}(T_3 \oplus T_4) = 3$,
  а значить, $\Sigma_{S,K}(2) = 14$;

– $\dim \mathrm{End}(T_1 \oplus T_2 \oplus T_3) = 3$, $\dim \mathrm{End}(T_1 \oplus T_2 \oplus T_4) =$
  $= \dim \mathrm{End}(T_1 \oplus T_3 \oplus T_4) = 4$, $\dim \mathrm{End}(T_2 \oplus T_3 \oplus T_4) = 5$,
  а значить, $\Sigma_{S,K}(3) = 16$. ◄

У випадку нескінченного хребта означення Σ-функції $\Sigma_{S,K} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ формулюємо аналогічним чином.

Зі сказаного вище для довільної напівгрупи S випливають такі твердження, які роблять зрозумілими записи $\Sigma_{S,K} \neq \infty$ і $\Sigma_{S,K} = \infty$:

(i) якщо хребет категорії $\mathrm{Rep}_K(S)$ є скінченним і складається з m об'єктів, то $\Sigma_{S,K}(n) \in \mathbb{N}$ для кожного $n \in [1, m]$;

(ii) якщо хребет категорії $\mathrm{Rep}_K(S)$ є нескінченним, то $\Sigma_{S,K}(n) = \infty$ для кожного $n \in \mathbb{N}$.

4. Загальна теорема про Σ-функції. Якщо алгебру Ауслендера обчислено поблочним способом (див. рівності (1)–(3)), то при дослідженні Σ-функцій зручно користуватися матрицею, заданою рівністю (4). Саме такий метод застосовуємо в цьому параграфі.

Для цілочислової квадратної матриці $Q = (q_{ij})$ через Q^{Σ} позначимо суму всіх її елементів, а через Q_0 – її головну діагональ, тобто $Q_0 = (q'_{ij})$, де $q'_{ij} = \begin{cases} q_{ij}, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ Далі, у випадку, коли матриця Q має розмір $m \times m$, позначимо через $M_n(Q)$, $1 \leq n \leq m$, множину всіх її головних підматриць розміру $n \times n$.

Теорема 1. *Нехай S – напівгрупа, категорія зображень якої над полем K має скінченний хребет, і нехай $D := D_K(S)$. Тоді*

$$\Sigma_{S,K}(1) = D_0^{\Sigma},$$

$$\Sigma_{S,K}(n) = (C_{m-1}^{n-1} - C_{m-2}^{n-2})D_0^{\Sigma} + C_{m-2}^{n-2}D^{\Sigma} \qquad \text{для} \qquad n \in [2, m-1],$$

$$\Sigma_{S,K}(m) = D^{\Sigma}.$$

Д о в е д е н н я будемо проводити в термінах матриці D. За означенням матриці D (з урахуванням тверджень 2 і 3), $\Sigma_{S,K}(n)$ дорівнює $\Sigma^{(n)} := \Sigma_{M \in M_n} M^{\Sigma}$. Зокрема, $\Sigma_{S,K}(m) = D^{\Sigma}$, $\Sigma_{S,K}(1) = D_0^{\Sigma}$.

Нехай тепер $m > 2$ і $n \in [2, m-1]$. Очевидно, що елемент $d_{ij} \neq 0$ матриці D входить у $\sum^{(n)}$ стільки разів, скільки існує головних підматриць розміру $n \times n$ матриці D, які його містять, тобто C_{m-1}^{n-1} разів, якщо $i = j$, і C_{m-2}^{n-2} разів, якщо $i \neq j$. Значить, число $\Sigma_{K,S}(n) = \sum^{(n)}$ дорівнює сумі всіх діагональних елементів матриці D, помноженій на C_{m-1}^{n-1}, доданій до суми всіх недіагональних елементів, помноженій на C_{m-2}^{n-2}, або ж, в еквівалентній формі, сумі всіх елементів матриці D, помноженій на C_{m-2}^{n-2}, доданій до суми всіх діагональних елементів, помноженій на $C_{m-1}^{n-1} - C_{m-2}^{n-2}$. Теорему доведено. ♦

5. Основні результати про нільпотентні напівгрупи. Напівгрупа називається нільпотентною, якщо добуток довільних її m елементів дорівнює нулю для деякого фіксованого натурального числа m.

Теорема 2. *Нехай S − нільпотентна напівгрупа і K − довільне поле. Тоді такі умови є еквівалентними:*

1°) *хребет категорії $\mathrm{Rep}_K(S)$ скінченний;*

2°) *напівгрупа S − циклічна*;

3°) $\Sigma_{S,K} \neq \infty$.

Д о в е д е н н я. *Імплікація **2**°) $\Rightarrow$ **1**°).* Нехай S − циклічна напівгрупа, породжена елементом a. Тоді елемент a є нільпотентним, і якщо m − степінь його нільпотентності, то, за теоремою лінійної алгебри про нормальну форму однієї матриці відносно перетворень подібності клітками Жордана розміру $i \times i$, $1 \leq i < m$, з власним числом 0 вичерпуються, з точністю до еквівалентності, всі нерозкладні зображення напівгрупи S.

*Імплікація **3**°) $\Rightarrow$ **2**°).* Нехай умова **3**°) виконується, а умова **2**°) − ні. Тоді фактор-напівгрупа $\overline{S} = S/S_2$ за ідеалом, породженим усіма елементами x^2, ізоморфна напівгрупі з множиною твірних a_i, $i \in I$, де $|I| > 1$ (зокрема, може бути ∞), і визначальними співвідношеннями $a_i a_j = 0$ для довільних $i, j \in I$. У свою чергу, фактор-напівгрупа напівгрупи $\overline{S}$ за ідеалом, породженим усіма твірними a_i при $i > 2$, ізоморфна напівгрупі, що розглянута в *прикладі 2*, яка має нескінченний хребет. Тоді нескінченний хребет має також і напівгрупа S, а значить, $\Sigma_{S,K} = \infty$ (див. твердження ***(ii)*** в кінці параграфа 3). Прийшли до протиріччя.

Отже, напівгрупа S є циклічною.

*Імплікація **1**°) $\Rightarrow$ **3**°)* випливає з означень (див. твердження ***(i)*** в кінці параграфа 3).

Теорему 2 доведено. ♦

Теорема 3. *Нехай S − нільпотентна напівгрупа порядку $1 \leq m < \infty$, категорія зображень $\mathrm{Rep}_K(S)$ якої має скінченний хребет $\mathrm{Sp}_K(S)$. Тоді $|\mathrm{Sp}_K(S)| = m$, і для підалгебри $\Lambda = \mathrm{End}_{\mathrm{Rep}_K(S)}(T_I)$ алгебри Аусслендера $\mathrm{Aus}_K(S)$ (див. твердження* 2*) маємо*

$$\dim_K \Lambda = \sum_{s=1}^{n} i_s (2n - 2s + 1), \qquad (5)$$

зокрема,

$$\dim_K \mathrm{Aus}_K(S) = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}. \qquad (6)$$

Д о в е д е н н я. Згідно з теоремою 2, напівгрупа S є циклічною. Нехай a − її твірний елемент. Оскільки $|S| = m$, то $a^m = 0$. Обчислимо її алгебру Ауслендера $\mathrm{Aus}_K(S)$. За об'єкти хребта категорії $\mathrm{Rep}_K(S)$ візьмемо (верхньотрикутні) клітки Жордана J_s розміру $s \times s$ з власним числом 0, де $s = 1, 2, \ldots, m$ (див. *приклад 1*), або, якщо говорити більш формально, зображення $\overline{J}_s : a \to J_s$. У *прикладі 3* алгебру $\mathrm{Aus}_K(S)$ обчислено для часткового випадку $m = 2$ лише з використанням означення. У загальному випадку застосуємо поблочний метод обчислення (див. параграф 2).

Введемо деякі позначення для матриць над полем K. Позначимо через $\Delta_K^{=}(p)$, де $p \in \mathbb{N}$, множину всіх верхньотрикутних матриць $A = (a_{ij})$ розміру $p \times p$ з елементами з поля K таких, що $a_{ij} = a_{i'j'}$ кожного разу, коли $j - i = j' - i' \geq 0$ (остання умова означає, що головна діагональ і всі паралельні їй діагоналі, які стоять вище неї, є скалярними). Для $p, q \in \mathbb{N}$ позначимо через $\Delta_K^{=}(p,q)$ множину $\Delta_K^{=}(p)$, якщо $p = q$; множину всіх матриць розміру $p \times q$, які мають вигляд $(0 \quad A)$, де $A \in \Delta_K^{=}(p)$, якщо $p < q$, і вигляд $\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$, де $A \in \Delta_K^{=}(q)$, якщо $p > q$.

Лема 2. $\Delta_K^{=}(p,q)$ *− векторний простір над полем K розмірності* $d_{pq} = \min(p,q)$.

Д о в е д е н н я випливає безпосередньо з означень. ♦

Твердження 4. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}_K(S)}(\overline{J}_p, \overline{J}_q) = \Delta_K^{=}(p,q)$ *для довільних* $1 \leq p, q \leq m$.

Д о в е д е н н я. Дійсно, добре відомо (див., наприклад, [11, розд. VIII]), що рівність $J_p X = X J_q$ виконується тоді й лише тоді, коли (в наших позначеннях) $X \in \Delta_K^{=}(p,q)$. ♦

Отже, алгебра Ауслендера $\mathrm{Aus}_K(S)$ задається вказаною у параграфі 2 блочною матрицею вигляду (1), у якій $T_i = \overline{J}_i$ для $i = 1, 2, \ldots, m$, а $\mathrm{Hom}(T_i, T_j)$ задається твердженням 4. Значить, для матриці $D_K(S) = (d_{ij})$ вигляду (3) маємо в цьому випадку таке твердження.

Лема 3. *Матриця $D_K(S)$ є симетричною і, крім того,* $d_{ij} = d_{ji} = i$ *при* $i \leq j$.

Переходимо безпосередньо до доведення рівності (5) в теоремі 3. Згідно з твердженнями 2 і 3, достатньо показати, що сума $D^{\Sigma}(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ всіх елементів підматриці $D(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ матриці $D = D_K(S)$, утвореної рядками і стовпцями з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_n$ (розташованими в зростаючому порядку), дорівнює $\sum_{s=1}^{n} i_s(2n - 2s + 1)$. Доведення проведемо індукцією за n. База індукції (випадок $n = 1$) очевидна. Нехай тепер $n > 1$. За індукційним припущенням $D^{\Sigma}(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}) = \sum_{s=1}^{n-1} i_s(2n - 2s + 1)$. Тоді, враховуючи лему 2, маємо

$$D^{\Sigma}(i_1, i_2, \ldots, i_n) = D^{\Sigma}(i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}) + 2\sum_{s=1}^{n-1} d_{i_s i_n} + d_{i_n i_n} =$$

$$= \sum_{s=1}^{n-1} i_s(2n - 2s + 1) + 2\sum_{s=1}^{n-1} i_s + i_n =$$

$$= \sum_{s=1}^{n-1} i_s(2n - 2s + 1) + i_n(2n - 2n + 1) = \sum_{s=1}^{n} i_s(2n - 2s + 1),$$

що й треба було довести.

Переходимо до доведення другої частини теореми (доведення рівності (6)). Обчислимо, використовуючи доведену рівність (5), розмірність алгебри Ауслендера $\mathrm{Aus}_K(S)$. Поклавши в (5) $n = m$ і $i_s = s$, отримаємо

$$\dim_K \mathrm{Aus}_K(S) = \sum_{s=1}^{m} s(2m - 2s + 1) = (2m + 1)\Sigma_1 - 2\Sigma_2,$$

де

$$\Sigma_1 = \sum_{s=1}^{m} s = \frac{m(m+1)}{2}, \qquad \Sigma_2 = \sum_{s=1}^{m} s^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

звідки випливає рівність (6). ♦

Зауваження 3. Σ_1 обчислюємо за формулою суми членів арифметичної прогресії. Для обчислення Σ_2 використовуємо рівність $(m+1)^3 = 1 + 3\sum_{s=1}^{m} s^2 + 3\Sigma_1 + m$, яку отримуємо після додавання рівностей $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ при $n = 1, 2, \ldots, m$.

Наступна теорема описує Σ-функцію довільної циклічної нільпотентної напівгрупи.

Теорема 4. *Σ-функція напівгрупи $S = S_1^{(m)} = \{a \mid a^m = 0\}$, $m \ge 1$, над довільним полем K задається такою формулою*:

$$\Sigma_{S,K}(n) = \begin{cases} \dfrac{m(m+1)}{2}, & n = 1, \\ C_{m-1}^{n-1}\dfrac{m(m+1)}{2} + C_{m-2}^{n-2}\dfrac{(m-1)m(m+1)}{3}, & 1 < n < m, \\ \dfrac{m(m+1)(2m+1)}{6}, & n = m. \end{cases}$$

Д о в е д е н н я випливає з теореми 1, другої частини теореми 3 і леми 3. ♦

1. *Башев В. А.* Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, № 5. – С. 1015–1018.
2. *Бондаренко В. М.* Зображення гельфандових графів. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2005. – 228 с.
3. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцом классов вычетов // Мат. сборник. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 275–277.
4. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, № 1. – С. 63–74.
   Те саме: *Bondarenko V. M.* Representations of dihedral groups over a field of characteristic 2 // Math. USSR Sb. – 1975. – **25**, No. 1. – P. 58–68. – http://doi.org/10.1070/SM1975v025n01ABEH002197.
5. *Бондаренко В. М.* Представления связок полуцепных множеств и их приложения // Алгебра и анализ. – 1991. – **3**, № 5. – С. 38–61.
   Те саме: *Bondarenko V. M.* Representations of bundles of semichained sets and their applications // St. Petersburg Math. J. – 1992. – **3**, No. 5. – P. 973–996.
6. *Бондаренко В. М.* Про класифікацію модулярних зображень узагальнених груп кватерніонів // Доп. НАН України. – 2004. – № 12. – С. 3–9.
7. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.

Те саме: *Bondarenko V. M., Drozd Yu. A.* Representation type of finite groups // J. Sov. Math. – 1982. – **20**, No. 6. – P. 2515–2528.
– https://doi.org/10.1007/BF01681468.
8. *Бондаренко В. М., Зубарук О. В.* Σ-функція числа параметрів для системи матричних зображень: початкові поняття та приклади // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. – 2015. – **12**, № 3. – С. 56–64.
9. *Бондаренко В. М., Литвинчук И. В.* О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга // Наук. вісн. Ужгород. нац. ун-ту. Сер. Математика і інформатика. – 2012. – Вип. 23, № 1. – С. 17–25.
10. *Габриэль П., Ройтер А. В.* Представления конечномерных алгебр // Итоги науки и техники. Сер. Соврем. проблемы математики. Фундам. направления. Алгебра – 8. – **73**. – Москва, 2003. – С. 5–224.
Те саме: *Gabriel P., Roiter A. V.* Representations of finite-dimensional algebras. – Vol. **73**. – Springer-Verlag, 1992. – 177 p.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1988. – 552 с.
Те саме: *Gantmacher F. R.* The theory of matrices. – New York: Chelsea Publ. Co., 1959. – Vol. 1: x+377 p.; Vol. 2: x+277 p.
– http://science.sciencemag.org/content/131/3408/1216.2.
12. *Гельфанд И. М., Пономарев В. А.* Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968. – **23**, № 2 (140). – С. 3–60.
Те саме: *Gel'fand I. M., Ponomarev V. A.* Indecomposable representanions of the Lorentz group // Russ. Math. Surv. – 1968. – **23**, No. 2. – P. 1–58.
– https://doi.org/10.1070/RM1968v023n02ABEH001237.
13. *Завадский А. Г.* Алгоритм дифференцирования и классификация представлений // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1991. – **55**, № 5. – С. 1007–1048.
14. *Зубарук О. В.* Про алгебру Аусландера однієї комутативної напівгрупи скінченного зображувального типу // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2020. – Вип. 18. – С. 43–47. – https://doi.org/10.15407/apmm2020.18.43-47.
15. *Кириченко В. В.* Классификация пар взаимно аннулирующих операторов в градуированном пространстве и представления диады обобщенно однорядных алгебр // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1978. – **75**. – С. 91–109.
Те саме: *Kirichenko V. V.* Classification of pairs of mutually annihilating operators in a graded space and representations of the diad of generalized uniserial algebras // J. Sov. Math. – 1987. – **37**, No. 2. – P. 977–990.
16. *Маклейн С.* Категории для работающего математика. – Москва: Физматлит, 2004. – 352 с.
Те саме: *Mac Lane S.* Categories for the working mathematician. – Springer, 1998. – 317 p.
17. *Назарова Л. А.* Представления колчанов бесконечного типа // Изв. АН СССР. – 1973. – **37**, № 4. – С. 752–791.
Те саме: *Nazarova L A.* Representations of quivers of infinite type // Math. USSR Izv. – 1973. – **7**, No. 4. – P. 749–792.
– https://doi.org/10.1070/IM1973v007n04ABEH001975.
18. *Назарова Л. А., Ройтер А. В.* Категорные матричные задачи и проблема Брауэра – Трелла. – Киев: Наук. думка, 1973. – 100 с.
Те саме: *Nazarova L. A., Roiter A. V.* Categorical matrix problems and the Brauer – Thrall conjecture // Mitt. Math. Sem. Giessen. – 1975. – **115**. – P. 1–153.
19. *Петричкович В. М.* Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. – 312 с.
20. *Сергейчук В. В.* Канонический вид матрицы билинейной формы над алгебраически замкнутым полем характеристики 2 // Мат. заметки. – 1987. – **41**, № 6. – С. 781–788.
Те саме: *Sergeichuk V. V.* Canonical form of the matrix of a bilinear form over an algebraically closed field of characteristic 2 // Math. Notes. – 1987. – **41**, No. 6. – P. 441–445. – https://doi.org/10.1007/BF01158384.
21. *Auslander M., Reiten I.* Applications of contravariantly finite subcategories // Adv. Math. – 1991. – **86**, No. 1. – P. 111–152.
– https://doi.org/10.1016/0001-8708(91)90037-8.
22. *Bondarenko V. M.* Linear operators on S-graded vector spaces // Linear Algebra Appl. – 2003. – **365**, No. 5. – P. 45–90.
– https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00689-4.
23. *Bondarenko V. M., Bortos M. Yu., Dinis R. F., Tylyshchak A. A.* Reducibility and

irreducibility of monomial matrices over commutative rings // Algebra Discrete Math. – 2013. – **16**, No. 2. – P. 171–187.
24. *Bondarenko V. M., Styopochkina M. V.* On finite posets of *inj*-finite type and their Tits forms // Algebra Discrete Math. – 2006. – **5**, No. 2. – P. 17–21.
25. *Bongartz K., Kettler M., Riedtmann C.* On module categories where the hom-order and the stable hom-relation coincide // J. Algebra. – 2006. – **299**, No. 1. – P. 219–225. – https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.06.025.
26. *Donovan P., Freislich M. R.* The representation theory of finite graphs and associated algebras // Carleton Lecture Notes. – 1973. – No. 5. – P. 3–86.
27. *Drozd Ju. A.* Tame and wild matrix problems // Representation Theory II / Lect. Notes Math., Vol. **832**. – Springer, 1980. – P. 242–258. – https://doi.org/10.1007/BFb0088467.
28. *Drozd Yu. A.* On K_0 of locally finite categories // J. Algebra. – 2022. – **596**. – P. 289–310. – https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.01.010.
29. *Gabriel P.* Categories and representations // J. Pure Appl. Algebra. – 2000. – **154**, No. 1-3. – P. 177–191. – https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00182-6.
30. *Gabriel P.* Unzerlegbare Darstellungen I // Manuscripta Math. – 1972. – **6**, No. 1. – P. 71–103. – https://doi.org/10.1007/BF01298413.
31. *Gelfand I. M., Ponomarev V. A.* Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space // Coll. Math. Societatis János Bolyai. – 1970. – **5**. – P. 163–237.
32. *Jiao P.* Injective objects in the category of finitely presented representations of an interval finite quiver // Ark. Mat. – 2019. – **57**, No. 2. – P. 381–396. – https://doi.org/10.4310/ARKIV.2019.v57.n2.a7.
33. *Naidu D.* Some properties of the representation category of twisted Drinfeld doubles of finite groups // Int. Electron. J. Algebra. – 2021. – **29**, No. 29. – P. 223–238. – https://doi.org/10.24330/ieja.852237.
34. *Paskunas V., Tung S.-N.* Finiteness properties of the category of $\operatorname{mod} p$ representations of $GL_2(Q_p)$ // Forum Math. Sigma. – 2021. – **9**. – Paper No. e80. – 39 p. – https://doi.org/10.1017/fms.2021.72.
35. *Ringel C.* The indecomposable representations of the dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**. – P. 19–34.
36. *Shotton J.* The category of finitely presented smooth $\operatorname{mod} p$ representations of $GL_2(F)$ // Doc. Math. – 2020. – **25**. – P. 143–157. – https://doi.org/10.25537/dm.2020v25.143-157.
37. *Simson D.* Linear representations of partially ordered sets and vector space categories. – Philadelphia: Gordon & Breach Sci. Publ., 1993. – xv+499 p.

Σ-FUNCTIONS OF CATEGORIES OF MATRIX REPRESENTATIONS OF NILPOTENT SEMIGROUPS

The categories of matrix representations of nilpotent semigroups over arbitrary field are investigated. The main attention is gained to the matrix Auslander algebras as one of the form of specifying categories of representations with a finite number of the equivalence classes of indecomposable objects and to their discrete characteristics. The concept of the Auslander algebra is generalized to categories of representations without additional conditions. For an arbitrary nilpotent cyclic semigroup, its Auslander algebra is specified and its Σ-function is calculated.

Key words: *nilpotent semigroup, cyclic semigroup, ideal, matrix representation, direct sum, Jordan block, equivalence, category, categories of skeleton and spine, Auslander algebra, Σ-function.*

[1] Ін-т математики НАН України, Київ,
[2] Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ

Одержано
08.01.22