

## ПРО ОЦІНКУ СТАРШОГО ПОКАЗНИКА ЛЯПУНОВА МОДЕЛІ ХРЕСТОПОДІБНИХ ХВИЛЬ У ПРЯМОКУТНОМУ КАНАЛІ СКІНЧЕНИХ РОЗМІРІВ

Старший показник Ляпунова характеризує ступінь експонентного розходження близьких траєкторій динамічної системи. Наявність у системи додатної експоненти Ляпунова свідчить про швидке розходження з часом двох довільних близьких траєкторій та чутливості до значень початкових умов. Тому визначення експоненти Ляпунова дає змогу ідентифікувати систему в сенсі наявності хаотичної динаміки. У роботі запропоновано метод підвищення точності чисельного алгоритму Бенеттіна для оцінки старшого показника Ляпунова у випадку дисипативної динамічної системи. Наведено результати обчислень для гідродинамічної моделі хрестоподібних хвиль у прямокутному каналі скінчених розмірів.

**Ключові слова:** показник Ляпунова, траєкторії динамічної системи, алгоритм Бенеттіна, хрестоподібні хвилі, прямокутний канал скінчених розмірів.

**Вступ.** Як відомо, однією з необхідних умов хаотичності динамічної поведінки системи є її чутливість до заданих початкових умов [2, 5, 6, 9, 10, 17, 22]. Кількісним критерієм такої чутливості зазвичай є старший показник Ляпунова (експонента Ляпунова) [1, 3, 4, 6–8, 11–13, 15, 18–21]. Нехай динамічну систему задано аналітично системою диференціальних рівнянь у формі Коші

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = f(\mathbf{x}(t), t), \quad (1)$$

де  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x}(t)$  – шукана вектор-функція, яка задовольняє початкову умову  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\mathbb{R}^n$  – фазовий простір системи,  $f: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  – неперервна вектор-функція. Відомо, що якщо функція  $f$  задовольняє умови Ліпшиця за всіма аргументами, крім часу  $t$ , то існує єдиний розв'язок системи (1). Позначимо через  $\mathbf{x}_i$  точку в фазовому просторі  $\mathbb{R}^n$  динамічної системи, що відповідає радіусу-вектору стану  $\mathbf{x}(t_i)$ . Якщо з плином часу розв'язок системи (1) нескінченно наближається до деякого многовиду  $A$ , то  $A$  називають *атрактором* системи (1). У фазовому просторі може бути декілька атракторів, різних за формою та розмірами, прихованих та ін., залежно від особливостей правих частин системи (1).

З точки зору сучасної теорії динамічних систем, найважливішими характеристиками системи є [1, 6, 11]: хаотичність (або регулярність), дисипативність (або консервативність), наявність топологічних інваріантів атрактора (наприклад, фрактальна розмірність) і частотний спектр часової реалізації. Залежно від цих характеристик суттєво змінюється поведінка розв'язку системи у фазовому просторі.

Нехай розв'язок системи отримано за деяких початкових умов і після перехідного процесу виявлено деякий атрактор. Щоб з'ясувати, чи є на атракторі чутливість до початкових умов, характерна для хаотичного атрактора [1, 2, 5], потрібно обчислити старший показник Ляпунова (СПЛ). Для цього розглянемо точку  $\mathbf{x}_0$  на атракторі динамічної системи (рис. 1) у початковий момент часу  $t_0$ . Задавши деяке мале число  $\varepsilon_0$ , виберемо ще одну точку  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  на атракторі так, щоб виконувалась умова  $|\tilde{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0| = \varepsilon_0$ . Для

✉ krasnopska1005@gmail.com

коректної роботи алгоритму [2, 9, 10, 22] потрібна точка саме на атракторі, а не близька до нього. В іншому випадку отриманий результат характеризуватиме поведінку траєкторії не на атракторі, а поблизу нього, що є основним джерелом помилок при обчисленні СПЛ для неконсервативних систем.

Через проміжок часу  $\Delta t$  точки  $\mathbf{x}_0$  та  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  еволюціонують відповідно в точки  $\mathbf{x}(t)$  та  $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ . Відстань між ними позначимо через  $\varepsilon(t)$ , де  $t = t_0 + \Delta t$ .

Значення  $\varepsilon(t)$  залежить від початкового положення точок  $\mathbf{x}_0$  та  $\tilde{\mathbf{x}}_0$ , а також

проміжку часу  $\Delta t$  і динамічної системи в цілому. Проте наближено можна вважати, що  $\varepsilon(t) \approx \varepsilon_0 e^{\lambda \Delta t}$ , де  $\lambda$  – СПЛ системи. Таким чином, динаміку біжучої точки на атракторі характеризує параметр [9, 10]

$$\lambda \approx \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0}. \quad (2)$$

З умови обмеженості атрактора впливає і скінченність  $\varepsilon(t)$ , тому  $\Delta t$  має збільшуватись лише до тих пір, поки значення  $\varepsilon(t)$  залишається суттєво меншим ніж геометричні розміри атрактора. У протилежному випадку  $\lambda = 0$  при  $\Delta t \rightarrow \infty$ . При цьому отримане відповідно до (2) значення  $\lambda$  потрібно розглядати як усереднене за всіма початковими точками  $\mathbf{x}_0$  атрактора. Тому остаточно маємо

$$\lambda = \overline{\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_0} \right)},$$

де значення  $\varepsilon(t)$  є значно меншим від розмірів атрактора. Такий підхід базується на ергодичній теоремі В. І. Оселедця [7], згідно з якою експоненційне розходження двох випадково вибраних точок на атракторі з одиничною ймовірністю характеризує СПЛ.

На практиці для знаходження СПЛ використовують алгоритм Бенеттіна. Запропонований колективом авторів у 1976 р. для консервативної системи Hénon – Heiles [10], цей метод є ефективним у першу чергу для консервативних систем. У 1980 р. ці автори використали власні результати для гладких гамільтонових динамічних систем [9]. Зважаючи на відсутність альтернатив, його часто застосовують і для дисипативних систем. Проте в цьому випадку неминуче виникають помилки, пов'язані з тим, що розмірність атрактора такої системи є нижчою від розмірності фазового простору. А застосування класичного алгоритму Бенеттіна у випадку існування в системі декількох атракторів, зокрема прихованих, є, взагалі кажучи, некоректним.

У цій роботі запропоновано метод підвищення точності алгоритму Бенеттіна для дисипативної динамічної системи.

**1. Алгоритм Бенеттіна та його модифікація.** Розглянемо спочатку класичний алгоритм Бенеттіна [9, 10]. Позначимо через  $\mathbf{x}_0$  точку  $\mathbf{x}(t_0)$  на атракторі динамічної системи (1) у початковий момент часу  $t_0$  після перехідного процесу. Зафіксуємо значення  $\varepsilon$ , яке є істотно меншим ніж лінійні розміри атрактора, та точку  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  з рівності

$$|\tilde{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0| = \varepsilon. \quad (3)$$

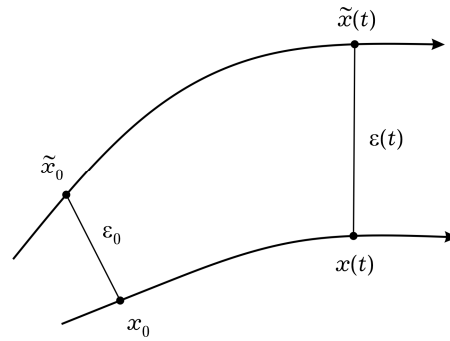


Рис. 1. Еволюція двох близьких точок на атракторі динамічної системи.

Відстежимо еволюцію точок  $\mathbf{x}_0$  та  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  через деякий невеликий проміжок часу  $\Delta t = T$ . Отримані значення позначимо через  $\mathbf{x}_1$  та  $\tilde{\mathbf{x}}_1$  (рис. 2). Вектор  $\Delta\mathbf{x}_1 = \tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_1$  називають вектором збурення, а його абсолютну величину  $|\Delta\mathbf{x}_1|$  – амплітудою збурення. Значення СПЛ на першому етапі оцінимо за формулою

$$\lambda_1 = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_1|}{\varepsilon} = \frac{1}{T} \ln \frac{|\Delta\mathbf{x}_1|}{\varepsilon}.$$

Далі виконуємо перенормування за формулою  $\Delta\mathbf{x}'_1 = \varepsilon\Delta\mathbf{x}_1/|\Delta\mathbf{x}_1|$  та повторюємо описану процедуру вже для точок  $\tilde{\mathbf{x}}'_1 = \mathbf{x}_1 + \Delta\mathbf{x}'_1$  та  $\mathbf{x}_1$  замість точок  $\mathbf{x}_0$  та  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  (рис. 2). Після  $M$  повторень знаходимо СПЛ як середньоарифметичне значень, отриманих на кожному з етапів:

$$\lambda \approx \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \lambda_k = \frac{1}{MT} \sum_{k=1}^M \ln \frac{|\Delta\mathbf{x}_k|}{\varepsilon}.$$

Зрозуміло, що алгоритм добре працює в консервативних моделях, де об'єм фазового простору не змінюється з часом. Наприклад, в задачах переміщення рідин у різних ємностях, отриманий у такий спосіб результат безпосередньо характеризує ступінь перемішування точок середовища. При цьому, однак, показано [15, 18], що найбільше значення максимального СПЛ не гарантує найкращого за якістю змішування.

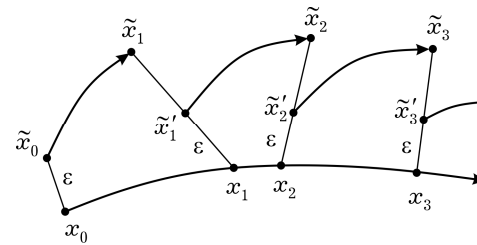


Рис. 2. Алгоритм Бенеттіна обчислення старшого показника Ляпунова.

Основною проблемою цього методу у випадку дисипативної системи є той факт, що точки  $\tilde{\mathbf{x}}'_1, \tilde{\mathbf{x}}'_2, \dots$ , взагалі кажучи, не лежать на аттракторі. Розмірність останнього є нижчою від розмірності фазового простору, тому ймовірність того, що випадково взята точка потрапить саме на нього, дорівнює нулеві. Наприклад, якщо єдиним аттрактором системи є граничний цикл, то в результаті застосування алгоритму Бенеттіна СПЛ буде мати від'ємне значення, хоча насправді має бути рівним нулеві. Можливі варіанти, коли збурена точка  $\tilde{\mathbf{x}}'_k$  потрапляє:

- 1°) на досліджуваній аттрактор (ймовірність потрапляння рівна нулеві);
- 2°) на інший, можливо, прихований аттрактор (ймовірність рівна нулеві);
- 3°) у басейн тяжіння досліджуваного аттрактора (ймовірність є відмінною від нуля);
- 4°) у басейн тяжіння іншого аттрактора (ймовірність є відмінною від нуля).

У випадках 3° та 4°, які є найбільш імовірними, значення  $\lambda_k$  характеризує не значення СПЛ аттрактора, а поведінку близької до нього траєкторії, що спричинює похибку обчислень. Для усунення цієї похибки потрібно вибирати точки  $\tilde{\mathbf{x}}'_0, \tilde{\mathbf{x}}'_1, \tilde{\mathbf{x}}'_2, \dots$  безпосередньо на досліджуваному аттракторі. Якщо права частина рівняння (1) є відомою, розв'язок можна отримати чисельно, а алгоритм розв'язування передбачає виконання таких кроків.

**Крок 1.** Після перехідного процесу вибираємо точки  $\mathbf{x}_0$  та  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  на розв'язку системи (1) для фіксованих початкових умов так, щоб рівність (3) виконувалася для деякого малого значення  $\varepsilon_0 \leq \varepsilon$ . Рухаючись далі уздовж

траєкторії розв'язку, через проміжок часу  $T$  отримаємо відповідно точки  $\mathbf{x}_1$  та  $\tilde{\mathbf{x}}_1$  на ньому. З їх використанням обчислюємо  $\lambda_1 = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{x}_1|}{\varepsilon_0}$ .

**Крок 2.** Фіксуємо одну з точок, наприклад  $\mathbf{x}_1$ , а  $\tilde{\mathbf{x}}_1$  знаходимо, розв'язавши систему на віддалі  $|\tilde{\mathbf{x}}' - \mathbf{x}_1| = \varepsilon_1 \leq \varepsilon$  від  $\tilde{\mathbf{x}}_1$ . Таким чином, початок і кінець вектора збурення належать атрактору. Через проміжок часу  $T$  отримаємо точки  $\mathbf{x}_2$  та  $\tilde{\mathbf{x}}_2$  на атракторі. Знаходимо наступне значення  $\lambda_2 = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{\mathbf{x}}_2 - \mathbf{x}_2|}{\varepsilon_1}$ .

**Крок 3.** Повторюючи процедуру  $M$  разів, обчислюємо СПЛ як середньоарифметичне значень, отриманих на кожному етапі:

$$\lambda \approx \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \lambda_k, \quad \text{де} \quad \lambda_k = \frac{1}{T} \ln \frac{|\tilde{\mathbf{x}}_k - \mathbf{x}_k|}{\varepsilon_{k-1}}$$

Отримане значення, за ергодичною теоремою В. І. Оселедця [7], з імовірністю одиниця характеризує СПЛ атрактора. Зрозуміло, що значення  $\lambda$  залежить від величин  $\varepsilon$  та  $T$ . При цьому величину  $\varepsilon$  потрібно узгоджувати з геометричним розміром атрактора. Проміжок  $T$  має бути значно коротшим ніж час умовного «повного оберту» біжучої по атрактору точки.

**2. Хрестоподібні хвилі у прямокутному каналі скінченних розмірів.** Занурені в рідину тіла, що коливаються, створюють на її вільній поверхні хвилі різних типів [14, 16]. Механізм збудження деяких із них досі не є вивченим. Це насамперед так звані хрестоподібні хвилі, які були вперше описані Фарадеєм у відомій роботі 1831 року. В [16] побудовано нову математичну модель збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини і глибини та запропоновано методику побудови розв'язку на основі застосування методу суперпозиції Ляме. Вказано на безпосереднє перенесення енергії від джерела до хрестоподібної хвилі. Там само вперше отримано аналітичний розв'язок задачі поширення хрестоподібних хвиль у скінченних прямокутних басейнах. Він суттєво відрізняється від розв'язку, отриманого Хавелоком для хвиль у напівнескінченному прямокутному басейні [14].

Система рівнянь у формі Коші для амплітуди резонансної моди коливань має вигляд [16]

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{dt} &= p, & \frac{d\tau}{dt} &= 1, \\ \frac{dp}{dt} &= -\frac{1}{1 + 1.0504\ell^2} \left( \ell + \alpha p + 1.4003\ell p^2 + \right. \\ & \quad \left. + 4.78A\ell \sin((2 - \beta)\tau) - 2.99Ap \cos((2 - \beta)\tau) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Тут  $\ell = \xi_{nm}(t) / \mu$ ,  $\tau = \omega_{nm}t$ ,  $\xi_{nm}(t)$  – амплітуда резонансної моди коливань  $\xi \approx \xi_{nm}(t) \cos(n\pi x/L) \cos(m\pi y/b) + \xi_{00}$ ,  $\omega_{nm}$  – власна частота прямокутного каналу  $0 \leq x \leq L$ ,  $0 \leq y \leq b$  глибини  $h$ ,  $\mu = 0.26$  м – коефіцієнт обезрозмірювання,  $A$  – безрозмірна амплітуда коливань,  $\alpha$  – коефіцієнт опору рідини,  $p$  – похідна від амплітуди резонансної моди коливань. У системі (4) виявлено регулярну (рис. 3) і хаотичну (рис. 4) динаміку [16].

До визначення описаних динамічних режимів було застосовано класичний алгоритм Бенеттіна та запропоновану модернізацію. Результати обчислень наведено у табл. 1. За класичним алгоритмом Бенеттіна отримано від'ємні значення СПЛ для стійких граничних циклів (випадки 1 та 2). Мо-

дифікований алгоритм виявляє додатні значення СПЛ, які є меншими за абсолютною величиною, що вказує на кращу точність оцінки (тому що для граничного циклу показник має бути нульовим). При цьому видно, що у випадку 1 значення СПЛ, отримане при  $\varepsilon = 0.1$ , є меншим ніж отримане при  $\varepsilon = 0.5$ , а у випадку 2 – навпаки, більшим, що пояснюється більшими розмірами граничного циклу у фазовому просторі. Для хаотичних режимів усіма методами отримано додатні значення СПЛ, які є більшими при  $\varepsilon = 0.1$ . Найбільше значення отримано з використанням модифікованого алгоритму при  $\varepsilon = 0.1$ . Таким чином, у цій моделі використання модифікованого алгоритму з малим значенням  $\varepsilon$  відкриває можливість точнішої характеристики поведінки фазової траєкторії на атракторі, як у випадку граничного циклу, так і для хаосу.

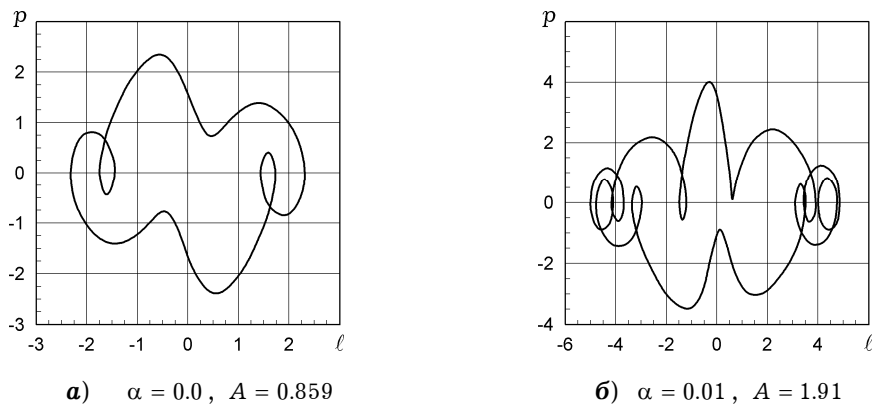


Рис. 3. Регулярні режими в системі, що описує збудження хрестоподібних хвиль у скінченних за розмірами прямокутних басейнах [16].

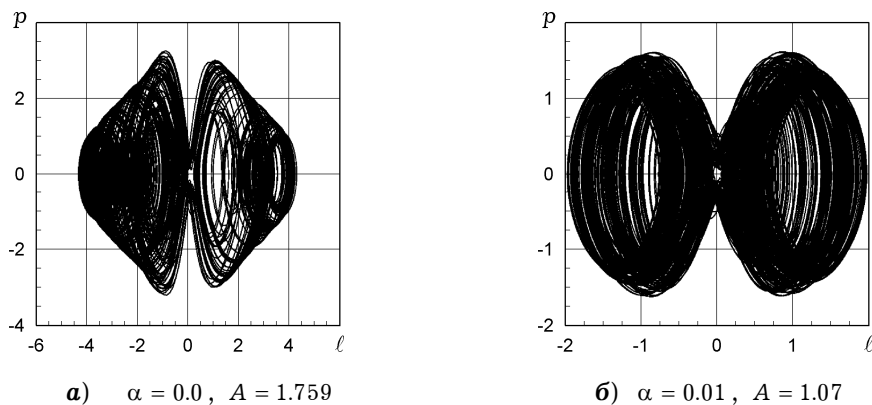


Рис. 4. Хаотичні режими в системі, що описує збудження хрестоподібних хвиль у скінченних за розмірами прямокутних басейнах [16].

Таблиця 1. Значення СПЛ, отримані різними методами для регулярних та хаотичних режимів у моделі хрестоподібних хвиль.

	Регулярний режим		Хаотичний режим	
	1) $\alpha = 0.0, A = 0.859$	2) $\alpha = 0.01, A = 1.91$	3) $\alpha = 0.0, A = 1.759$	4) $\alpha = 0.01, A = 1.07$
Алгоритм Бенеттіна, $\varepsilon = 0.1$	-0.000567	-0.000744	0.014456	0.015759
Модифікований алгоритм	$\varepsilon = 0.1$	0.000046	0.000828	0.030678
	$\varepsilon = 0.5$	0.000070	0.000670	0.012995

**Висновки.** Числовий розрахунок СПЛ із використанням класичного алгоритму Бенеттіна не завжди є задовільним у випадку динамічної системи з дисипацією енергії. Запропонована модифікація цього алгоритму дає змогу підвищити точність розрахунків і розширити область застосування методу. Застосування цієї модифікації для моделі збудження хрестоподібних хвиль на вільній поверхні рідини у прямокутному каналі скінченної довжини і глибини дає змогу точніше ідентифікувати динамічний режим.

1. Берже П., Помо Й., Видаль К. Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. – Москва: Мир, 1991. – 368 с.  
Te same: *Bergé P., Pomeau Y., Vidal C.* Order within chaos: towards a deterministic approach to turbulence. – New York: J. Wiley & Sons, 1984. – 329 p.
2. Головки В. А. Нейросетевые методы обработки хаотических процессов // Научная сессия МИФИ–2005. VII Всероссийская научно-техническая конференция «Нейроинформатика–2005»: Лекции по нейроинформатике / Ю. В. Тюменцев (ред.). – Москва: МИФИ, 2005. – С. 43–91.
3. Краснопольская Т. С., Швец А. Ю. Свойства хаотических колебаний жидкости в цилиндрических баках // Прикл. механика. – 1992. – **28**, № 6. – С. 52–61.  
Te same: *Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Y.* Properties of chaotic fluid oscillations in cylindrical basins // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, No. 6. – P. 386–394. – <https://doi.org/10.1007/BF00847097>.
4. Краснопольская Т. С., Швец А. Ю. Хаотические колебания сферического маятника как эффект взаимодействия с источниками энергии // Прикл. механика. – 1992. – **28**, № 10. – С. 61–68.  
Te same: *Krasnopol'skaya T. S., Shvets A. Y.* Chaotic oscillations of a spherical pendulum as an example of interaction with an energy source // *Int. Appl. Mech.* – 1992. – **28**, No. 10. – P. 669–674. – <https://doi.org/10.1007/BF00846923>.
5. Кузнецов С. П. Динамический хаос. – Москва: Физматлит, 2001. – 296 с.
6. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. – Москва: Мир, 1990. – 312 с.  
Te same: *Moon F. C.* Chaotic vibrations: An introduction for applied scientists and engineers. – New York, etc.: J. Wiley & Sons, 1987. – xv+309 p.
7. Оседец В. И. Мультипликативная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1968. – **19**. – С. 179–210.  
Te same: *Oseledets V. I.* A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems // *Trans. Moscow Math. Soc.* – 1968. – **19**. – P. 197–231.
8. Швец А. Ю., Сиренко В. А. Сценарии переходов к гиперхаосу в неидеальных колебательных системах // Нелінійні коливання. – 2018. – **21**, № 2. – С. 284–292.  
Te same: *Shvets A. Y., Sirenko V. A.* Scenarios of transitions to hyperchaos in nonideal oscillating systems // *J. Math. Sci.* – 2019. – **243**, No. 2. – P. 338–346. – <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04543-z>.
9. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory // *Meccanica.* – 1980. – **15**, No. 1. – P. 9–20. – <https://doi.org/10.1007/BF02128236>.
10. Benettin G., Galgani L., Strelcyn J. M. Kolmogorov entropy and numerical experiments // *Phys. Rev. A.* – 1976. – **14**, No. 6. – P. 2338–2342. – <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.14.2338>.
11. Crutchfield J. P., Farmer J. D., Packard N. H., Shaw R. S. Chaos // *Sci. Am.* – 1986. – **255**, No. 6. – P. 46–57. – <http://doi.org/10.1038/scientificamerican1286-46>.
12. Krasnopol'skaya T. S. Acoustic chaos caused by the Sommerfeld effect // *J. Fluid Struct.* – 1994. – **8**, No. 7. – P. 803–815. – [https://doi.org/10.1016/S0889-9746\(94\)90300-X](https://doi.org/10.1016/S0889-9746(94)90300-X).
13. Krasnopol'skaya T. S. Chaos in acoustic subspace raised by the Sommerfeld – Kononenko effect // *Meccanica.* – 2006. – **41**, No. 3. – P. 299–310. – <https://doi.org/10.1007/s11012-005-5899-z>.
14. Krasnopol'skaya T. S., Heijst G. J. F. Wave pattern formation in a fluid annulus with a radially vibrating inner cylinder // *J. Fluid Mech.* – 1996. – **328**. – P. 229–252. – <https://doi.org/10.1017/S0022112096008701>.

15. *Krasnopolskaya T. S., Meleshko V. V., Peters G. W. M., Meijer H. E. H.* Mixing in Stokes flow in an annular wedge cavity // *Eur. J. Mech. B-Fluids*. – 1999. – **18**, No. 5. – P. 793–822. – [https://doi.org/10.1016/S0997-7546\(99\)00119-3](https://doi.org/10.1016/S0997-7546(99)00119-3).
16. *Krasnopolskaya T. S., Pechuk E. D.* Peculiarities of parametric resonances in cross-waves // *Chaotic Modeling and Simulations*. – 2016. – No. 3. – P. 377–385.
17. *Laskar J., Froeschlé C., Celletti A.* The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. Application to the standard mapping // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1992. – **56**, Nos. 2-3. – P. 253–269. – [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(92\)90028-L](https://doi.org/10.1016/0167-2789(92)90028-L).
18. *Meleshko V., Krasnopolskaya T., Peters G. W. M., Meijer H. E. H.* Coherent structures and scales of Lagrangian turbulence // *Advances in Turbulence. VI. Fluid Mechanics and its Applications* / S. Gavrilakis, L. Machiels, P. A. Monkewitz (eds.). – Vol. 36. – Dordrecht: Springer, 1996. – P. 601–604. – [https://doi.org/10.1007/978-94-009-0297-8\\_171](https://doi.org/10.1007/978-94-009-0297-8_171).
19. *Shvets A. Y., Krasnopolskaya T. S.* Hyperchaos in piezoceramic systems with limited power supply // *IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence* / A. V. Borisov, V. V. Kozlov, I. S. Mamaev, M. A. Sokolovskiy (eds.). – IUTAM Bookseries. – Vol. 6. – Dordrecht: Springer, 2008. – P. 313–322. – [https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6744-0\\_27](https://doi.org/10.1007/978-1-4020-6744-0_27).
20. *Shvets A., Donetskiy S.* Transition to deterministic chaos in some electroelastic systems // *11th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. CHAOS 2018* / C. H. Skiadas, I. Lubashevsky (eds.). – Springer Proceedings in Complexity. – Cham: Springer, 2019. – P. 257–264. – [https://doi.org/10.1007/978-3-030-15297-0\\_23](https://doi.org/10.1007/978-3-030-15297-0_23).
21. *Takens F.* Detecting strange attractors in turbulence // *Dynamical Systems and Turbulence* / D. Rand, L. S. Young (eds.). – *Lecture Notes in Mathematics*. – Vol. 898. – Berlin–Heidelberg: Springer, 1981. – P. 366–381. – <https://doi.org/10.1007/BFb0091924>.
22. *Wolf A., Swift J. B., Swinney H. L., Vastano J. A.* Determining Lyapunov exponents from a time series // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. – 1985. – **16**, No. 3. – P. 285–317. – [https://doi.org/10.1016/0167-2789\(85\)90011-9](https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9).

#### ON EVALUATING THE LARGEST LYAPUNOV EXPONENT FOR THE MODEL OF CROSS-WAVES IN A RECTANGULAR CHANNEL OF FINITE SIZE

*The largest Lyapunov exponent characterizes the degree of the exponential deviation of the neighboring trajectories of a dynamic system. The existence of a positive Lyapunov exponent for a system implies the rapid discrepancy in time of two arbitrary neighboring trajectories and their sensitivity towards the initial conditions. Thus, the determination of the Lyapunov exponent allows for the identification of a system with concern to its chaotic dynamics. This paper presents a method for improvement of the accuracy of the numeric Benettin algorithm for the evaluation of the largest Lyapunov exponent in the case of a dissipative dynamic system. The results of numerical evaluation of the hydrodynamic model of cross-waves in a rectangular channel of finite size are presented.*

**Key words:** *Lyapunov exponent, trajectories of a dynamical system, Benettin algorithm, cross-waves, rectangular channel of finite size.*

<sup>1</sup> Київ. нац. ун-т буд-ва і архіт., Київ,  
<sup>2</sup> Ін-т гідромеханіки НАН України, Київ