УДК 512.64+512.55

Н. С. Джалюк[✉], В. М. Петричкович

МАТРИЧНІ ЛІНІЙНІ РІЗНОСТОРОННІ РІВНЯННЯ НАД РІЗНИМИ ОБЛАСТЯМИ, МЕТОДИ ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ ТА ОПИС ЇХНЬОЇ СТРУКТУРИ

Наведено огляд методів розв'язування матричних лінійних різносторонніх рівнянь, зокрема рівнянь типу Сильвестра над різними областями та опису структури їхніх розв'язків. Основну увагу зосереджено на розширенні і узагальненні результатів, одержаних авторами раніше. На основі стандартної форми поліноміальних матриць відносно напівскалярної еквівалентності розроблено метод розв'язування матричних поліноміальних рівнянь типу Сильвестра. Досліджено структуру їхніх розв'язків. Виділено розв'язки обмежених степенів і наведено умови єдиності цих розв'язків. Запропоновано метод побудови розв'язків матричних рівнянь Сильвестра над адекватними кільцями, а також встановлено критерії єдиності розв'язків певного вигляду. Встановлено умови існування розв'язку матричного рівняння Сильвестра у кільцях трикутних та блочно-трикутних матриць над комутативною областю головних ідеалів.

Ключові слова: *поліноміальне кільце, адекватне кільце, матриця, еквівалентність, напівскалярна еквівалентність, узагальнена еквівалентність, матричне рівняння, розв'язок.*

Вступ. Матричні рівняння різних типів, зокрема алгебричне рівняння Ріккаті [1, 20, 48], виникають у різних розділах математики, фізики, механіки. Лінійні матричні рівняння − рівняння типу Сильвестра та діофантові, в тому числі матричні поліноміальні рівняння, застосовують при розв'язуванні задач теорії стійкості, керування, динамічних систем та інших задач [10, 14, 21, 36, 40, 43, 44, 62, 63]. Такими рівняннями є різносторонні матричні рівняння типу Сильвестра від однієї і двох змінних:

$$AX + XB = C\,,$$

$$AX + YB = C\,,$$

окремий тип рівнянь Сильвестра − рівняння Ляпунова

$$A^{\top}X + XA = C\,,$$

де $A^{\top}$ − транспонована до A матриця, а також односторонні матричні діофантові рівняння

$$AX + BY = C.$$

У цій статті розглянуто матричні лінійні різносторонні рівняння. Особливу увагу присвячено матричним рівнянням типу Сильвестра над багатьма областями: поліноміальними кільцями, адекватними кільцями, кільцями головних ідеалів, кільцями трикутних і блочно-трикутних матриць над комутативною областю головних ідеалів. Для матричних поліноміальних рівнянь типу Сильвестра запропоновано метод їхнього розв'язування і дослідження структури розв'язків з використанням стандартної форми матриць відносно напівскалярної еквівалентності. Над адекватними кільцями із використанням форми Ерміта встановлено критерій однозначності розв'язків певного вигляду матричного рівняння Сильвестра та розроблено спосіб їхньої побудови. З використанням стандартної форми пари матриць над адекватними кільцями відносно узагальненої еквівалентності вказано метод побудови розв'язків матричних рівнянь типу Сильвестра над такими кільцями. Встановлено умови єдиності часткових і вигляд загальних розв'язків. Розглянуто також матричні рівняння типу Сильвестра з трикутними та

[✉] nataliya.dzhalyuk@gmail.com

блочно-трикутними матричними коефіцієнтами та встановлено умови існування їхніх розв'язків таких самих блочних виглядів.

1. Загальне матричне рівняння Сильвестра та його типи. Загальне лінійне двостороннє матричне рівняння має вигляд

$$A_1XB_1 + A_2XB_2 + \ldots + A_kXB_k = C, \tag{1}$$

де $A_i, B_i, C \in M(n, \mathbb{F})$, $i = 1, \ldots, k$, − відомі матриці, а X − невідома матриця над полем $\mathbb{F}$.

Це матричне рівняння вперше вивчав J. J. Sylvester ще у 80-х роках XIX ст. [58].

При дослідженні цього рівняння використовується поняття прямого (кронекерового) добутку матриць.

Нагадаємо, що прямим добутком матриць $A = \left\| a_{ij} \right\|_1^m$ і $B = \left\| b_{ij} \right\|_1^n$ називають блочну матрицю вигляду

$$A \otimes B = \begin{Vmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2m}B \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \ldots & a_{mm}B \end{Vmatrix}.$$

Рівняння Сильвестра (1) еквівалентне до матричного рівняння

$$G\mathbf{x} = \mathbf{c}, \tag{2}$$

де

$$G = \left\| A_1 \otimes B_1^\top + A_2 \otimes B_2^\top + \ldots + A_k \otimes B_k^\top \right\|,$$

$$\mathbf{x} = \begin{Vmatrix} \mathbf{x}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^\top \end{Vmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{Vmatrix} \mathbf{c}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{c}_n^\top \end{Vmatrix},$$

символом «$\top$» позначено операцію транспонування, $\mathbf{x}_i$, $\mathbf{c}_i$ − i-ті рядки матриць X та C відповідно, $i = 1, \ldots, n$.

Рівняння (2), а отже, рівняння (1) має розв'язок тоді й тільки тоді, коли

$$\operatorname{rang} G = \operatorname{rang} \left\| G \quad \mathbf{c} \right\|.$$

Окремим типом рівняння (1) є матричне рівняння Сильвестра від однієї змінної

$$AX + XB = C \tag{3}$$

і рівняння Ляпунова

$$A^\top X + XA = C. \tag{4}$$

Ці рівняння можна звести до систем лінійних рівнянь

$$G\mathbf{x} = \mathbf{c},$$

$$G_1\mathbf{x} = \mathbf{c}_1,$$

де

$$G = \left\| A \otimes I + I \otimes B^\top \right\|,$$

$$G_1 = \left\| A^\top \otimes I + I \otimes A^\top \right\|,$$

I − одинична матриця відповідного розміру. За розв'язками цих систем будуються розв'язки рівнянь (3) і (4).

Зауважимо, що матричне рівняння (3) має єдиний розв'язок тоді й тільки тоді, коли матриці A і $-B$ не мають спільних характеристичних коренів.

Огляд обчислювальних методів для відшукання розв'язків матричних рівнянь типу (3), (4) над полем дійсних і комплексних чисел наведено в [57].

2. Критерій Рота розв'язності рівняння Сильвестра. Важливою є задача про розв'язність матричних рівнянь Сильвестра та опис їхніх розв'язків за коефіцієнтами цих рівнянь.

W. E. Roth [56] встановив зв'язок між розв'язністю матричних рівнянь типу Сильвестра з однією і двома невідомими матрицями та подібністю і еквівалентністю матриць блочної структури, складених із їхніх коефіцієнтів.

Теорема 1 (Рота) [56].

(*1*°). *Матричне рівняння*

$$AX - YB = C, \tag{5}$$

де A, B, C *– відомі матриці, а* X, Y *– невідомі матриці відповідних розмірів над полем* $\mathbb{F}$, *має розв'язок тоді й тільки тоді, коли матриці*

$$M = \begin{Vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{Vmatrix} \qquad i \qquad N = \begin{Vmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{Vmatrix} \tag{6}$$

є еквівалентними.

(*2*°). *Матричне рівняння*

$$AX - XB = C, \tag{7}$$

де A, B, C *– відомі, а* X *– невідома матриця над полем* $\mathbb{F}$, *має розв'язок тоді й тільки тоді, коли матриці* M *і* N *вигляду* (6) *є подібними.*

W. E. Roth зауважує, що ця теорема справджується і для матричних поліноміальних рівнянь, тобто для рівнянь (5) і (7) із матрицями-коефіцієнтами A, B, C над поліноміальним кільцем $\mathbb{F}[\lambda]$.

Теорему Рота узагальнено багатьма авторами для матричних рівнянь Сильвестра над різними кільцями, зокрема, над кільцями головних ідеалів [30], довільними комутативними кільцями [33] та іншими кільцями [34, 35, 38]. Теорему 1 поширюють також на інші типи матричних рівнянь, наприклад, для матричних рівнянь $AX - \hat{X}B = C$ та $X - A\hat{X}B = C$ над полем кватерніонів [32].

У праці [30] встановлено зв'язок між еквівалентністю блочно-трикутної матриці з кількістю блоків більше двох і блочно-діагональної матриці з однаковими блочними діагоналями та існуванням розв'язку системи матричних рівнянь типу Сильвестра.

Узагальнюють теорему Рота також і для систем матричних рівнянь Сильвестра над полями дійсних і комплексних чисел [26, 27]. У праці [49] для системи двох матричних рівнянь Сильвестра

$$A_1X_1 - Y_1B_1 = C_1,$$

$$A_2X_2 - Y_2B_2 = C_2$$

над полем комплексних чисел у термінах рівності рангів певних блочних матриць, складених із коефіцієнтів цих двох матричних рівнянь, встановлено необхідні і достатні умови існування однієї спільної компоненти розв'язку $X_1 = X_2$ або $Y_1 = Y_2$. Також у цій праці із застосуванням результатів [60] отримано формули для розв'язків із певними умовами щодо рангів.

Очевидно, що теорема 1 є критерієм розв'язності рівняння Сильвестра, якщо його матриці-коефіцієнти A, B, C задано над кільцями, у яких сформульовано критерій еквівалентності матриць. Такими є поле $\mathbb{F}$, поліноміальне кільце $\mathbb{F}[\lambda]$, кільце головних ідеалів, адекватне кільце [37] і, в загальному, кільце елементарних дільників [42]. Нагадаємо, що кільцями елементарних дільників називають кільця, у яких кожна матриця $A \in M(m, n, R)$, $m \le n$, є еквівалентною до нормальної форми Сміта S^A, тобто

$$S^A = UAV = \operatorname{diag}(\mu_1^A, \ldots, \mu_r^A, 0, \ldots, 0),$$

$$\mu_r^A \neq 0, \qquad \mu_i^A \mid \mu_{i+1}^A, \qquad i = 1, \ldots, r-1,$$

де $r = \operatorname{rang} A$, U та V − оборотні матриці відповідних розмірів, тобто $U \in GL(m,R)$, $V \in GL(n,R)$, і μ_i^A − інваріантні множники матриці A.

Нагадаємо, що через $M(n,R)$ і $M(m,n,R)$ позначаємо кільце $n \times n$-матриць і множину $m \times n$-матриць над R відповідно, а через $GL(n,R)$ − повну лінійну групу кільця, тобто групу оборотних $n \times n$-матриць над R.

Тепер можемо сформулювати такий

Наслідок 1. *Нехай R − кільце елементарних дільників і $A, B, C \in M(n,R)$. Тоді матричне рівняння $AX - YB = C$ є розв'язним тоді й тільки тоді, коли матриці M і N мають одні й ті самі системи інваріантних множників, тобто їхні нормальні форми Сміта є однаковими.*

У статті [51] доведено, що, якщо визначники матриць A і B, задані над областю головних ідеалів, є взаємно простими, то блочно-трикутна матриця M і блочно-діагональна матриця N вигляду (6) мають однакові нормальні форми Сміта, тобто M і N є еквівалентними. Звідси отримуємо наступний наслідок.

Наслідок 2. *Нехай R − кільце елементарних дільників і $A, B, C \in M(n,R)$. Якщо визначники матриць A і B є взаємно простими, то матричне рівняння $AX - YB = C$ є розв'язним.*

3. Матричні поліноміальні рівняння Сильвестра. Оскільки матричні рівняння Сильвестра і Ляпунова є частковими типами загального рівняння Сильвестра, то у випадку, коли матриці-коефіцієнти цих рівнянь задано над полем, їхнє розв'язування зводиться до розв'язування систем лінійних рівнянь над полем.

Матричні поліноміальні рівняння типу Сильвестра $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ виникають у різних областях математики і відіграють фундаментальну роль у багатьох задачах теорії керування і динамічних систем [40, 43, 44, 64].

Зрозуміло, що запропонований вище метод для рівнянь Сильвестра з матрицями-коефіцієнтами над полем для матричних рівнянь над кільцями, в тому числі над поліноміальними кільцями, не годиться. Для їхнього розв'язання необхідні принципово нові методи побудови розв'язків цих рівнянь та відомості про їхню структуру.

Важливою є класифікація розв'язків таких рівнянь, зокрема за їхніми степенями. Якщо таке матричне поліноміальне рівняння розв'язне, то, очевидно, що воно має розв'язки необмежених зверху степенів. Тому однією із задач є встановлення мінімального степеня розв'язків рівнянь.

У праці [22] одержано такий результат.

Теорема 2 [22**]**. *Визначники двох регулярних поліноміальних матриць $T(\lambda)$ і $U(\lambda)$ порядків ℓ і r та степенів n і m відповідно є взаємно простими (тобто мають найбільший спільний дільник, незалежний від λ) тоді й тільки тоді, коли рівняння*

$$T(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)U(\lambda) = E$$

для заданої $\ell \times r$-матриці E з елементами з поля $\mathbb{F}$ має єдиний розв'язок $(X(\lambda), Y(\lambda))$ такий, що

$$\deg X(\lambda) < \deg U(\lambda), \qquad \deg Y(\lambda) < \deg T(\lambda).$$

Крім того, автор зауважує, що ця теорема є правильною і для рівняння

$$T(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)U(\lambda) = C(\lambda),$$

коли матриця $C(\lambda)$ задовольняє умову $\deg C(\lambda) \le \deg T(\lambda) + \deg U(\lambda) - 2$.

Із теореми 2 отримуємо умову існування і єдиності розв'язків матричного поліноміального рівняння Сильвестра з вільним членом певного степеня.

Наслідок 3. *Матричне рівняння* $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$, *для якого* $\deg C(\lambda) \le \deg A(\lambda) + \deg B(\lambda) - 2$, *має єдиний розв'язок* $(X(\lambda), Y(\lambda))$ *такий, що* $\deg X(\lambda) < \deg B(\lambda)$ *і* $\deg Y(\lambda) < \deg A(\lambda)$ *тоді й тільки тоді, коли* $(\det A(\lambda), \det B(\lambda)) = 1$.

Наведемо деякі способи побудови розв'язків матричних поліноміальних рівнянь типу Сильвестра.

3.1. Супровідні матриці матричних поліномів і розв'язки матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра. Опишемо розв'язки обмежених степенів і розглянемо метод їхньої побудови в загальному випадку. Метод ґрунтується на зведенні матричного поліноміального рівняння Сильвестра до матричного рівняння Сильвестра над полем з використанням поняття супровідних матриць матричних поліномів [15].

Нехай $\mathbb{F}$ – довільне поле, $\mathbb{F}[\lambda]$ – кільце поліномів над $\mathbb{F}$. Розглянемо матричне рівняння:

$$A(\lambda)X(\lambda) - Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda), \tag{8}$$

де

$$A(\lambda) = \sum_{i=0}^{r} A_i \lambda^{r-i}, \qquad A_i \in M(n, \mathbb{F}), \qquad \det A_0 \ne 0,$$

$$B(\lambda) = \sum_{i=0}^{s} B_i \lambda^{s-i}, \qquad B_i \in M(m, \mathbb{F}), \qquad \det B_0 \ne 0,$$

$$\mathrm{C}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\ell} C_i \lambda^{\ell-i}, \qquad C_i \in M(n, m, \mathbb{F}),$$

$X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ – невідомі матриці з $M(n, m, \mathbb{F}[\lambda])$. Приймемо, що $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ – унітальні матриці, тобто $A_0 = I_n$, $B_0 = I_m$ – одиничні матриці порядків n і m відповідно.

Теорема 3. *Якщо рівняння* (8) *є розв'язним, то воно має розв'язки*

$$(X_1(\lambda), Y_1(\lambda)) \qquad і \qquad (X_2(\lambda), Y_2(\lambda))$$

такі, що

$$\deg X_1(\lambda) < \deg B(\lambda), \qquad \deg Y_2(\lambda) < \deg A(\lambda).$$

Ці розв'язки є єдиними тоді й тільки тоді, коли

$$(\det A(\lambda), \det B(\lambda)) = 1.$$

При побудові розв'язків використаємо супровідні матриці матричних многочленів $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$:

$$W_A = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -A_r \\ I_n & 0 & \dots & 0 & -A_{r-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -A_2 \\ 0 & 0 & \dots & I_n & -A_1 \end{Vmatrix},$$

$$W_B = \begin{Vmatrix} 0 & I_m & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & I_m \\ -B_s & -B_{s-1} & \dots & -B_2 & -B_1 \end{Vmatrix}.$$

Далі покладемо

$$R_0 = -C_0, \qquad R_p = -C_p - \sum_{i=0}^{p-1} R_i B_{p-i}, \qquad p = 1,2,\ldots,\ell-(r+s-1),$$

$$S_q = C_{\ell-q} + \sum_{i+j=\ell-q} R_i B_j, \qquad q = 0,1,\ldots,\ell, \qquad B_0 = I_m .$$

Запишемо рівняння

$$W_A Z - Z W_B = D, \tag{9}$$

де $Z = \left\|Z_{ij}\right\|_1^{r,s}$, Z_{ij} – невідомі $n \times m$-матриці над $\mathbb{F}$, а $D = \left\|D_{ij}\right\|_1^{r,s}$, D_{ij} – $n \times m$-матриці над $\mathbb{F}$, що задовольняють співвідношення

$$\sum_{i+j=t+2} D_{ij} = S_t, \qquad t = 0,1,\ldots,r+s-2.$$

Тоді, якщо Z – розв'язок рівняння (9), то розв'язком рівняння (8) є матриці

$$X(\lambda) = \sum_{i=0}^{s-1} X_i \lambda^{s-1-i}, \qquad Y(\lambda) = \sum_{i=0}^{\ell-s} Y_i \lambda^{\ell-s-i}, \qquad \ell \geq r+s-1,$$

де

$$X_{s-i} = -Z_{ri}, \qquad i = 1,2,\ldots,s,$$

$$Y_u = R_u, \qquad u = 0,1,\ldots,\ell-(r+s),$$

$$Y_{\ell-(r+s-1)} = -Z_{rs} + R_{\ell-(r+s-1)}, \qquad Y_{\ell-(s-1)-j} = -Z_{js}, \qquad j = 1,2,\ldots,r-1.$$

Навпаки, з розв'язку $(X(\lambda), Y(\lambda))$ рівняння (8) можна скласти розв'язок Z рівняння (9).

Оскільки

$$\det(E_{rn}\lambda - W_A) = \det A(\lambda), \qquad \det(E_{sm}\lambda - W_B) = \det B(\lambda),$$

то рівняння (9) має єдиний розв'язок тоді й тільки тоді, коли

$$\left(\det(E_{rn}\lambda - W_A), \det(E_{sm}\lambda - W_B)\right) = 1.$$

Такий самий підхід до розв'язування матричного поліноміального рівняння Сильвестра $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ з використанням супровідних матриць пізніше застосовано у працях [24, 61].

3.2. Розв'язки обмежених степенів матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра. Зазначимо, що автори роботи [31] розв'язки обмежених степенів матричного поліноміального рівняння Сильвестра назвали мінімальними, а також встановили умови їх існування і єдиності.

Теорема 4 [31**]**. *Нехай у рівнянні*

$$A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$$

матриці $A(\lambda)$ *та* $B(\lambda)$ *є неособливими* $n \times n$- *та* $m \times m$-*матрицями і хоча б одна з них є регулярною. Визначники матриць* $A(\lambda)$, $B(\lambda)$ *є взаємно простими тоді й тільки тоді, коли це рівняння має єдиний мінімальний розв'язок* $(X(\lambda), Y(\lambda))$ *такий, що*

$$\deg X(\lambda) < \deg B(\lambda), \qquad \deg Y(\lambda) < \deg A(\lambda)$$

для будь-якої заданої матриці $C(\lambda)$, *що задовольняє умову*

$$\deg C(\lambda) \leq \deg A(\lambda) + \deg B(\lambda) - 1.$$

Зауважимо, що, коли у рівнянні $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ обидві матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ є нерегулярними і рівняння є розв'язним, то воно може і не мати таких мінімальних розв'язків $(X(\lambda), Y(\lambda))$, тобто таких, для яких виконується умова теореми 4.

Умови існування розв'язків певного вигляду поліноміального матричного рівняння типу Сильвестра розглянуто в монографії [40]. У праці [41] у термінах рангів певних блочних матриць над полем встановлено необхідні та достатні умови існування розв'язку $(X(\lambda), Y(\lambda))$ нульового степеня матричного рівняння Сильвестра, тобто $\deg X(\lambda) = 0$ і $\deg Y(\lambda) = 0$, а також розв'язку $(X(\lambda), Y(\lambda))$ такого, що

$$\deg X(\lambda) = 0 \quad \text{і} \quad \deg Y(\lambda) \le \max(\deg A(\lambda), \deg C(\lambda)) - \deg B(\lambda).$$

3.3. Стандартна форма набору поліноміальних матриць відносно напівскалярної еквівалентності та розв'язки матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра. Розглянемо метод побудови розв'язків матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$ у випадку, коли $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ – довільні неособливі поліноміальні матриці [6, 28]. Опишемо розв'язки обмежених степенів таких рівнянь і встановимо умови їхньої єдиності. Для цього використаємо стандартні форми з інваріантними множниками на головних діагоналях, до яких зводимо набір поліноміальних матриць напівскалярно еквівалентними перетвореннями.

Зауважимо, що стандартна форма поліноміальних матриць використовувалась для опису факторизацій поліноміальних матриць [8, 17–19].

Розглянемо далі матричне поліноміальне рівняння

$$A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda), \tag{10}$$

де $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ – неособливі матриці з $M(n, \mathbb{F}[\lambda])$.

Згідно з [9, 16], пара неособливих матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ напівскалярними еквівалентними перетвореннями зводиться до спеціальних трикутних форм з інваріантними множниками на головних діагоналях такого вигляду:

$$T^A(\lambda) = UA(\lambda)V_A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \mu_1^A(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{a}_{21}(\lambda)\mu_1^A(\lambda) & \mu_2^A(\lambda) & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1}(\lambda)\mu_1^A(\lambda) & \tilde{a}_{n2}(\lambda)\mu_2^A(\lambda) & \dots & \mu_n^A(\lambda) \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

де $U \in GL(n, \mathbb{F})$, $V_A(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$, $\mu_i^A(\lambda)$ – інваріантні множники матриці $A(\lambda)$, та $\deg \tilde{a}_{ij}(\lambda) < \deg \mu_i^A(\lambda) - \deg \mu_j^A(\lambda)$, якщо $\tilde{a}_{ij}(\lambda) \ne 0$ ($\deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A > 0$), і $\tilde{a}_{ij}(\lambda) \equiv 0$, якщо $\deg \mu_i^A - \deg \mu_j^A = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $i > j$;

$$T^B(\lambda) = UB(\lambda)V_B(\lambda) = \begin{Vmatrix} \mu_1^B(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{b}_{21}(\lambda)\mu_1^B(\lambda) & \mu_2^B(\lambda) & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{b}_{n1}(\lambda)\mu_1^B(\lambda) & \tilde{b}_{n2}(\lambda)\mu_2^B(\lambda) & \dots & \mu_n^B(\lambda) \end{Vmatrix}, \tag{12}$$

де $V_B(\lambda) \in GL(n, \mathbb{F}[\lambda])$, $\mu_i^B(\lambda)$ – інваріантні множники матриці $B(\lambda)$, та $\deg \tilde{b}_{ij}(\lambda) < \deg \mu_i^B(\lambda) - \deg \mu_j^B(\lambda)$, якщо $\tilde{b}_{ij}(\lambda) \ne 0$ ($\deg \mu_i^B - \deg \mu_j^B > 0$), і $\tilde{b}_{ij}(\lambda) \equiv 0$, якщо $\deg \mu_i^B - \deg \mu_j^B = 0$, $i, j = 1, \dots, n$, $i > j$.

Трикутні форми $T^A(\lambda)$ і $T^B(\lambda)$ називаємо стандартними формами поліноміальних матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ відповідно. Стандартні форми скінченного набору поліноміальних матриць у випадку алгебрично замкненого поля характеристики нуль встановлено у праці [9], а у випадку довільного поля – у [16].

Набагато пізніше подібний результат для однієї неособливої поліноміальної матриці одержано в роботі [25].

Враховуючи стандартні форми $T^A(\lambda)$, $T^B(\lambda)$ матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ вигляду (11) і (12), з рівняння (10) отримуємо таке матричне рівняння:

$$T^A(\lambda)\tilde{X}(\lambda) + \tilde{Y}(\lambda)T^B(\lambda) = \tilde{C}(\lambda), \qquad (13)$$

де

$$\tilde{X}(\lambda) = V_A^{-1}(\lambda)X(\lambda)V_B(\lambda), \quad \tilde{Y}(\lambda) = UY(\lambda)U^{-1}, \quad \tilde{C}(\lambda) = UC(\lambda)V_B(\lambda). \qquad (14)$$

Рівняння (10) і (13) є еквівалентними, тобто рівняння (10) має розв'язок тоді й тільки тоді, коли рівняння (13) має розв'язок, і кожному розв'язку $(X(\lambda), Y(\lambda))$ рівняння (10) відповідає розв'язок $(\tilde{X}(\lambda), \tilde{Y}(\lambda))$ рівняння (13) згідно зі співвідношеннями (14), і навпаки.

Із матричного рівняння (13) одержуємо достатньо просту систему лінійних рівнянь над кільцем поліномів $\mathbb{F}[\lambda]$:

$$\sum_{\ell=1}^{i} \mu_\ell^A(\lambda)\tilde{a}_{i\ell}(\lambda)\tilde{x}_{\ell j}(\lambda) + \sum_{k=j}^{n} \mu_j^B(\lambda)\tilde{b}_{kj}(\lambda)\tilde{y}_{ik}(\lambda) = \tilde{c}_{ij}(\lambda), \quad i, j = 1, \ldots, n, \qquad (15)$$

де $\tilde{a}_{ij} = \tilde{b}_{ij} = \tilde{c}_{ij} = 0$ при $i < j$, $\tilde{a}_{ii} = \tilde{b}_{ii} = 1$ та $\tilde{C}(\lambda) = \left\|\tilde{c}_{ij}(\lambda)\right\|_1^n$.

Розв'язування цієї системи зводиться до послідовного розв'язування лінійних двочленних поліноміальних діофантових рівнянь.

Побудуємо розв'язки системи рівнянь (15). Для цього розіб'ємо систему (15) на $p = 2n - 1$ підсистем таким чином. Кожна t-та підсистема складається з t рівнянь. Одержуємо її із системи (15) при $i = 1, 2, \ldots, t$ та $j = n - (t - i)$ відповідно, тобто $j = n - (t-1), n - (t-2), \ldots, n$. Якщо $t > n$, тобто $t = n + q$, $q = 1, 2, \ldots, n - 1$, тоді t-та підсистема складається з рівнянь системи (15) при $i = q + 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n - q$.

Перша підсистема системи (15) (тобто, коли $t = 1$, а тому $i = 1$, $j = n$) складається з одного рівняння:

$$\mu_1^A(\lambda)\tilde{x}_{1n}(\lambda) + \mu_n^B(\lambda)\tilde{y}_{1n}(\lambda) = \tilde{c}_{1n}(\lambda). \qquad (16)$$

Позначимо $d_{i,j}^{(A,B)}(\lambda) = (\mu_i^A(\lambda), \mu_j^B(\lambda))$. Оскільки рівняння (16) має розв'язок, то $d_{1,n}^{(A,B)}(\lambda) \mid \tilde{c}_{1n}(\lambda)$. Тому одержуємо рівняння

$$\frac{\mu_1^A(\lambda)}{d_{1,n}^{(A,B)}(\lambda)}\tilde{x}_{1n}(\lambda) + \frac{\mu_n^B(\lambda)}{d_{1,n}^{(A,B)}(\lambda)}\tilde{y}_{1n}(\lambda) = \frac{\tilde{c}_{1n}(\lambda)}{d_{1,n}^{(A,B)}(\lambda)}, \qquad (17)$$

де $\tilde{x}_{1n}(\lambda) = u_{1n}(\lambda)$, $\tilde{y}_{1n}(\lambda) = v_{1n}(\lambda)$, $(\tilde{x}_{1n}(\lambda), \tilde{y}_{1n}(\lambda))$ – розв'язок рівняння (16).

Поділимо $v_{1n}(\lambda)$ на $\dfrac{\mu_1^A(\lambda)}{d_{1,n}^{(A,B)}(\lambda)}$:

$$v_{1n}(\lambda) = \frac{\mu_1^A(\lambda)}{d_{1,n}^{(A,B)}(\lambda)} s_{1n}(\lambda) + \tilde{y}_{1n}^{(1)}(\lambda),$$

де $\deg \tilde{y}_{1n}^{(1)}(\lambda) < \deg \dfrac{\mu_1^A(\lambda)}{d_{1,n}^{(A,B)}(\lambda)}$. Тоді $(\tilde{x}_{1n}^{(1)}(\lambda), \tilde{y}_{1n}^{(1)}(\lambda))$ – розв'язок рівняння (17) і рівняння (16):

$$\tilde{x}_{1n}^{(1)}(\lambda) = u_{1n}(\lambda) + \frac{\mu_n^B(\lambda)}{d_{1,n}^{(A,B)}(\lambda)} s_{1n}(\lambda), \qquad \tilde{y}_{1n}^{(1)}(\lambda) = v_{1n}(\lambda) - \frac{\mu_1^A(\lambda)}{d_{1,n}^{(A,B)}(\lambda)} s_{1n}(\lambda),$$

у якому

$$\deg \tilde{y}_{1n}^{(1)}(\lambda) < \deg \mu_1^A(\lambda) - \deg\left(\mu_1^A(\lambda), \mu_n^B(\lambda)\right).$$

Другу підсистему (тобто, коли $t = 2$) отримаємо, покладаючи $i = 1,2$ та $j = n-1, n$. Ця підсистема складається з таких двох рівнянь:

$$\mu_1^A(\lambda)\tilde{x}_{1,n-1}(\lambda) + \mu_{n-1}^B(\lambda)\tilde{y}_{1,n-1}(\lambda) + \tilde{b}_{n,n-1}(\lambda)\mu_{n-1}^B(\lambda)\tilde{y}_{1n}(\lambda) = \tilde{c}_{1,n-1}(\lambda), \quad (18)$$

$$\tilde{a}_{n-1,1}(\lambda)\mu_1^A(\lambda)\tilde{x}_{1n}(\lambda) + \mu_2^A(\lambda)\tilde{x}_{2n}(\lambda) + \mu_n^B(\lambda)\tilde{y}_{2n}(\lambda) = \tilde{c}_{2n}(\lambda). \quad (19)$$

Міркуючи, як у попередньому випадку, отримаємо розв'язки рівнянь (18) і (19):

$$\left(\tilde{x}_{1,n-1}(\lambda),\ \tilde{y}_{1,n-1}(\lambda)\right),$$

де $\deg \tilde{y}_{1,n-1}(\lambda) < \deg \mu_1^A(\lambda) - \deg\left(\mu_1^A(\lambda), \mu_{n-1}^B(\lambda)\right)$, та

$$\left(\tilde{x}_{2n}(\lambda),\ \tilde{y}_{2n}(\lambda)\right),$$

де $\deg \tilde{y}_{2n}(\lambda) < \deg \mu_2^A(\lambda) - \deg\left(\mu_2^A(\lambda), \mu_n^B(\lambda)\right)$.

Далі розглядаємо наступну підсистему і т. д. Таким чином, міркуючи аналогічно, одержимо розв'язки $\left(\tilde{x}_{ij}(\lambda), \tilde{y}_{ij}(\lambda)\right)$ системи (15) такі, що

$$\deg \tilde{y}_{ij}(\lambda) < \deg \mu_i^A(\lambda) - \deg\left(\mu_i^A(\lambda), \mu_n^B(\lambda)\right), \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Із розв'язків системи (15) складаємо розв'язки матричного рівняння (13):

$$\tilde{X}(\lambda) = \left\| \tilde{x}_{ij}(\lambda) \right\|_1^n, \qquad \tilde{Y}(\lambda) = \left\| \tilde{y}_{ij}(\lambda) \right\|_1^n$$

і за співвідношеннями

$$X(\lambda) = V_A(\lambda)\tilde{X}(\lambda)V_B^{-1}(\lambda), \qquad Y(\lambda) = U^{-1}\tilde{Y}(\lambda)U, \quad (20)$$

які отримуємо з формул (14), записуємо розв'язки матричного рівняння (10).

Таким чином, опис розв'язків матричного рівняння (10) зведено до опису розв'язків еквівалентного матричного рівняння (13).

Спосіб розв'язування двочленних поліноміальних діофантових рівнянь наведено, наприклад, у праці [44]. Сформулюємо його у вигляді такої леми.

Лема 1. *Діофантове поліноміальне рівняння*

$$a(\lambda)x(\lambda) + b(\lambda)y(\lambda) = c(\lambda), \quad (21)$$

де $a(\lambda)$, $b(\lambda)$, $c(\lambda)$ *– відомі, а* $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ *– невідомі поліноми з* $\mathbb{F}[\lambda]$, *де* $\mathbb{F}$ *– поле, має розв'язок тоді й тільки тоді, коли* $\left(a(\lambda), b(\lambda)\right) = d(\lambda) | c(\lambda)$. *Якщо рівняння (21) є розв'язним, то воно має розв'язок* $\left(x(\lambda), y(\lambda)\right)$ *такий, що* $\deg x(\lambda) < \deg b(\lambda)$. *Розв'язок* $\left(x(\lambda), y(\lambda)\right)$ *поліноміального рівняння такий, що* $\deg x(\lambda) < \deg b(\lambda)$ *є єдиним тоді й тільки тоді, коли* $(a(\lambda), b(\lambda)) = 1$.

Покладемо $a(\lambda) = a_1(\lambda)d(\lambda)$, $b(\lambda) = b_1(\lambda)d(\lambda)$, $c(\lambda) = c_1(\lambda)d(\lambda)$, де $\left(a_1(\lambda), b_1(\lambda)\right) = 1$. Тоді з двочленного поліноміального рівняння (21) отримуємо рівняння

$$a_1(\lambda)x(\lambda) + b_1(\lambda)y(\lambda) = c_1(\lambda), \quad (22)$$

з якого записуємо порівняння

$$a_1(\lambda)x(\lambda) \equiv c_1(\lambda) \pmod{b_1(\lambda)}.$$

Таке порівняння має єдиний розв'язок

$$x(\lambda) = x_0(\lambda), \qquad x_0(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]_{b_1},$$

де $\mathbb{F}[\lambda]_{b_1}$ – повна множина лишків за модулем $b_1(\lambda)$. Тоді з рівняння (22) відповідне значення змінної $y(\lambda) = y_0(\lambda)$ визначається однозначно:

$$y_0(\lambda) = \frac{c_1(\lambda) - a_1(\lambda)x_0(\lambda)}{b_1(\lambda)}.$$

Отже, двочленне поліноміальне рівняння (22) має єдиний розв'язок $(x_0(\lambda), y_0(\lambda))$ такий, що $x_0(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]_{b_1}$. Тоді формули для визначення загального розв'язку двочленного поліноміального рівняння (21) можемо записати так:

$$x(\lambda) = x_0(\lambda) + \frac{b(\lambda)}{d(\lambda)} r(\lambda) + b(\lambda)k(\lambda),$$

$$y(\lambda) = y_0(\lambda) - \frac{a(\lambda)}{d(\lambda)} r(\lambda) - a(\lambda)k(\lambda),$$

де $r(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]_d$, $k(\lambda) \in \mathbb{F}[\lambda]$.

3.3.1. Опис структури розв'язків матричних поліноміальних рівнянь типу Сильвестра. Опишемо структуру розв'язків матричних поліноміальних рівнянь (10) і (13).

Надалі через $\operatorname{row}_i(A)$ і $\operatorname{col}_j(A)$ будемо позначати i-й рядок і j-й стовпець матриці $A(\lambda)$. Степенем нуля будемо вважати мінус нескінченність: $\deg 0 = -\infty$.

Встановимо межі для степенів розв'язків матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра.

Теорема 5. *Нехай матричне рівняння* (13) *є розв'язним. Тоді воно має розв'язки* $(\tilde{X}_1(\lambda), \tilde{Y}_1(\lambda))$ *та* $(\tilde{X}_2(\lambda), \tilde{Y}_2(\lambda))$ *такі, що*

$$\deg \operatorname{row}_i(\tilde{Y}_1(\lambda)) < \deg \mu_i^A(\lambda), \qquad i = 1, \dots, n,$$

$$\deg \operatorname{col}_j(\tilde{X}_2(\lambda)) < \deg \mu_j^B(\lambda), \qquad j = 1, \dots, n,$$

де $\mu_i^A(\lambda)$, $\mu_j^B(\lambda)$ *– інваріантні множники матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *відповідно.*

Матриця $\tilde{Y}(\lambda)$ із розв'язку $(\tilde{X}(\lambda), \tilde{Y}(\lambda))$ матричного рівняння (13) має таку структуру.

Наслідок 4. *Нехай форма Сміта матриці* $A(\lambda)$ *з матричного рівняння* (10) *має вигляд*

$$S^A(\lambda) = \operatorname{diag}\left(\mu_1^A(\lambda), \dots, \mu_p^A(\lambda), \mu_{p+1}^A(\lambda), \dots, \mu_{p+q}^A(\lambda), \mu_{p+q+1}^A(\lambda), \dots, \mu_n^A(\lambda)\right),$$

де

$$\deg \mu_i^A(\lambda) = 0, \quad \textit{тобто } \mu_i^A(\lambda) = 1, \quad \textit{при} \quad i = 1, \dots, p,$$

$$\deg \mu_i^A(\lambda) = 1 \qquad \textit{при} \quad i = p+1, \dots, p+q,$$

$$\deg \mu_i^A(\lambda) > 1 \qquad \textit{при} \quad i = p+q+1, \dots, n.$$

Тоді компонента $\tilde{Y}(\lambda)$ *розв'язку* $(\tilde{X}(\lambda), \tilde{Y}(\lambda))$ *матричного рівняння* (13) *має таку структуру*:

$$\tilde{Y}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \tilde{Y}^{(p)}(\lambda) \\ \tilde{Y}^{(q)}(\lambda) \\ \tilde{Y}^{(n-(p+q))}(\lambda) \end{Vmatrix},$$

де

$$\tilde{Y}^{(p)}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \mathrm{row}_1(\tilde{Y}(\lambda)) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_p(\tilde{Y}(\lambda)) \end{Vmatrix}, \qquad \tilde{Y}^{(q)}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \mathrm{row}_{p+1}(\tilde{Y}(\lambda)) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_{p+q}(\tilde{Y}(\lambda)) \end{Vmatrix},$$

$$\tilde{Y}^{(n-(p+q))}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \mathrm{row}_{p+q+1}(\tilde{Y}(\lambda)) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_n(\tilde{Y}(\lambda)) \end{Vmatrix},$$

та

$\tilde{Y}^{(p)}(\lambda) = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ – *нульова матриця відповідного розміру*),

$\tilde{Y}^{(q)}(\lambda)$ – *скалярна матриця, тобто* $\tilde{Y}^{(q)}(\lambda) \in M(q, n, \mathbb{F})$,

$$\deg \mathrm{row}_i\big(\tilde{Y}^{(n-(p+q))}(\lambda)\big) < \deg \mu_i^A(\lambda) - \deg\big(\mu_i^A(\lambda), \mu_1^B(\lambda)\big), \quad i = p+q+1, \ldots, n.$$

Аналогічно можемо описати стовпцеву структуру першої компоненти $\tilde{X}(\lambda)$ розв'язку $\big(\tilde{X}(\lambda), \tilde{Y}(\lambda)\big)$ матричного рівняння (13).

Наслідок 5. *Нехай форма Сміта матриці* $B(\lambda)$ *із матричного рівняння* (10) *має вигляд*

$$S^B(\lambda) = \mathrm{diag}\big(\mu_1^B(\lambda), \ldots, \mu_s^B(\lambda), \mu_{s+1}^B(\lambda), \ldots, \mu_{s+t}^B(\lambda), \mu_{s+t+1}^B(\lambda), \ldots, \mu_n^B(\lambda)\big),$$

де

$\deg \mu_j^B(\lambda) = 0$, *тобто* $\mu_j^B(\lambda) = 1$, *при* $j = 1, \ldots, s$,

$\deg \mu_j^B(\lambda) = 1$ *при* $j = s+1, \ldots, s+t$,

$\deg \mu_j^B(\lambda) > 1$ *при* $j = s+t+1, \ldots, n$.

Тоді розв'язне матричне рівняння (13) *має такі розв'язки*:

$$\tilde{X}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \tilde{X}^{(s)}(\lambda) & \tilde{X}^{(t)}(\lambda) & \tilde{X}^{(n-(s+t))}(\lambda) \end{Vmatrix}, \qquad \tilde{Y}(\lambda),$$

де

$$\tilde{X}^{(s)}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \mathrm{col}_1(\tilde{X}(\lambda)) & \ldots & \mathrm{col}_s(\tilde{X}(\lambda)) \end{Vmatrix},$$

$$\tilde{X}^{(t)}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \mathrm{col}_{s+1}(\tilde{X}(\lambda)) & \ldots & \mathrm{col}_{s+t}(\tilde{X}(\lambda)) \end{Vmatrix},$$

$$\tilde{X}^{(n-(s+t))}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \mathrm{col}_{s+t+1}(\tilde{X}(\lambda)) & \ldots & \mathrm{col}_n(\tilde{X}(\lambda)) \end{Vmatrix},$$

та

$\tilde{X}^{(s)}(\lambda) = \mathbf{0}$,

$\tilde{X}^{(t)}(\lambda)$ – *скалярна матриця, тобто* $\tilde{X}^{(t)}(\lambda) \in M(t, n, \mathbb{F})$,

$$\deg \mathrm{col}_j\big(\tilde{X}^{(n-(s+t))}(\lambda)\big) < \deg \mu_j^B(\lambda) - \deg\big(\mu_1^A(\lambda), \mu_j^B(\lambda)\big), \quad j = s+t+1, \ldots, n.$$

Враховуючи співвідношення (20) між розв'язками $\big(X(\lambda), Y(\lambda)\big)$ і $\big(\tilde{X}(\lambda), \tilde{Y}(\lambda)\big)$ матричних рівнянь (10) і (13), одержуємо оцінку степенів розв'язків $\big(X(\lambda), Y(\lambda)\big)$ матричного рівняння (10).

Теорема 6. *Розв'язне матричне рівняння* (10) *має розв'язки* $(X_1(\lambda), Y_1(\lambda))$ *і* $(X_2(\lambda), Y_2(\lambda))$ *такі, що* $\deg Y_1(\lambda) < \deg S^A(\lambda)$ *та* $\deg X_2(\lambda) < \deg S^B(\lambda)$.

3.3.2. Існування єдиних розв'язків обмежених степенів матричних лінійних поліноміальних рівнянь типу Сильвестра. Розв'язки обмежених степенів матричних поліноміальних рівнянь можуть бути єдиними. Наступною теоремою встановлюємо критерій єдиності таких розв'язків.

Теорема 7. *Розв'язки матричного рівняння* (13):

$$(\tilde{X}_1(\lambda), \tilde{Y}_1(\lambda)) \text{ такий, що } \deg \operatorname{row}_i(\tilde{Y}_1(\lambda)) < \deg \mu_i^A(\lambda),\ i = 1, \dots, n,$$

і

$$(\tilde{X}_2(\lambda), \tilde{Y}_2(\lambda)) \text{ такий, що } \deg \operatorname{col}_j(\tilde{X}_2(\lambda)) < \deg \mu_j^B(\lambda),\ j = 1, \dots, n,$$

є єдиними тоді й тільки тоді, коли $(\mu_n^A(\lambda), \mu_n^B(\lambda)) = 1$, *де* $\mu_n^A(\lambda)$, $\mu_n^B(\lambda)$ – *інваріантні множники матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *із матричного рівняння* (10).

Наслідок 6. *Матричне рівняння* (10), *визначники матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *якого є взаємно простими, тобто* $(\det A(\lambda), \det B(\lambda)\ ) = 1$, *має такі розв'язки*:

$$(X_1(\lambda), Y_1(\lambda)) \text{ такий, що } \deg Y_1(\lambda) < \deg S^A(\lambda),$$

і

$$(X_2(\lambda), Y_2(\lambda)) \text{ такий, що } \deg X_2(\lambda) < \deg S^B(\lambda).$$

Цей наслідок є узагальненням результатів [31] та [15] для матричного поліноміального рівняння (10), у якому матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ можуть бути нерегулярними матрицями.

Теорема 8. *Якщо* $(\det A(\lambda), \det B(\lambda)) = 1$ *і*

$$\deg \tilde{c}_{ij}(\lambda) < \deg \mu_i^A(\lambda) + \deg \mu_n^B(\lambda), \qquad i, j = 1, \dots, n,$$

то матричне поліноміальне рівняння (13) *має розв'язок* $(\tilde{X}(\lambda), \tilde{Y}(\lambda))$ *такий, що*

$$\deg \operatorname{col}_j(\tilde{X}(\lambda)) < \deg \mu_n^B(\lambda), \qquad \deg \operatorname{row}_i(\tilde{Y}(\lambda)) < \deg \mu_i^A(\lambda),$$

$i, j = 1, \dots, n$, *і цей розв'язок єдиний.*

Запропонований у цьому підпункті метод застосуємо до розв'язування такого прикладу.

Приклад 1. Розглянемо матричне рівняння типу (10), у якому

$$A(\lambda) = \begin{Vmatrix} \frac{3}{2}\lambda^2 + \lambda & \lambda + \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\lambda + 1 \\ -\lambda^2 & 1 & -\lambda \\ 2\lambda^2 + \lambda - 1 & \lambda & 2\lambda + 1 \end{Vmatrix},$$

$$B(\lambda) = \begin{Vmatrix} \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda & \frac{1}{2}\lambda & -2\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda \\ \lambda^2 - 2 & \lambda & 7\lambda \\ \lambda & 0 & -2\lambda^2 \end{Vmatrix},$$

$$C(\lambda) = \left\| \begin{matrix} -\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - 1 & -\frac{1}{2} & 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 7\lambda + 1 \\ -\lambda & -1 & 0 \\ \lambda^2 - 2 & 0 & 3\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda \end{matrix} \right\|$$

– матриці над кільцем поліномів $\mathbb{Q}[\lambda]$, де $\mathbb{Q}$ – поле раціональних чисел, і $X(\lambda) = \left\| x_{ij}(\lambda) \right\|_1^3$, $Y(\lambda) = \left\| y_{ij}(\lambda) \right\|_1^3$ – невідомі поліноміальні матриці. На основі критерію Рота таке матричне рівняння має розв'язок.

Зведемо поліноміальні матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ до стандартних форм щодо напівскалярної еквівалентності вигляду (11) та (12) відповідно:

$$T^A(\lambda) = UA(\lambda)V_A(\lambda) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & \lambda & (\lambda+1)^2 \end{matrix} \right\|,$$

$$T^B(\lambda) = UB(\lambda)V_B(\lambda) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda^2 \end{matrix} \right\|,$$

де

$$U = \left\| \begin{matrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \ V_A(\lambda) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \\ -\lambda & 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \ V_B(\lambda) = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & 3\lambda \\ -\lambda & 1 & -1 - 3\lambda^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Тоді з матричного рівняння (10) з коефіцієнтами, заданими в умові цього прикладу, отримаємо матричне рівняння вигляду (13), у якому

$$\tilde{C}(\lambda) = UC(\lambda)V_B(\lambda) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & \lambda \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 - \lambda^2 & -1 & 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \end{matrix} \right\|$$

та $\tilde{X}(\lambda) = V_A^{-1}(\lambda)X(\lambda)V_B(\lambda) = \left\| \tilde{x}_{ij}(\lambda) \right\|_1^3$, $\tilde{Y}(\lambda) = UY(\lambda)U^{-1} = \left\| \tilde{y}_{ij}(\lambda) \right\|_1^3$ – невідомі матриці. З матричного рівняння вигляду (13) тепер запишемо систему поліноміальних рівнянь:

$$\tilde{x}_{11}(\lambda) + \tilde{y}_{11}(\lambda) - 2\tilde{y}_{12}(\lambda) + \lambda\tilde{y}_{13}(\lambda) = 0,$$

$$\tilde{x}_{12}(\lambda) + \lambda\tilde{y}_{12}(\lambda) = 0,$$

$$\tilde{x}_{13}(\lambda) + \lambda^2\tilde{y}_{13}(\lambda) = \lambda,$$

$$\tilde{x}_{21}(\lambda) + \tilde{y}_{21}(\lambda) - 2\tilde{y}_{22}(\lambda) + \lambda\tilde{y}_{23}(\lambda) = 0,$$

$$\tilde{x}_{22}(\lambda) + \lambda\tilde{y}_{22}(\lambda) = -1,$$

$$\tilde{x}_{23}(\lambda) - \lambda^2\tilde{y}_{23}(\lambda) = 1,$$

$$-\tilde{x}_{11}(\lambda) + \lambda\tilde{x}_{21}(\lambda) + (\lambda+1)^2\tilde{x}_{31}(\lambda) + \tilde{y}_{31}(\lambda) - 2\tilde{y}_{32}(\lambda) + \lambda\tilde{y}_{33}(\lambda) = -1 - \lambda^2,$$

$$-\tilde{x}_{12}(\lambda) + \lambda\tilde{x}_{22}(\lambda) + (\lambda+1)^2\tilde{x}_{32}(\lambda) + \lambda\tilde{y}_{32}(\lambda) = -1,$$

$$-\tilde{x}_{13}(\lambda) + \lambda\tilde{x}_{23}(\lambda) + (\lambda+1)^2\tilde{x}_{33}(\lambda) + \lambda^2\tilde{y}_{33}(\lambda) = 3\lambda^2 + 3\lambda + 1. \quad (23)$$

З огляду на наслідок 4 розв'язок матричного рівняння (13) має таку структуру:

$$\tilde{X}(\lambda) = \left\| \tilde{x}_{ij}(\lambda) \right\|_1^3, \qquad \deg \tilde{x}_{ij}(\lambda) < 2,$$

$$\tilde{Y}(\lambda) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tilde{y}_{31}(\lambda) & \tilde{y}_{32}(\lambda) & \tilde{y}_{33}(\lambda) \end{Vmatrix}, \qquad \deg \tilde{y}_{3j}(\lambda) < 2, \qquad j = 1,2,3.$$

Враховуючи цю структуру, отримаємо розв'язок системи поліноміальних рівнянь (23), який у матричному записі має вигляд

$$\tilde{X}_0(\lambda) = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \lambda \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{Vmatrix}, \qquad \tilde{Y}_0(\lambda) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{Vmatrix}.$$

Згідно з теоремою 8, розв'язок $(\tilde{X}_0(\lambda), \tilde{Y}_0(\lambda))$ матричного поліноміального рівняння (13) є єдиним.

Таким чином, розв'язок матричного поліноміального рівняння (10) із використанням співвідношень (20) має вигляд

$$X_0(\lambda) = V_A(\lambda)\tilde{X}_0(\lambda)V_B^{-1}(\lambda) = \begin{Vmatrix} \lambda & 1 & \lambda+1 \\ -\lambda & -1 & \lambda^2+1 \\ -\lambda^2 & -\lambda & -\lambda^2+1 \end{Vmatrix},$$

$$Y_0(\lambda) = U^{-1}\tilde{Y}_0(\lambda)U = \begin{Vmatrix} 1 & 1/2 & -1-\lambda \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1-\lambda \end{Vmatrix}.$$

Тоді загальний розв'язок матричного поліноміального рівняння (13) є таким:

$$\tilde{X}(\lambda) = \begin{Vmatrix} -t_{13}\lambda + 2t_{12} - t_{11} & -t_{12}\lambda + 1 & -t_{13}\lambda^2 + \lambda \\ -t_{23}\lambda + 2t_{22} - t_{21} & -t_{22}\lambda - 1 & -t_{23}\lambda^2 + 1 \\ t_{31} & t_{32}\lambda + \lambda(1 - t_{12} + t_{22}\lambda) & \tilde{x}_{33}(\lambda) \end{Vmatrix},$$

$$\tilde{Y}(\lambda) = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ \tilde{y}_{31}(\lambda) & \tilde{y}_{32}(\lambda) & \tilde{y}_{33}(\lambda) \end{Vmatrix},$$

де

$$\tilde{x}_{33}(\lambda) = t_{33}\lambda^2 - (2\lambda - 1)(3\lambda^2 + 3\lambda + 1 - t_{13}\lambda^2 + t_{23}\lambda^3),$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}_{31}(\lambda) = {} & -1 - \lambda^2 - t_{11} + 2t_{12} - t_{13}\lambda - \lambda(t_{21} - 2t_{22} + t_{23}\lambda) - \\ & - 2\lambda(\lambda + 2)(1 - t_{12} + t_{22}\lambda) - \\ & - \lambda(2\lambda + 3)(3\lambda^2 + 3\lambda + 1 - t_{13}\lambda^2 + t_{23}\lambda^3) - \\ & - (\lambda + 1)^2(t_{31} + 2t_{32} - t_{33}\lambda), \end{aligned}$$

$$\tilde{y}_{32}(\lambda) = -t_{32}(\lambda + 1)^2 - \lambda(\lambda + 2)(1 - t_{12} + t_{22}\lambda),$$

$$\tilde{y}_{33}(\lambda) = -t_{33}(\lambda + 1)^2 + (2\lambda + 3)(3\lambda^2 + 3\lambda + 1 - t_{13}\lambda^2 + t_{23}\lambda^3),$$

де $t_{ij} \in \mathbb{Q}[\lambda]$, $i, j = 1,2,3$.

Загальний розв'язок матричного поліноміального рівняння (10) із коефіцієнтами, заданими в умові цього прикладу, знаходимо за допомогою співвідношень (20). ◄

4. Матричні рівняння типу Сильвестра над різними кільцями. У **п. 3** досліджено матричні рівняння Сильвестра над поліноміальними кільцями. Тут розглянемо методи побудови розв'язків матричних рівнянь Сильвестра над іншими кільцями [2–4, 29].

Зазначимо, що матричне рівняння Сильвестра та діофантове матричне рівняння над квадратичними кільцями та кільцем цілих ґауссових чисел розглядалися у працях [12, 13, 46]. Для розв'язання таких матричних рівнянь та опису їхніх розв'язків застосовано стандартну форму пари матриць відносно введеної (z,k)-еквівалентності над квадратичними кільцями [7, 11, 45, 47].

Матричні рівняння типу Сильвестра над тілом розглядались у праці [32]. У роботі [52] при певних припущеннях встановлено умови розв'язності матричного рівняння $AXB + CYD = E$ над областю головних ідеалів.

4.1. Опис розв'язків матричного рівняння Сильвестра із застосуванням форм Ерміта. Нехай R – адекватне кільце [37], тобто комутативна область цілісності, в якій кожний скінченно породжений ідеал є головним і для довільних елементів $a, b \in R$, де $a \neq 0$, елемент a може бути представлений як $a = cd$, де $(c,b) = 1$ та $(d_i, b) \neq 1$ для довільного необоротного дільника d_i елемента d.

Розглянемо лінійне різностороннє матричне рівняння типу Сильвестра

$$AX - YB = C, \tag{24}$$

де $A \in M(m,R)$, $B \in M(n,R)$, $C \in M(m,n,R)$ – відомі неособливі матриці, а $X, Y \in M(m,n,R)$ – невідомі матриці. Для такого матричного рівняння немає загального методу відшукання його розв'язків. Встановимо критерій однозначності певного вигляду розв'язків лінійного матричного рівняння (24) та опишемо спосіб їхньої побудови. У праці [3] ця задача розв'язана, коли R – кільце головних ідеалів.

Для матриць $A \in M(m,R)$, $B \in M(n,R)$ існують матриці $P \in GL(m,R)$, $Q \in GL(n,R)$ відповідно такі, що

$$AP = H^A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{Vmatrix}, \qquad QB = H^B = \begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Тут H^A і H^B – форми Ерміта матриць A і B, тобто елементи $a_{ii}, b_{ss} \in R'$, $a_{ij} \in R_{a_{ii}}$, $i,j = 1,\dots,m$, $i < j$; $b_{st} \in R_{b_{tt}}$, $s,t = 1,\dots,n$, $s < t$, де R' – повна множина неасоційованих елементів кільця R; $R_{a_{ii}}$, $R_{b_{tt}}$ – повні системи лишків за модулями a_{ii}, b_{tt}.

Тоді з рівняння (24) можемо записати таке матричне рівняння:

$$H^A W - Z H^B = C, \tag{25}$$

де $W = P^{-1}X = \|w_{ij}\|_1^{m,n}$, $Z = YQ^{-1} = \|z_{ij}\|_1^{m,n}$.

Побудова розв'язків рівняння (25) зводиться до розв'язування системи лінійних діофантових рівнянь над кільцем R:

$$\sum_{k=i}^{m} a_{ik} w_{kj} - \sum_{\ell=1}^{j} b_{\ell j} z_{i\ell} = c_{ij}, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n,$$

яку одержуємо з рівняння (25). Знаходимо розв'язок цієї системи рівнянь шляхом послідовного розв'язування лінійних діофантових рівнянь

$$a_{ii} w_{ij} - b_{jj} z_{ij} = c_{ij}, \quad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n,$$

які зводяться до розв'язування порівнянь

$$-b_{jj} z_{ij} \equiv c_{ij} \pmod{a_{ii}}.$$

Із розв'язку системи діофантових рівнянь складаємо розв'язок

$$W = \left\| w_{ij} \right\|_1^{m,n}, \qquad Z = \left\| z_{ij} \right\|_1^{m,n}$$

матричного рівняння (25) і розв'язок

$$X = PW, \qquad Y = ZQ$$

матричного рівняння (24).

Теорема 9. *Матричне рівняння* (25) *має єдиний розв'язок*

$$W_0 = \left\| w_{ij}^{(0)} \right\|_1^{m,n}, \qquad Z_0 = \left\| z_{ij}^{(0)} \right\|_1^{m,n}$$

такий, що $z_{ij}^{(0)} \in R_{a_{ii}}$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, *тоді й тільки тоді, коли* $(\det H^A, \det H^B) = 1$.

Наслідок 7. *Нехай* R *– евклідове кільце і* $\delta(a)$ *– норма елемента* $a \in R$. *Тоді матричне рівняння* (25) *має єдиний розв'язок*

$$W_0 = \left\| w_{ij}^{(0)} \right\|_1^{m,n}, \qquad Z_0 = \left\| z_{ij}^{(0)} \right\|_1^{m,n}$$

такий, що $\delta(z_{ij}^{(0)}) < \delta(a_{ii})$, $i = 1,\ldots,m$, $j = 1,\ldots,n$, *тоді й тільки тоді, коли* $(\det H^A, \det H^B) = 1$.

4.2. Стандарні форми щодо узагальненої еквівалентності матриць і їхнє застосування до розв'язування матричних рівнянь Сильвестра. У працях [53, 54] введено поняття узагальненої еквівалентності пар матриць. Пари (A_1, A_2) та (B_1, B_2) матриць $A_i, B_i \in M(n, R)$, $i = 1,2$, називають узагальнено еквівалентними, якщо $A_i = UB_iV_i$, $i = 1,2$, для деяких оборотних матриць U та V_i над кільцем R. Відносно узагальненої еквівалентності встановлено стандартну форму. Сформулюємо цей результат для пари неособливих матриць.

Теорема 10. *Нехай матриці* A *і* B *– неособливі та*

$$S^A = \Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

$$S^B = \Psi = \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$$

– їхні нормальні форми Сміта. Тоді пара матриць (A, B) *узагальнено еквівалента до пари* (S^A, T^B), *тобто існують оборотні матриця* U, V_A і V_B *такі, що*

$$UAV_A = S^A, \qquad UBV_B = T^B,$$

де T^B *має вигляд*

$$T^B = \begin{Vmatrix} \psi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ t_{21}\psi_1 & \psi_2 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ t_{n1}\psi_1 & t_{n2}\psi_2 & \ldots & \psi_n \end{Vmatrix},$$

$t_{ij} \in R_{d_{ij}}$, $d_{ij} = \left(\dfrac{\varphi_i}{\varphi_j}, \dfrac{\psi_i}{\psi_j} \right)$, $i, j = 1,\ldots,n$, $i > j$.

Пару матриць (S^A, T^B) називають стандартною формою пари матриць (A, B).

Якщо пара матриць (A, B) узагальнено еквівалентна до пари діагональних матриць (S^A, S^B), то її називають діагоналізовною.

Наслідок 8. *Нехай* $A, B \in M(n, R)$. *Якщо* $\left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}, \frac{\psi_n}{\psi_1}\right) = 1$, *то пара матриць* (A, B) *є діагоналізовною.*

Отже, якщо $(\det S^A, \det S^B) = 1$, то стандартною формою пари матриць (A, B) є пара діагональних матриць (S^A, S^B).

Сформулюємо критерій діагоналізовності.

Теорема 11. *Нехай* $A, B \in M(n, R)$ *і* A *– неособлива матриця. Тоді пара матриць* (A, B) *є узагальнено еквівалентною до пари діагональних матриць* (S^A, S^B) *тоді й тільки тоді, коли матриці* $(\operatorname{adj} A)B$ *і* $(\operatorname{adj} S^A)S^B$ *еквівалентні, де* $\operatorname{adj} A$ *– приєднана матриця матриці* A, *тобто матриця, складена з алгебричних доповнень її елементів, і транспонована.*

Застосуємо стандартну форму пари матриць щодо узагальненої еквівалентності до опису розв'язків матричного рівняння Сильвестра над адекватним кільцем [29].

Розглянемо матричне рівняння

$$AX + YB = C, \tag{26}$$

де $A, B, C \in M(n, R)$ – відомі неособливі матриці, а $X, Y \in M(n, R)$ – невідомі матриці.

Подібно, як у **п**. 3 було запропоновано для поліноміального рівняння Сильвестра із застосуванням стандартної форми для набору поліноміальних матриць, матричне рівняння (26) з використанням стандартної форми (S^A, T^B) пари матриць (A, B) можемо звести до еквівалентного матричного рівняння

$$S^A \tilde{X} + \tilde{Y} T^B = \tilde{C}, \tag{27}$$

де $\tilde{X} = V_A^{-1} X V_B = \left\|\tilde{x}_{ij}\right\|_1^n$, $\tilde{Y} = UYU^{-1} = \left\|\tilde{y}_{ij}\right\|_1^n$, $\tilde{C} = UCV_B$, та далі шукати розв'язки отриманого матричного рівняння (27).

Нехай пара матриць A і B із матричного рівняння (26) є діагоналізовною, тобто

$$S^A = UAV_A = \Phi = \operatorname{diag}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n),$$

$$S^B = UBV_B = \Psi = \operatorname{diag}(\psi_1, \ldots, \psi_n)$$

для деяких матриць $U, V_A, V_B \in GL(n, R)$.

Тоді з матричного рівняння (26) одержимо таке рівняння:

$$S^A \tilde{X} + \tilde{Y} S^B = \tilde{C}, \tag{28}$$

де $\tilde{X} = V_A^{-1} X V_B = \left\|\tilde{x}_{ij}\right\|_1^n$, $\tilde{Y} = UYU^{-1} = \left\|\tilde{y}_{ij}\right\|_1^n$ і $\tilde{C} = UCV_B$. Матричне рівняння (28) еквівалентне до рівняння (26). Із матричного рівняння (28) одержуємо систему лінійних діофантових рівнянь

$$\varphi_i \tilde{x}_{ij} + \psi_j \tilde{y}_{ij} = \tilde{c}_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{29}$$

Частковий розв'язок $\left(\tilde{x}_{ij}^0, \tilde{y}_{ij}^0\right)$ кожного рівняння системи (29) знаходимо як частковий розв'язок $\tilde{x}_{ij}^0$ порівняння $\varphi_i \tilde{x}_{ij} \equiv \tilde{c}_{ij} \pmod{\psi_j}$, $\tilde{x}_{ij}^0 \in R_{\psi_j}$, і $\tilde{y}_{ij}^0 = \dfrac{\tilde{c}_{ij} - \varphi_i \tilde{x}_{ij}^0}{\psi_j}$, де R_{ψ_j} – повна система лишків за модулем ψ_j. Із цих розв'язків системи рівнянь (29) складаємо частковий розв'язок $\tilde{X}_0 = \left\|\tilde{x}_{ij}^0\right\|_1^n$, $\tilde{Y}_0 = \left\|\tilde{y}_{ij}^0\right\|_1^n$, де $\tilde{x}_{ij}^0 \in R_{\psi_j}$, $i, j = 1, \ldots, n$, матричного рівняння (28).

Вигляд загальних розв'язків матричних рівнянь (26) і (28) визначають такі твердження.

Теорема 12. *Нехай* $\tilde{X}_0 = \left\| \tilde{x}_{ij}^0 \right\|_1^n, \tilde{Y}_0 = \left\| \tilde{y}_{ij}^0 \right\|_1^n$ *– частковий розв'язок матричного рівняння* (28), *тобто* $(\tilde{x}_{ij}^0, \tilde{y}_{ij}^0)$ *– часткові розв'язки системи рівнянь* (29). *Загальний розв'язок матричного рівняння* (28) *має вигляд*

$$\tilde{X} = \tilde{X}_0 + W_\Psi + K\Psi, \qquad \tilde{Y} = \tilde{Y}_0 - W_\Phi - K\Phi,$$

де $W_\Psi = \left\| \frac{\psi_j}{d_{ij}} w_{ij} \right\|_1^n$, $W_\Phi = \left\| \frac{\varphi_i}{d_{ij}} w_{ij} \right\|_1^n$, w_{ij} *– довільні елементи з* $R_{d_{ij}}$, $d_{ij} = (\varphi_i, \psi_j)$, $\Phi = S^A$ *і* $\Psi = S^B$ *– нормальні форми Сміта матриць* A *і* B *з матричного рівняння* (26), K *– довільна матриця з кільця матриць* $M(n, R)$. *Загальний розв'язок матричного рівняння* (26) *знаходимо зі співвідношень*

$$X = V_A \tilde{X} V_B^{-1}, \qquad Y = U^{-1} \tilde{Y} U. \tag{30}$$

Наступна теорема дає критерій єдиності часткового розв'язку матричного рівняння (28).

Теорема 13. *Матричне рівняння* (28) *має єдиний частковий розв'язок* $\tilde{X}_0 = \left\| \tilde{x}_{ij}^0 \right\|_1^n, \tilde{Y}_0 = \left\| \tilde{y}_{ij}^0 \right\|_1^n$ *такий, що* $\tilde{x}_{ij}^0 \in R_{\psi_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, *тоді й тільки тоді, коли* $(\det S^A, \det S^B) = 1$.

Теорема 14. *Нехай* $\tilde{X}_0 = \left\| \tilde{x}_{ij}^0 \right\|_1^n, \tilde{Y}_0 = \left\| \tilde{y}_{ij}^0 \right\|_1^n$, *де* $\tilde{x}_{ij}^0 \in R_{\psi_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, *– єдиний частковий розв'язок матричного рівняння* (28). *Тоді загальний розв'язок цього рівняння має вигляд*

$$\tilde{X} = \tilde{X}_0 + K\Psi, \qquad \tilde{Y} = \tilde{Y}_0 - K\Phi,$$

де $\Phi = S^A$ *і* $\Psi = S^B$ *– нормальні форми Сміта матриць* A *і* B *з матричного рівняння* (26), K *– довільна матриця з кільця матриць* $M(n, R)$. *Загальний розв'язок матричного рівняння* (26) *знаходимо зі співвідношень* (30).

4.3. Матричні рівняння типу Сильвестра з блочними коефіцієнтами та їхні розв'язки. Блочні матриці виникають і використовуються у різноманітних розділах математики, наприклад, у теорії стійкості [50], у задачах цілочислового програмування [23], під час опису факторизацій матриць [55], при дослідженні еквівалентностей матриць різного типу [5].

Матричні рівняння Сильвестра вигляду $AX + YB = C$ з трикутними чи блочно-трикутними матрицями-коефіцієнтами виникають, зокрема, при описі факторизацій матриць у кільцях блочних матриць [55], а також у випадках, коли матричні коефіцієнти рівняння $AX + YB = C$ можуть бути зведені еквівалентними перетвореннями до трикутного чи блочно-трикутного вигляду [13, 29]. У праці [39] побудовано алгоритми розв'язування такого матричного рівняння з коефіцієнтами A і B у трикутній або квазітрикутній формі над полем дійсних чисел. Знаходженню розв'язків блочно-трикутного вигляду матричного рівняння $BXC = A$ над довільним полем присвячено працю [59], де запропоновано необхідні та достатні умови існування такого розв'язку.

Нехай R – комутативна область головних ідеалів.

Надалі через $M_T(n, R)$ і $M_{BT}(n_1, \dots n_k, R)$ позначатимемо відповідно підкільця верхніх трикутних і блочно-трикутних матриць кільця $M(n, R)$, тобто матриця

$$F = \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ 0 & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & f_{nn} \end{Vmatrix} \in M_T(n,R),$$

а матриця

$$T = \begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1k} \\ 0 & T_{22} & \cdots & T_{2k} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_{kk} \end{Vmatrix} \in M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R),$$

де $T_{ii} \in M(n_i,R)$, $i = 1,\ldots,k$; $T_{ij} \in M(n_i,n_j,R)$, $i,j = 1,\ldots,k$, $i < j$; $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$.

Розглянемо далі матричне рівняння Сильвестра

$$AX - YB = C, \tag{31}$$

де матриці $A,B,C \in M_{BT}(n_1,\ldots n_k,R)$, тобто є неособливими верхніми блочно-трикутними матрицями

$$A = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{kk} \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ 0 & B_{22} & \cdots & B_{2k} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_{kk} \end{Vmatrix}, \tag{32}$$

де $A_{ii}, B_{ii} \in M(n_i,R)$, $i = 1,\ldots,k$; $A_{ij}, B_{ij} \in M(n_i,n_j,R)$, $i,j = 1,\ldots,k$, $i < j$, $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, а $X, Y \in M(n,R)$ – невідомі матриці.

Треба зазначити, що, якщо матричне рівняння (31) має розв'язок у кільці $M(n,R)$, то воно може не мати трикутного та блочно-трикутного розв'язку, тобто розв'язку у кільцях $M_T(n,R)$ та $M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$.

У працях [2, 4] авторами встановлено умови існування розв'язків матричного рівняння (31) із трикутними та блочно-трикутними коефіцієнтами A, B і C у кільцях трикутних та блочно-трикутних матриць відповідно над комутативною областю головних ідеалів R.

Теорема 15. *Нехай у матричному рівнянні* (31) *коефіцієнти* $A,B,C \in M_{BT}(n_1,\ldots n_k,R)$, *тобто є верхніми блочно-трикутними матрицями вигляду* (32), *і нехай виконуються умови*:

i) *матриці* $\begin{Vmatrix} A_{ii} & C_{ii} \\ 0 & B_{ii} \end{Vmatrix}$ *та* $\begin{Vmatrix} A_{ii} & 0 \\ 0 & B_{ii} \end{Vmatrix}$ *еквівалентні для усіх* $i = 1,\ldots,k$;

ii) $(\det A_{ii}, \det B_{i+j,i+j}) = 1$ *для усіх* $i = 1,\ldots,k-1$, $j = 1,\ldots,k-i$.

Тоді матричне рівняння (31) *має розв'язок* (X,Y), *де* $X,Y \in M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$, *тобто* X *та* Y *є верхніми блочно-трикутними матрицями.*

Наслідок 9. *Нехай у матричному рівнянні* (31) *коефіцієнти* $A,B,C \in M_{BT}(n_1,\ldots n_k,R)$. *Якщо* $(\det A, \det B) = 1$, *то матричне рівняння* (31) *має розв'язок* (X,Y), *де* $X,Y \in M_{BT}(n_1,\ldots,n_k,R)$.

Позначимо через

$$S^{A_{ii}} = \operatorname{diag}(\mu_1^{A_{ii}}, \ldots, \mu_{n_i}^{A_{ii}}), \qquad S^{B_{ii}} = \operatorname{diag}(\mu_1^{B_{ii}}, \ldots, \mu_{n_i}^{B_{ii}}), \quad i = 1, \ldots, k,$$

нормальні форми Сміта діагональних блоків A_{ii}, B_{ii} матриць A та B відповідно.

Наслідок 10. *Нехай у матричному рівнянні* (31) *коефіцієнти* $A, B, C \in M_{BT}(n_1, \ldots n_k, R)$. *Якщо матриці* $\left\| \begin{matrix} A_{ii} & C_{ii} \\ 0 & B_{ii} \end{matrix} \right\|$ *та* $\left\| \begin{matrix} A_{ii} & 0 \\ 0 & B_{ii} \end{matrix} \right\|$ *еквівалентні для усіх* $i = 1, \ldots, k$ *та останні інваріантні множники блоків* A_{ii} *матриці* A *та* $B_{i+j,i+j}$ *матриці* B *є взаємно простими, тобто* $\left(\mu_{n_i}^{A_{ii}}, \mu_{n_{i+j}}^{B_{i+j,i+j}} \right) = 1$ *для усіх* $i = 1, \ldots, k-1$, $j = 1, \ldots, k-i$, *тоді матричне рівняння* (31) *має розв'язок* (X, Y), *де* $X, Y \in M_{BT}(n_1, \ldots, n_k, R)$.

Для матричного рівняння Сильвестра над комутативним кільцем головних ідеалів із трикутними коефіцієнтами A, B і C у праці [4] встановлено необхідні і достатні умови існування трикутних розв'язків. Доведено також, що не існує матричного рівняння такого вигляду із трикутними коефіцієнтами A, B і C, яке має лише трикутні розв'язки.

Нехай у матричному рівнянні (31) матриці $A, B, C \in M_T(n, R)$ є неособливими матрицями трикутного вигляду.

Теорема 16. *Нехай матричне рівняння* (31) *з трикутними коефіцієнтами* $A, B, C \in M_T(n, R)$ *є розв'язним. Матричне рівняння* (31) *має розв'язки того самого трикутного вигляду, що й матриці* A, B *і* C, *тоді й тільки тоді, коли найбільші спільні дільники* (a_{ii}, b_{ii}) *діагональних елементів* a_{ii} *та* b_{ii} *матриць* A *і* B *є дільниками діагональних елементів* c_{ii} *матриці* C, *тобто* $(a_{ii}, b_{ii}) \mid c_{ii}$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 17. *Нехай трикутні коефіцієнти матричного рівняння* (31) $A, B, C \in M_T(n, R)$ *і нехай* $(a_{ii}, b_{ii}) \mid c_{ii}$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n$. *Якщо* $\left(b_{ii}, \prod_{j=i+1}^{n} a_{jj} \right) = 1$ *для всіх* $i = 1, \ldots, n-1$, *то таке матричне рівняння має розв'язки, і серед них є розв'язки того самого трикутного вигляду, що й матриці* A, B *і* C.

Наслідок 11. *Якщо визначники матриць-коефіцієнтів* A *і* B *матричного рівняння* (31) *з трикутними коефіцієнтами* A, B *і* C *є взаємно простими, то таке матричне рівняння має розв'язки, і серед них є розв'язки того самого трикутного вигляду, що й матриці* A, B *і* C.

Теорема 18. *Нехай матричне рівняння* (31) *з трикутними коефіцієнтами* A, B *і* C *має трикутні розв'язки того самого вигляду, що й матриці* A, B *і* C. *Тоді таке матричне рівняння має і нетрикутні розв'язки.*

1. *Алиев Ф. А., Ларин В. Б.* Особые случаи в задачах оптимизации стационарных линейных систем, функционирующих по принципу обратной связи // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 3. – С. 3–26.
   Те саме: *Aliev F. A., Larin V. B.* Special cases in optimization problems for stationary linear closed-loop systems // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 3. P. 251–273. – https://doi.org/10.1023/A:1024433417982.
2. *Джалюк Н. С.* Існування розв'язку матричного рівняння типу Сильвестра у кільці блочно-трикутних матриць // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2021. – Вип. 19. – С. 79–83. – https://doi.org/10.15407/apmm2021.19.79-83.

3. *Джалюк Н. С.* Однозначність клітково-трикутних факторизацій матриць над кільцями головних ідеалів // Доп. НАН України. – 2010. – № 1. – С. 7–12.
4. *Джалюк Н. С.* Розв'язки матричного рівняння $AX + YB = C$ з трикутними коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2019. – **62**, № 2 . – С. 26–31.
Те саме: *Dzhaliuk N. S.* Solutions of the matrix equation $AX + YB = C$ with triangular coefficients // J. Math. Sci. – 2022. – **261**, No. 1. – P. 25–32. – https://doi.org/10.1007/s10958-022-05734-x.
5. *Джалюк Н. С., Петричкович В. М.* Еквівалентність матриць у кільці $M(n,R)$ та в його підкільцях // Укр. мат. журн. – 2021. – **73**, № 12. – С. 1612–1618. – https://doi.org/10.37863/umzh.v73i12.6858.
Те саме: *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* Equivalence of matrices in the ring $M(n,R)$ and its subrings // Ukr. Math. J. – 2022. – **73**, No. 12. – P. 1865–1872. – https://doi.org/10.1007/s11253-022-02034-0.
6. *Джалюк Н., Петричкович В.* Напівскалярна еквівалентність поліноміальних матриць та розв'язування матричних поліноміальних рівнянь Сильвестра // Мат. вісн. НТШ. – 2012. – **9**. – С. 81–88.
7. *Зеліско В. Р., Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Про еквівалентність матриць над квадратичними евклідовими кільцями // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2006. – Вип. 4. – С. 16–21.
8. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. – 282 с.
9. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
10. *Кореневский Д. Г.* Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений (алгебраические критерии). – Киев: Наук. думка, 1992. – 148 с.
11. *Ладзоришин Н. Б.* Про еквівалентність пар матриць, визначники яких є степенями простих чисел, над квадратичними евклідовими кільцями // Карпат. мат. публ. – 2013. – **5**, № 1 – С. 63–69. – https://doi.org/10.15330/cmp.5.1.63-69.
12. *Ладзоришин Н. Б.* Цілочислові розв'язки матричних лінійних односторонніх і різносторонніх рівнянь над квадратичними кільцями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58**, № 2 – С. 47–54.
Те саме: *Ladzoryshyn N. B.* Integer solutions of matrix linear unilateral and bilateral equations over quadratic rings // J. Math. Sci. – 2017. – **223**, No. 1. – P. 50–59. – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3337-0.
13. *Ладзоришин Н. Б., Петричкович В. М.* Стандартна форма матриць над квадратичними кільцями відносно (z,k)-еквівалентності та структура розв'язків матричних двобічних лінійних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 2. – С. 49–56.
Те саме: *Ladzoryshyn N. B., Petrychkovych V. M.* Standard form of matrices over quadratic rings with respect to the (z,k) –equivalence and the structure of solutions of bilateral matrix linear equations // J. Math. Sci. – 2021. – **253**, No. 1. – P. 54–62. – https://doi.org/10.1007/s10958-021-05212-w.
14. *Мазко А. Г.* Робастная устойчивость и стабилизация динамических систем. Методы матричных и конусных неравенств // Математика і її застосування: Праці Ін-ту математики НАН України. – **102**. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2016. – 332 с.
15. *Петричкович В. М.* Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизация клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 6. – С 789–796.
Те саме: *Petrichkovich V. M.* Cell-triangular and cell-diagonal factorizations of cell-triangular and cell-diagonal polynomial matrices // Math. Notes. – 1985. – **37**, No. 6. – P. 431–435. – https://doi.org/10.1007/BF01157677.
16. *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1987. – Вып. 26. – С. 13–16.
Те саме: *Petrichkovich V. M.* Semiscalar equivalence and the Smith normal form of polynomial matrices // J. Sov. Math. – 1993. – **66**, No. 1. – P. 2030–2033. – https://doi.org/10.1007/BF01097386.
17. *Петричкович В. М.* Полускалярная эквивалентность и факторизация много-

членных матриц // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 644–649.
Те саме: *Petrichkovich V. M.* Semiscalar equivalence and the factorization of polynomial matrices // Ukr. Math. J. – 1990. – **42**, No. 5. – P. 570–574. – https://doi.org/10.1007/BF01065057.
18. *Петричкович В. М.* Стандартні форми матриць над кільцями відносно різних типів еквівалентностей і їх застосування в теорії факторизації матриць і матричних рівнянь // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2019. – **62,** № 4. – С. 7–27.
Те саме: *Petrychkovych V. M.* Standard forms of the matrices over rings with respect to various types of equivalence and their applications to the theory of matrix factorization and matrix equations // J. Math. Sci. – 2022. – **265**, No. 2. – P. 345–368. – https://doi.org/10.1007/s10958-022-06057-7.
19. *Петричкович В. М.* Узагальнена еквівалентність матриць і їх наборів та факторизація матриць над кільцями. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2015. – 312 с.
20. *Abou-Kandil H., Freiling G., Ionescu V., Jank G.* Matrix Riccati equations in control and systems theory. – Bazel AG: Springer, 2003. – 572 p. – https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8081-7.
21. *Barnett S.* Matrices in control theory with applications to linear programming. – London: Van Nostrand Reingold Company, 1971. – 221 p.
22. *Barnett S.* Regular polynomial matrices having relatively prime determinants // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1969. – **65**, No. 3. – P. 585–590.
23. *Bart H., Wagelmans A. P. M.* An integer programming problem and rank decomposition of block upper triangular matrices // Linear Algebra Appl. – 2000. – **305**, No. 1-3. – P. 107–129. – https://doi.org/10.1016/S0024-3795(99)00219-0.
24. *Chen S., Tian Y.* On solutions of generalized Sylvester equation in polynomial matrices // J. Franklin Inst. – 2014. – **351**, No. 12. – P. 5376–5385. – http://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2014.09.024.
25. *Dias da Silva J. A., Laffey T. J.* On simultaneous similarity of matrices and related questions // Linear Algebra Appl. – 1999. – **291**, No. 1-3. – P. 167–184.
26. *Dmytryshyn A., Futorny V., Klymchuk T., Sergeichuk V.* Generalization of Roth's solvability criteria to systems of matrix equations // Linear Algebra Appl. – 2017. – **527**. – P. 294–302. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2017.04.011.
27. *Dmytryshyn A., Kågström B.* Coupled Sylvester-type matrix equations and block diagonalization // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 2015. – **36**, No. 2. – P. 580–593.
28. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* Solutions of the matrix linear bilateral polynomial equation and their structure // Algebra Discrete Math. – 2019. – **27**, No. 2. – P. 243–251.
29. *Dzhaliuk N. S., Petrychkovych V. M.* The matrix linear unilateral and bilateral equations with two variables over commutative rings // Int. Scholarly Research Network. ISRN Algebra. – **2012**. – Article ID 205478. – 14 p. – https://doi.org/10.5402/2012/205478.
30. *Feinberg R. B.* Equivalence of partitioned matrices // J. Res. Nat. Bur. Stand. – 1976. – **80B**, No. 1. – P. 89–97.
31. *Feinstein J., Bar-Ness Y.* On the uniqueness of the minimal solution to the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$ // J. Franklin Inst. – 1980. – **310**, No. 2. – P. 131–134. – https://doi.org/10.1016/0016-0032(78)90012-1.
32. *Futorny V., Klymchuk T., Sergeichuk V.* Roth's solvability criteria for the matrix equations $AX-\hat{X}B=C$ and $X-A\hat{X}B=C$ over the skew field of quaternions with an involutive automorphism $q\to\hat{q}$ // Linear Algebra Appl. – 2016. – **510.** – P. 246–258. – https://doi.org/10.1016/j.laa.2016.08.022.
33. *Gustafson W. H.* Roth's theorems over commutative rings // Linear Algebra Appl. – 1979. – **23**. – P. 245–251. – https://doi.org/10.1016/0024-3795(79)90106-X.
34. *Hartwig R. E.* Roth's equivalence problem in unit regular rings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1976. – **59**. – P. 39–44. – https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1976-0409543-4.
35. *Hartwig R. E., Patricio P.* On Roth's pseudo equivalence over rings // Electron. J. Linear Algebra. – 2007. – **16**. – P. 111–124.
36. *He Zhuo-Heng.* Pure PSVD approach to Sylvester-type quaternion matrix equations // Electron. J. Linear Algebra. – 2019. – **35**. – P. 266–284.
37. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49**, No. 4. – P. 225–236. – https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1943-07886-X.

38. *Huang L., Liu J.* The extention of Roth's theorem for matrix equations over a ring // Linear Algebra Appl. – 1997. – **259**. – P. 229–235.
39. *Jonsson I., Kågström B.* Recursive blocked algorithms for solving triangular systems. – Part I: One-sided and coupled Sylvester-type matrix equations // ACM Trans. Math. Softw. – 2002. – **28**, No. 4. – P. 392–415.
40. *Kaczorek T.* Polynomial and rational matrices. Applications in dynamical systems theory. – London: Springer, 2007. – 503 p.
41. *Kaczorek T.* Zero-degree solutions to the bilateral polynomial matrix equations // Bull. Polish Acad. Sci. Ser. Techn. Sci. – 1986. – **34**, No. 9–10. – P. 547–552.
42. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.
43. *Kučera V.* Algebraic theory of discrete optimal control for multivariable systems. // Kybernetika. – 1974. – **10**, Suppl. – P. 1–56.
44. *Kučera V.* Algebraic theory of discrete optimal control for single-variable systems. I. Preliminaries // Kybernetika. – 1973. – **9**, No. 2. – P. 94–107.
45. *Ladzoryshyn N. B., Petrychkovych V. M.* The number of standard forms of matrices over imaginary Euclidean quadratic rings with respect to the (z,k)-equivalence // Мат. студії. – 2022. – **57**, № 2. – С. 115–121.
   – https://doi.org/10.30970/ms.57.2.115-121.
46. *Ladzoryshyn N. B., Petrychkovych V. M., Zelisko H. V.* Matrix Diophantine equations over quadratic rings and their solutions // Карпат. мат. публ. – 2020. – **12**, No. 2. – P. 368–375.
   – https://doi.org/10.15330/cmp.12.2.368-375.
47. *Ladzoryshyn N., Petrychkovych V.* Equivalence of pairs of matrices with relatively prime determinants over quadratic rings of principal ideals // Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat. – 2014. – No. 3(76). – P. 38–48.
48. *Lancaster P., Rodman L.* Algebraic Riccati equations. – Oxford: Clarendon Press, 1995. – 498 p.
49. *Liu Yong Hui.* Ranks of solutions of the linear matrix equation $AX+YB=C$ // Comput. Math. Appl. – 2006. – **52**, No. 6-7. – P. 861–872.
50. *Martins F., Pereira E.* Block matrices and stability theory // Tatra Mt. Math. Publ. – 2007. – **38**, No. 4. – P. 147–162.
51. *Newman M.* The Smith normal form of a partitioned matrix // J. Res. Natl. Bur. Stand. – 1974. – **78B**, No. 1. – P. 3–6. – https://doi.org/10.6028/JRES.078B.002.
52. *Özgüler A. B.* The equation $AXB+CYD=E$ over a principal ideal domain // SIAM J. Matrix Anal. Appl. – 1991. – **12**, No. 3. – P. 581–591.
53. *Petrychkovych V.* Generalized equivalence of pairs of matrices // Linear Multilinear Algebra. – 2000. – **48**, No. 2. – P. 179–188.
   – https://doi.org/10.1080/03081080008818667.
54. *Petrychkovych V.* Standard form of pairs of matrices with respect to generalized equivalence // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. **61**. – С. 148–155.
55. *Petrychkovych V., Dzhaliuk N.* Factorizations in the rings of the block matrices // Bul. Acad. Științe Repub. Mold. Mat. – 2017. – No. 3 (85). – P. 23–33.
56. *Roth W. E.* The equations $AX-YB=C$ and $AX-XB=C$ in matrices // Proc. Am. Math. Soc. – 1952. – **3**, No. 3. – P. 392–396.
   – https://doi.org/10.2307/2031890.
57. *Simoncini V.* Computational methods for linear matrix equations // SIAM Review. – 2016. – **58**, No. 3. – P. 377–441.
   – https://doi.org/10.1137/130912839.
58. *Sylvester J. J.* Sur les racines des matrices unitaires // Compt. Rend. – 1882. – **94**. – P. 396–399.
59. *Tian Y.* Completing triangular block matrices with maximal and minimal ranks // Linear Algebra Appl. – 2000. – **321**, No. 1-3. – P. 327–345.
   – https://doi.org/10.1016/S0024-3795(00)00224-X.
60. *Tian Y.* Upper and lower bounds for ranks of matrix expressions using generalized inverses // Linear Algebra Appl. – 2002. – **355**, No. 1-3. – P. 187–214.
   – https://doi.org/10.1016/S0024-3795(02)00345-2.
61. *Tian Y., Xia C.* On the low-degree solution of the Sylvester matrix polynomial equation // Hindawi J. Math. – 2021. – **2021**. – Article ID 4612177. – 4 p.
   – https://doi.org/10.1155/2021/4612177.
62. *Tzekis P. A.* A new algorithm for the solution of a polynomial matrix Diophantine equation // Appl. Math. Comput. – 2007. – **193**, No. 2. – P. 395–407.

63. *Wolovich W. A., Antsaklis P. J.* The canonical Diophantine equations with applications // SIAM J. Control Optim. – 1984. – **22**, No. 5. – P. 777–787.
64. *Zhou B., Yan Z.-B., Duan G.-R.* Unified parametrization for the solutions to the polynomial Diophantine matrix equation and the generalized Sylvester matrix equation // Int. J. Control Autom. Syst. – 2010. – **8**, No. 1. – P. 29–35.
– https://doi.org/10.1007/s12555-010-0104-0.

MATRIX LINEAR BILATERAL EQUATIONS OVER DIFFERENT DOMAINS, METHODS FOR CONSTRUCTION OF SOLUTIONS AND DESCRIPTION OF THEIR STRUCTURE

An overview of the methods of solution of matrix linear bilateral equations, in particular Sylvester-type equations, over different domains and description of structure of their solutions is presented. The main attention is concentrated on extension and generalization of the results obtained by the authors earlier. Based on the standard form of polynomial matrices with respect to semiscalar equivalence, a method for solving matrix polynomial equations of the Sylvester type is developed. The structure of their solutions is investigated. The solutions of bounded degrees are highlighted and the conditions for their uniqueness are presented. A method for construction of solutions of Sylvester matrix equations is proposed over adequate rings, and uniqueness criteria of solutions of a certain form are also established. The conditions for the existence of a solution of Sylvester matrix equation in the rings of triangular and block-triangular matrices over the commutative principal ideal domain are established.

Key words: *polynomial ring, adequate ring, matrix, equivalence, semiscalar equivalence, generalized equivalence, matrix equation, solution.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
03.01.22