

## КВАЗИСТАТИЧНИЙ ТЕРМОПРУЖНИЙ СТАН ШАРУВАТОГО ФУНКЦІОНАЛЬНО-ГРАДІЄНТНОГО ЦИЛІНДРА ЗА ВРАХУВАННЯ ТЕПЛООВОГО ВИПРОМІНЮВАННЯ

Запропоновано методику визначення квазістатичного термопружного стану шаруватих циліндрів із функціонально-градієнтними складовими за врахування теплового випромінювання. Розв'язання задачі теплопровідності передбачає апроксимацію теплофізичних характеристик кусково-сталими функціями від радіальної координати та знаходження у фіксовані моменти часу температур обмежувальних поверхонь із рекурентних лінійних співвідношень. При цьому використано функцію Гріна нестационарної задачі теплопровідності для багатошарового циліндра, лінійні сплайни і узагальнені функції. Деформації і напруження визначено з використанням аналітичного розв'язку системи інтегро-алгебричних рівнянь задачі термопружності в переміщеннях. Його отримано методом послідовних наближень, обмеженим лише першим наближенням. За нульове наближення вибрано розв'язок задачі термопружності для циліндра з кусково-сталими фізико-механічними характеристиками. Наведено результати числових досліджень для тришарового циліндра.

**Ключові слова:** шаруватий циліндр, функціонально-градієнтні матеріали, теплове випромінювання, термопружний стан, узагальнені функції, функції Гріна, лінійні сплайни.

Переважаюча кількість досліджень нестационарних температурних полів і квазістатичного термопружного стану функціонально-градієнтних циліндрів, які перебувають в умовах підвищених температур, виконана за лінійних теплових граничних умов [3, 5, 6 та ін.]. При цьому розглядаються, як правило, односкладові циліндри. Для розв'язання відповідних задач широко використовують методи, які передбачають апроксимацію неперервних фізико-механічних характеристик (ФМХ) кусково-сталими функціями, а у випадку сталого коефіцієнта Пуассона – апроксимацію решти ФМХ степеневими функціями від радіальної координати.

У цій статті запропоновано методику визначення одновимірних нестационарних температурних полів і зумовлених ними напружень у шаруватих циліндрах із функціонально-градієнтними складовими за врахування теплового випромінювання.

**1. Формулювання задачі термопружності.** Розглянемо віднесений до циліндричної системи координат  $r, \varphi, z$  довгий порожнистий циліндр, складений із  $\bar{n}$  концентричних функціонально-градієнтних шарів, кожен з яких займає область  $\tilde{r}_{i-1}^* \leq \tilde{r} \leq \tilde{r}_i^*$ ,  $i = 1, 2, \dots, \bar{n}$ . Вважаємо, що обмежувальні поверхні  $\tilde{r} = \tilde{r}_0 = \tilde{r}_0^*$  та  $\tilde{r} = \tilde{r}_n^*$  перебувають під дією залежних від часу  $\tau$  теплових потоків густин  $\tilde{q}_0 q_0^*(\tau)$  та  $\tilde{q}_n q_n^*(\tau)$  і навантажень  $\sigma_0^*(\tau)$  та  $\sigma_n^*(\tau)$ . Через обмежувальні поверхні відбувається також конвективний теплообмін з середовищами температури  $t_{c0}^*(\tau)$  та  $t_{cn}^*(\tau)$ , а також відвід теплових потоків власного випромінювання згідно з законом Стефана – Больцмана. Шари  $i$ , які ідеально контактують, мають початкову температуру  $t_0^{*(i)}(\tilde{r})$  і нагріваються внутрішніми джерелами тепла густини  $w_0^{(i)} w_t^{(i)}(\tilde{r}, \tau)$ . (Множники біля функцій мають розмірності відповідних величин.) Торцеві поверхні циліндра теплоізовані і перебувають під дією зусиль, рівно-

✉dept19@iapmm.lviv.ua

дійна яких дорівнює  $P^*(\tau)$ . Визначимо нестационарне температурне поле і термопружний стан такого циліндра.

**2. Визначення температурного поля.** Апроксимувавши неперервно залежні від радіальної координати коефіцієнти теплопровідності  $\lambda_t(\tilde{r})$  і об'ємні теплоємності  $c_V(\tilde{r})$  кожного шару кусково-сталими, визначення температурного поля зводимо до розв'язання рівняння теплопровідності [3]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \bar{\lambda}_t(r) \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} \right] = \bar{c}_V(r) \frac{\partial \bar{t}}{\partial \text{Fo}} - \text{Po}(r) \bar{w}_t(r, \text{Fo}), \quad (1)$$

за граничних і початкової умов

$$\left( \bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} - \text{Bi}_0 \bar{t} \right) \Big|_{r=r_0} = -\bar{Q}_0(\text{Fo}) + \text{Sk}_0 [\bar{t}(r_0, \text{Fo}) + T_*]^4, \quad (2)$$

$$\left( \bar{\lambda}_t^{(n)} \frac{\partial \bar{t}}{\partial r} + \text{Bi}_n \bar{t} \right) \Big|_{r=r_n} = \bar{Q}_n(\text{Fo}) - \text{Sk}_n [\bar{t}(r_n, \text{Fo}) + T_*]^4, \quad (2)$$

$$\bar{t} \Big|_{\text{Fo}=0} = \bar{t}_0(r), \quad (3)$$

де функції  $\bar{\lambda}_t(r)$ ,  $\bar{c}_V(r)$ ,  $\text{Po}(r)$ ,  $\bar{t}(r, \text{Fo})$ ,  $\bar{t}_0(r)$  і  $w_t(r, \text{Fo})$  мають вигляд

$$p(r) = p_1 + \sum_{i=1}^{n-1} (p_{i+1} - p_i) S(r - r_i),$$

$$\bar{t}(r, \text{Fo}) = \bar{t}_1(r, \text{Fo}) + \sum_{i=1}^{n-1} [\bar{t}_{i+1}(r, \text{Fo}) - \bar{t}_i(r, \text{Fo})] S(r - r_i),$$

$$\bar{t}_0(r) = \bar{t}_0^{(1)}(r) + \sum_{i=1}^{\bar{n}-1} [\bar{t}_0^{(i+1)}(r) - \bar{t}_0^{(i)}(r)] S(r - r_i^*),$$

$$\bar{w}_t(r, \text{Fo}) = \bar{w}_t^{(1)}(r, \text{Fo}) + \sum_{i=1}^{\bar{n}-1} [\bar{w}_t^{(i+1)}(r, \text{Fo}) - \bar{w}_t^{(i)}(r, \text{Fo})] S(r - r_i^*).$$

Тут  $r = \frac{\tilde{r}}{\ell}$ ,  $r_0 = \frac{\tilde{r}_0}{\ell}$ ,  $\bar{Q}_0(\text{Fo}) = \text{Bi}_0 t_{c0}(\text{Fo}) + \text{Ki}_0 q_0(\text{Fo})$ ,  $\bar{Q}_n(\text{Fo}) = \text{Bi}_n t_{cn}(\text{Fo}) + \text{Ki}_n q_n(\text{Fo})$ ,

$$\text{Fo} = \frac{\lambda_t^* \tau}{c_V^* \ell^2}, \quad \text{Bi}_0 = \frac{\alpha_0 \ell}{\lambda_t^*}, \quad \text{Bi}_n = \frac{\alpha_n \ell}{\lambda_t^*}, \quad \text{Ki}_0 = \frac{\ell \tilde{q}_0}{\lambda_t^* t_s}, \quad \text{Ki}_n = \frac{\ell \tilde{q}_n}{\lambda_t^* t_s}, \quad \text{Sk}_0 = \frac{\ell \tilde{\epsilon}_0 \sigma_0}{\lambda_t^*} t_s^3,$$

$$\text{Sk}_n = \frac{\ell \tilde{\epsilon}_n \sigma_0}{\lambda_t^*} t_s^3, \quad [q_0(\text{Fo}), t_{c0}(\text{Fo}), \sigma_0(\text{Fo}), P(\text{Fo})] = [q_0^*(\tau), t_{c0}^*(\tau), \sigma_0^*(\tau), P^*(\tau)]$$

$$[q_n(\text{Fo}), t_{cn}(\text{Fo}), \sigma_n(\text{Fo})] = [q_n^*(\tau), t_{cn}^*(\tau), \sigma_n^*(\tau)], \quad \bar{\lambda}_t(r) = \frac{\lambda_t(\tilde{r})}{\lambda_t^*}, \quad \bar{c}_V(r) = \frac{c_V(\tilde{r})}{c_V^*},$$

$$\bar{\lambda}_t^{(i)} = \frac{\lambda_t^{(i)}}{\lambda_t^*}, \quad \bar{c}_V^{(i)} = \frac{c_V^{(i)}}{c_V^*}, \quad r_i = \frac{\tilde{r}_i}{\ell}, \quad r_i^* = \frac{\tilde{r}_i^*}{\ell}, \quad \text{Po}_i = \frac{\ell^2 w_0^{(i)}}{c_V^* t_s}, \quad \bar{w}_t^{(i)}(r, \text{Fo}) = w_t^{(i)}(\tilde{r}, \tau),$$

$$\bar{t}_0^{(i)}(r) = \frac{t_0^{(i)}(\tilde{r})}{t_s}, \quad i = 1, \dots, n; \quad \bar{t}(r, \text{Fo}) = \frac{t(r, \tau)}{t_s}, \quad T_* = \frac{273}{t_s}; \quad r_n = r_n^*, \quad \tilde{r}_i - \text{зовнішній}$$

радіус  $i$ -го новоутвореного шару;  $t_s$  - характерна температура;  $\sigma_0$  - стала Стефана - Больцмана;  $\tilde{\epsilon}_j$  - ступінь чорноти;  $\alpha_j$  - коефіцієнт тепловіддачі,  $j=0, n$ ;  $\ell$ ,  $\lambda_t^*$  і  $c_V^*$  - параметри, що мають розмірності одиниці довжини, коефіцієнта теплопровідності і об'ємної теплоємності;  $S(\cdot)$  - функція Гевісайда; похідна за  $r$  є узагальненою;  $n$  - кількість новоутворених шарів.

Розв'язок задачі (1)–(3) з використанням методу функції Гріна [4] подамо у вигляді

$$\bar{t}(r, \text{Fo}) = T_L(r, \text{Fo}) - r_0 \text{Sk}_0 T_0(r, \text{Fo}) - r_n \text{Sk}_n T_n(r, \text{Fo}). \quad (4)$$

Тут

$$\begin{aligned} T_L(r, \text{Fo}) &= r_0 \int_0^{\text{Fo}} G(r, r_0, \text{Fo} - \xi) \bar{Q}_0(\xi) d\xi + r_n \int_0^{\text{Fo}} G(r, r_n, \text{Fo} - \xi) \bar{Q}_n(\xi) d\xi + \\ &+ \int_0^{\text{Fo}} \int_{r_0}^{r_n} \rho \text{Po}(r) G(r, \rho, \text{Fo} - \xi) w_t(\rho, \xi) d\rho d\xi + \\ &+ \int_{r_0}^{r_n} G(r, \rho, \text{Fo}) \bar{c}_V(\rho) t_0(\rho) \rho d\rho, \\ T_j(r, \text{Fo}) &= \int_0^{\text{Fo}} G(r, r_j, \text{Fo} - \xi) \bar{f}_j(\xi) d\xi, \quad \bar{f}_j(\xi) = [\bar{t}(r_j, \xi) + T_*]^4, \quad j = 0, n. \end{aligned}$$

Функція Гріна  $G(r, \rho, \text{Fo})$ , яка задовольняє рівняння

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \bar{\lambda}_t(r) \frac{\partial G}{\partial r} \right] = \bar{c}_V(r) \frac{\partial G}{\partial \text{Fo}},$$

граничні та початкову умови

$$\left( \bar{\lambda}_t^{(1)} \frac{\partial G}{\partial r} - \text{Bi}_0 G \right) \Big|_{r=r_0} = 0, \quad \left( \bar{\lambda}_t^{(n)} \frac{\partial G}{\partial r} + \text{Bi}_n G \right) \Big|_{r=r_n} = 0,$$

$$G|_{\text{Fo}=0} = \frac{1}{\rho \bar{c}_V(\rho)} \delta(r - \rho),$$

має вигляд

$$G(r, \rho, \text{Fo}) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(r, \mu_m) \Phi(\rho, \mu_m)}{N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 \text{Fo}}, \quad (5)$$

де

$$\begin{aligned} \mu^2 N(\mu) &= \left( \frac{\text{Bi}_n^2}{\bar{\lambda}_t^{(n)}} + \bar{\lambda}_t^{(n)} \varepsilon_n^2 \right) r_n^2 \Phi_n^2(r_n, \mu) - \left( \frac{\text{Bi}_0^2}{\bar{\lambda}_t^{(1)}} + \bar{\lambda}_t^{(1)} \varepsilon_1^2 \right) + \\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} r_i^2 \left\{ [\bar{\lambda}_t^{(i)} (1 - K_\lambda^{(i+1)})] [\Phi_i'(r_i, \mu)]^2 + \right. \\ &\left. + (\bar{c}_V^{(i)} - \bar{c}_V^{(i+1)}) \mu^2 \Phi_i^2(\rho_i, \mu) \right\}, \end{aligned}$$

$$\Phi(r, \mu) = \Phi_1(r, \mu) + \sum_{i=1}^{n-1} [\Phi_{i+1}(r, \mu) - \Phi_i(r, \mu)] S(r - r_i),$$

$$\Phi_1(r, \mu) = \frac{\text{Bi}_0}{\bar{\lambda}_t^{(1)}} \Psi_{00}(\varepsilon_1, r_0, r) + \Psi_{10}(\varepsilon_1, r_0, r),$$

$$\Phi_1'(r, \mu) = - \left[ \frac{\text{Bi}_0}{\bar{\lambda}_t^{(1)}} \Psi_{01}(\varepsilon_1, r_0, r) + \varepsilon_1^2 \Psi_{11}(\varepsilon_1, r_0, r) \right],$$

$$\begin{aligned} \Phi_i(r, \mu) &= r_{i-1} [\Phi_{i-1}(r_{i-1}, \mu) \Psi_{10}(\varepsilon_i, r_{i-1}, r) + \\ &+ K_\lambda^{(i)} \Phi_{i-1}'(r_{i-1}, \mu) \Psi_{00}(\varepsilon_i, r_{i-1}, r)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi'_i(r, \mu) &= -r_{i-1} [\Phi_{i-1}(r_{i-1}, \mu) \varepsilon_i^2 \Psi_{11}(\varepsilon_i, r_{i-1}, r) + \\ &\quad + K_\lambda^{(i)} \Phi'_{i-1}(r_{i-1}, \mu) \Psi_{01}(\varepsilon_i, r_{i-1}, r)], \\ K_\lambda^{(i)} &= \bar{\lambda}_t^{(i-1)} / \bar{\lambda}_t^{(i)}, \quad i = 2, \dots, n, \quad \varepsilon_i = \mu \sqrt{\bar{c}_V^{(i)} / \bar{\lambda}_t^{(i)}}, \quad i = 1, \dots, n, \\ \Psi_{k,j}(\varepsilon_i, x, y) &= \frac{\pi}{2} \varepsilon_i^{|k-j|} [J_k(\varepsilon_i x) Y_j(\varepsilon_i y) - Y_k(\varepsilon_i x) J_j(\varepsilon_i y)], \quad k, j = 0, 1,\end{aligned}$$

$\mu_m$  – корені трансцендентного рівняння  $[\bar{\lambda}_t^{(n)} \Phi'_n(r, \mu) + \text{Bi}_n \Phi_n(r, \mu)]|_{r=r_n} = 0$ ;  $J_k(x)$ ,  $Y_k(x)$  – функції Бесселя  $k$ -го порядку;  $\delta(x)$  – дельта-функція Дірака; штрихом позначено похідну за  $r$ .

Оскільки функції  $\bar{f}_j(\text{Fo})$ , які входять в інтеграли  $T_j(r, \text{Fo})$ , є невідомими, то температури точок тіла у фіксовані моменти часу  $\text{Fo}_q = q \text{Fo}_1$ ,  $q = 1, 2, \dots, K_\tau$ , починаючи з  $\text{Fo} = \text{Fo}_1$ , обчислюватимемо на основі (4) з використанням подання

$$T_j(r, \text{Fo}_q) = \int_0^{\text{Fo}_{q-1}} G(r, r_j, \text{Fo} - \xi) \bar{f}_j(\xi) d\xi + \int_{\text{Fo}_{q-1}}^{\text{Fo}_q} G(r, r_j, \text{Fo} - \xi) \bar{f}_j(\xi) d\xi. \quad (6)$$

У другому інтегралі в (6) приймаємо, що  $\bar{f}_j(\xi) = \bar{f}_j(\text{Fo}_{q-1})$ , а у першому підінтегральні функції  $\bar{f}_j(\xi)$  апроксимуємо на проміжку  $[0, \text{Fo}_{q-1}]$  лінійними сплайнами вигляду

$$\bar{f}_j(\text{Fo}) \approx s_{j,1}^{(1)} \text{Fo} + s_{j,1}^{(0)} + \sum_{q=1}^{K_\tau-1} (s_{j,q+1}^{(1)} \text{Fo} + s_{j,q+1}^{(0)} - s_{j,q}^{(1)} \text{Fo} - s_{j,q}^{(0)}) S(\text{Fo} - \text{Fo}_q), \quad (7)$$

де

$$\begin{aligned}s_{j,q}^{(1)} &= \frac{\bar{f}_{j,q} - \bar{f}_{j,q-1}}{\text{Fo}_1}, & s_{j,q}^{(0)} &= \frac{\bar{f}_{j,q-1} \text{Fo}_q - \bar{f}_{j,q} \text{Fo}_{q-1}}{\text{Fo}_1}, \\ \bar{f}_{j,q} &= \bar{f}_j(\text{Fo}_q), & \text{Fo}_0 &= 0.\end{aligned}$$

Обчисливши з використанням (5) і (7) інтеграли у (6), одержимо

$$\begin{aligned}T_j(r, \text{Fo}_1) &= \bar{f}_{j,0} [g_1(r, r_j) - H_1(r, r_j, \text{Fo}_1)], \\ T_j(r, \text{Fo}_q) &= \bar{f}_{j,q-1} g_1(r, r_j) + s_{j,1}^{(1)} H_2(r, r_j, \text{Fo}_q) - s_{j,q-1}^{(1)} H_2(r, r_j, \text{Fo}_1) + \\ &\quad + \sum_{q'=1}^{q-2} d_{j,q'} H_2(r, r_j, \text{Fo}_q - \text{Fo}_{q'}) - \bar{f}_{j,0} H_1(r, r_j, \text{Fo}_q), \\ &\quad q = 2, 3, \dots, K_\tau.\end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned}g_1(r, r_0) &= H_1(r, r_0, 0) = \frac{X_0(r)}{D}, & g_1(r, r_n) &= H_1(r, r_n, 0) = \frac{X_n(r)}{D}, \\ X_0(r) &= \alpha_n - r_n \text{Bi}_n f(r), & X_n(r) &= \alpha_0 + r_0 \text{Bi}_0 f(r), \\ D &= r_n \alpha_0 \text{Bi}_n + r_0 \alpha_n \text{Bi}_0, & \alpha_0 &= 1 - r_0 \text{Bi}_0 f(r_0), \quad \alpha_n = 1 + r_n \text{Bi}_n f(r_n), \\ f(r) &= \frac{1}{\lambda_t^{(1)}} \ln r + \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_i^* \ln \frac{r}{r_i} S(r - r_i), & \Lambda_i^* &= \frac{1}{\lambda_t^{(i+1)}} - \frac{1}{\lambda_t^{(i)}},\end{aligned}$$

$$d_{j,p} = \frac{\bar{f}_{j,p+1} - 2\bar{f}_{j,p} + \bar{f}_{j,p-1}}{\text{Fo}_1},$$

$$H_k(r, \rho, \text{Fo}) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\Phi(r, \mu_m) \Phi(\rho, \mu_m)}{\mu_m^{2k} N(\mu_m)} e^{-\mu_m^2 \text{Fo}}, \quad k = 1, 2.$$

Зауважимо, що температурне поле у стаціонарному режимі описується співвідношенням

$$\begin{aligned} \bar{t}(r) = & r_0 (\text{Bi}_0 t_c^- + \text{Ki}_0) G_*(r, r_0) + r_n (\text{Bi}_n t_c^+ + \text{Ki}_n) G_*(r, r_n) + \\ & + \int_{r_0}^{r_n} G_*(r, \rho) w_t(\rho) \rho d\rho - r_0 \text{Sk}_0 G_*(r, r_0) [\bar{t}(r_0) + T_*]^4 - \\ & - r_n \text{Sk}_n G_*(r, r_n) [\bar{t}(r_n) + T_*]^4, \end{aligned} \quad (8)$$

де  $\bar{t}(r_0)$  і  $\bar{t}(r_n)$  знаходимо із систем нелінійних алгебричних рівнянь, які отримуємо із (8) після підстановки  $r = r_0, r_n$ ;  $t_c^\mp$  – температури середовищ, з якими відбувається конвективний теплообмін через поверхні  $r = r_0, r_n$ ,

$$G_*(r, \rho) = \frac{1}{D} [X_0(r)X_n(\rho)S(r-\rho) + X_0(\rho)X_n(r)S(\rho-r)].$$

**3. Визначення термопружного стану.** Спочатку визначаємо переміщення (віднесені до  $\ell$ )  $\bar{u}_p(r, \text{Fo})$ , деформації  $\bar{\varepsilon}_{rp}(r, \text{Fo})$  і напруження  $\bar{\sigma}_{jp}(r, \text{Fo})$ ,  $j = r, \varphi, z$ , у  $p$ -му шарі з відповідними сталими ФМХ. Для цього використовуємо отримані в [2] формули:

$$A_p(r, \text{Fo}) = A_p^t(r, \text{Fo}) + A_p^y(r, \text{Fo}) - \bar{\varepsilon}_z(\text{Fo}) A_p^s(r, \text{Fo}), \quad (9)$$

де

$$A_p(r, \text{Fo}) = [\bar{u}_p(r, \text{Fo}), \bar{\varepsilon}_{rp}(r, \text{Fo}), \bar{\sigma}_{rp}(r, \text{Fo}), \bar{\sigma}_{\varphi p}(r, \text{Fo}), \bar{\sigma}_{zp}(r, \text{Fo})]^\top,$$

$$A_p^s(r, \text{Fo}) = [\bar{u}_p^s(r, \text{Fo}), \bar{\varepsilon}_{rp}^s(r, \text{Fo}), \bar{\sigma}_{rp}^s(r, \text{Fo}), \bar{\sigma}_{\varphi p}^s(r, \text{Fo}), \bar{\sigma}_{zp}^s(r, \text{Fo})]^\top,$$

$$\bar{u}_p^s(r, \text{Fo}) = \frac{\bar{R}_{1p}^s(\text{Fo})\varphi_{2p}(r) - \bar{R}_{2p}^s(\text{Fo})\varphi_{1p}(r)}{2Q} + \frac{1}{r} \bar{J}_p^s(r, \text{Fo}),$$

$$\bar{\varepsilon}_{rp}^s(r, \text{Fo}) = \frac{\bar{R}_{1p}^s(\text{Fo})\varphi_{4p}(r) - \bar{R}_{2p}^s(\text{Fo})\varphi_{3p}(r)}{2Q} - \frac{1}{r^2} \bar{J}_p^s(r, \text{Fo}) + \bar{\Lambda}_p^s(r, \text{Fo}),$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{rp}^s(r, \text{Fo})}{2\mu_p} = \frac{\bar{R}_{1p}^s(\text{Fo})\varphi_{5p}(r) - \bar{R}_{2p}^s(\text{Fo})\varphi_{7p}(r)}{2Q} - \frac{1}{r^2} \bar{J}_p^s(r, \text{Fo}),$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{\varphi p}^s(r, \text{Fo})}{2\mu_p} = \frac{\bar{R}_{1p}^s(\text{Fo})\varphi_{6p}(r) - \bar{R}_{2p}^s(\text{Fo})\varphi_{8p}(r)}{2Q} + \frac{1}{r^2} \bar{J}_p^s(r, \text{Fo}) - \bar{\Lambda}_p^s(r, \text{Fo}),$$

$$s = t, \varepsilon, y;$$

$$\bar{\sigma}_{zp}^t(r, \text{Fo}) = \bar{\sigma}_{zp}^{*t}(\text{Fo}) - \frac{E_{0p}}{1 - \nu_{0p}} \alpha_{tp}^0 t_s t_p(r, \text{Fo}), \quad \bar{\sigma}_{zp}^y(\text{Fo}) = \bar{\sigma}_{zp}^{*y}(\text{Fo}),$$

$$\bar{\sigma}_{zp}^\varepsilon = \bar{\sigma}_{zp}^{*\varepsilon} - \frac{E_{0p}}{1 - \nu_{0p}^2},$$

$$\bar{\varepsilon}_z(\mathbf{Fo}) = \left\{ \sum_{p=1}^n \left[ \bar{\sigma}_{zp}^{*t}(\mathbf{Fo}) + \bar{\sigma}_{zp}^{*y}(\mathbf{Fo}) \right] \frac{r_p^2 - r_{p-1}^2}{2} - \frac{P(\mathbf{Fo})}{2\pi} - \sum_{p=1}^n \frac{E_{0p}}{1 + \nu_{0p}} \bar{J}_p^t(r_p, \mathbf{Fo}) \right\} \left[ \sum_{p=1}^n \bar{\sigma}_{zp}^{*\varepsilon}(\mathbf{Fo}) \frac{r_p^2 - r_{p-1}^2}{2} \right]^{-1},$$

$$\bar{\sigma}_{zp}^{*s}(\mathbf{Fo}) = -\frac{\bar{\lambda}_p}{Q} \left[ \bar{R}_{1p}^{*s}(\mathbf{Fo}) M_{2p}^- \frac{1}{r_p^2} + \bar{R}_{2p}^{*s}(\mathbf{Fo}) M_{1p}^+ \right], \quad s = t, \varepsilon, y;$$

$$\bar{R}_{1p}^s(\mathbf{Fo}) = \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ \bar{J}_j^s(r_j, \mathbf{Fo}) \frac{c_{0j}}{c_{0p}}, \quad \bar{R}_{2p}^s(\mathbf{Fo}) = \sum_{j=p}^n M_{2j}^- \bar{J}_j^s(r_j, \mathbf{Fo}) \frac{1}{r_j^2},$$

$$s = t, \varepsilon,$$

$$\bar{R}_{1p}^y(\mathbf{Fo}) = \frac{2r_0^2 \sigma_0(\mathbf{Fo})}{c_{0p}}, \quad \bar{R}_{2p}^y(\mathbf{Fo}) = \frac{\sigma_n(\mathbf{Fo})}{c_{0n}},$$

$$\Phi_{1p}(r) = M_{1p}^+ r + M_{1p}^- \frac{r_{p-1}^2}{r}, \quad \Phi_{3p}(r) = M_{1p}^+ - M_{1p}^- \left( \frac{r_{p-1}}{r} \right)^2,$$

$$\Phi_{2p}(r) = M_{2p}^+ \frac{1}{r} - M_{2p}^- \frac{r}{r_p^2}, \quad \Phi_{4p}(r) = -M_{2p}^+ \frac{1}{r^2} - M_{2p}^- \frac{1}{r_p^2},$$

$$\Phi_{kp}(r) = \begin{cases} (-1)^k M_{2p}^+ r^{-2} - M_{2p}^- r_p^{-2} / (1 - 2\nu_{0p}), & k = 5, 6, \\ (-1)^k M_{1p}^- r_{p-1}^2 r^{-2} + M_{1p}^+ / (1 - 2\nu_{0p}), & k = 7, 8, \end{cases}$$

$$Q = \bar{\Phi}_n^{(1)}(r_n) + \nu_{0n}^* \bar{\Phi}_n^{(0)}(r_n);$$

$$M_{11}^\pm = 2(1 \mp \nu_{01}^*), \quad M_{1p}^\pm = \bar{\Phi}_{p-1}^{(0)}(r_{p-1})(1 \pm K_p) \pm \bar{\Phi}_{p-1}^{(1)}(r_{p-1})K_{cp},$$

$$\bar{\Phi}_1^{(m)}(r) = 1 - \nu_{01}^* + (-1)^m (1 + \nu_{01}^*) \left( \frac{r_0}{r} \right)^2,$$

$$\bar{\Phi}_p^{(m)}(r) = \bar{\Phi}_{p-1}^{(0)}(r_{p-1}) f_{p1}^{(m)}(r) + \bar{\Phi}_{p-1}^{(1)}(r_{p-1}) f_{p2}^{(m)}(r),$$

$$f_{p1}^{(m)}(r) = \frac{1}{2} \left[ 1 + K_p + (-1)^m (1 - K_p) \left( \frac{r_{p-1}}{r} \right)^2 \right],$$

$$f_{p2}^{(m)}(r) = \frac{K_{cp}}{2} \left[ 1 - (-1)^m \left( \frac{r_{p-1}}{r} \right)^2 \right], \quad m = 0, 1, \quad p = 2, 3, \dots, n,$$

$$K_p = K_{cp} \nu_{0,p-1}^* - \nu_{0p}^*, \quad p = 2, 3, \dots, n; \quad K_{cp} = \frac{c_{0,p-1}}{c_{0p}}, \quad p = 1, 2, \dots, n;$$

$$M_{2p}^\pm = \mathbf{x}_{np}^{(2)} + \nu_{0n}^* \mathbf{x}_{np}^{(1)} \pm (\mathbf{x}_{np}^{(4)} + \nu_{0n}^* \mathbf{x}_{np}^{(3)}),$$

$$\mathbf{x}_{ii}^{(1)} = \mathbf{x}_{ii}^{(4)} = 1, \quad \mathbf{x}_{ii}^{(2)} = \mathbf{x}_{ii}^{(3)} = 0, \quad \mathbf{x}_{n,i}^{(1)} = f_{n1}^{(0)}(r_n) \mathbf{x}_{n-1,i}^{(1)} + f_{n2}^{(0)}(r_n) \mathbf{x}_{n-1,i}^{(2)},$$

$$\mathbf{x}_{n,i}^{(2)} = f_{n1}^{(1)}(r_n) \mathbf{x}_{n-1,i}^{(1)} + f_{n2}^{(1)}(r_n) \mathbf{x}_{n-1,i}^{(2)},$$

$$\mathbf{x}_{n,i}^{(3)} = f_{n1}^{(0)}(r_n) \mathbf{x}_{n-1,i}^{(3)} + f_{n2}^{(0)}(r_n) \mathbf{x}_{n-1,i}^{(4)},$$

$$\mathfrak{x}_{n,i}^{(4)} = f_{n1}^{(1)}(r_n)\mathfrak{x}_{n-1,i}^{(3)} + f_{n2}^{(1)}(r_n)\mathfrak{x}_{n-1,i}^{(4)}, \quad i = n, n-1, \dots, 1;$$

$$\bar{J}_p^t(r, \mathbf{Fo}) = k_{0p}^* \alpha_{tp}^0 t_s [\bar{J}_{Lp}^t(r, \mathbf{Fo}) - r_0 \text{Sk}_0 \bar{J}_{0p}^t(r, \mathbf{Fo}) - r_n \text{Sk}_n \bar{J}_{np}^t(r, \mathbf{Fo})],$$

$$\bar{J}_{Lp}^t(r, \mathbf{Fo}) = \int_{r_{p-1}}^r \eta T_{Lp}(\eta, \mathbf{Fo}) d\eta,$$

$$\bar{J}_{jp}^t(r, \mathbf{Fo}_1) = \bar{f}_{j,0} [g_{1p}^*(r, r_j) - H_{1p}^*(r, r_j, \mathbf{Fo}_1)],$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{jp}^t(r, \mathbf{Fo}_q) &= \bar{f}_{j,q-1} g_{1p}^*(r, r_j) + s_{j,1}^{(1)} H_{2p}^*(r, r_j, \mathbf{Fo}_q) - s_{j,q-1}^{(1)} H_{2p}^*(r, r_j, \mathbf{Fo}_1) + \\ &+ \sum_{q'=1}^{q-2} d_{j,p} H_{2p}^*(r, r_j, \mathbf{Fo}_q - \mathbf{Fo}_{q'}) - \bar{f}_{j,0} H_{1p}^*(r, r_j, \mathbf{Fo}_q), \end{aligned}$$

$$q = 2, 3, \dots, K_t, \quad j = 0, n,$$

$$\begin{aligned} H_{kp}^*(r, \rho, \mathbf{Fo}) &= \int_{r_{p-1}}^r \eta H_{kp}(\eta, \rho, \mathbf{Fo}) d\eta = \\ &= 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r_{p-1} \Phi_p'(r_{p-1}, \mu_m) - r \Phi_p'(r, \mu_m)}{\varepsilon_p^2 \mu_m^{2k} N(\mu_m)} \Phi(\rho, \mu_m) e^{-\mu_m^2 \mathbf{Fo}}, \end{aligned}$$

$$g_{1p}^*(r, r_j) = \int_{r_{p-1}}^r \eta g_{1p}(\eta, r_j) d\eta = \frac{1}{\bar{D}} [X_{jp}^*(r) - X_{jp}^*(r_{p-1})], \quad j = 0, n,$$

$$X_{0p}^*(r) = \frac{1}{2} r^2 \left( \gamma_{np} - \frac{r_n \text{Bi}_n}{\lambda_t^{(p)}} \ln r \right), \quad X_{np}^*(r) = \frac{1}{2} r^2 \left( \gamma_{0p} + \frac{r_0 \text{Bi}_0}{\lambda_t^{(p)}} \ln r \right),$$

$$\gamma_{0p} = \mathfrak{x}_0 - r_0 \text{Bi}_0 \left( \frac{1}{2\lambda_t^{(p)}} + \Lambda_p \right), \quad \gamma_{np} = \mathfrak{x}_n + r_n \text{Bi}_n \left( \frac{1}{2\lambda_t^{(p)}} + \Lambda_p \right),$$

$$\Lambda_p = \sum_{k=1}^{p-1} \Lambda_k^* \ln r_k, \quad \bar{D} = r_n \mathfrak{x}_0 \text{Bi}_n + r_0 \mathfrak{x}_n \text{Bi}_0, \quad \mathfrak{x}_n = 1 + r_n \text{Bi}_n f(r_n),$$

$$f(r) = \frac{1}{\lambda_t^{(1)}} \ln r + \sum_{i=1}^{n-1} \Lambda_i^* \ln \frac{r}{r_i} S(r - r_i),$$

$$\bar{J}_p^\varepsilon(r, \mathbf{Fo}) = v_{0p}^* \frac{r^2 - r_{p-1}^2}{2}, \quad \bar{J}_p^y(r, \mathbf{Fo}) = 0,$$

$$\bar{\Lambda}_p^t(r, \mathbf{Fo}) = k_{0p}^* \alpha_{tp}^0 t_s t_p(r, \mathbf{Fo}), \quad \bar{\Lambda}_p^\varepsilon(r, \mathbf{Fo}) = v_{0p}^*, \quad \bar{\Lambda}_p^y(r, \mathbf{Fo}) = 0,$$

$$c_{0p} = \frac{E_{0p}(1 - v_{0p})}{(1 + v_{0p})(1 - 2v_{0p})}, \quad v_{0p}^* = \frac{v_{0p}}{1 - v_{0p}},$$

$$k_{0p}^* = \frac{1 + v_{0p}}{1 - v_{0p}}, \quad p = 1, 2, \dots, n,$$

$E_{0p}$ ,  $v_{0p}$  і  $\alpha_{tp}^0$  – значення з інтервалу зміни модулів пружності  $E_p(r)$ , коефіцієнтів Пуассона  $\nu_p(r)$  і температурних коефіцієнтів лінійного розширення  $\alpha_{tp}(r)$ .

Якщо наведеними вище залежностями термопружний стан описується з недостатньою точністю, тоді напруження знаходимо на основі співвідношень

$$\begin{aligned}\sigma_{rp} &= c_p(r) \left[ \frac{du_p(r, Fo)}{dr} + v_p^*(r) \left( \frac{u_p(r, Fo)}{r} + \varepsilon_z(Fo) \right) \right] - \Lambda_{tp}(r, Fo), \\ \sigma_{\varphi p} &= c_p(r) \left[ v_p^*(r) \left( \frac{du_p(r, Fo)}{dr} + \varepsilon_z(Fo) \right) + \frac{u_p(r, Fo)}{r} \right] - \Lambda_{tp}(r, Fo), \\ \sigma_{zp} &= c_p(r) \left[ v_p^*(r) \left( \frac{du_p(r, Fo)}{dr} + \frac{u_p(r, Fo)}{r} \right) + \varepsilon_z(Fo) \right] - \Lambda_{tp}(r, Fo),\end{aligned}\quad (10)$$

а переміщення і відповідні їм похідні визначаємо за формулами [1]

$$u_p(r, Fo) = u_p^t(r, Fo) + u_p^y(r, Fo) - \varepsilon_z(Fo)u_p^\varepsilon(r, Fo), \quad (11)$$

$$\begin{aligned}u_p^s(r, Fo) &= \frac{u_{sp}(r, Fo)}{c_p(r)} + \frac{L_{1p}^s(Fo)\varphi_{2p}(r) + L_{2p}^s(Fo)\varphi_{1p}(r)}{4Q_k c_p(r)} + \\ &+ \frac{V_p^{(1s)}(r, Fo) + V_p^{(2s)}(r, Fo)}{2c_p(r)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{up}^{(i)}(r)}{c_p(r)} \bar{u}_i^s(r_i, Fo),\end{aligned}\quad (12)$$

$$\begin{aligned}\frac{du_p^s(r, Fo)}{dr} &= \frac{\varepsilon_{sp}(r, Fo)}{c_p(r)} + \frac{L_{1p}^s(Fo)\varphi_{4p}(r) + L_{2p}^s(Fo)\varphi_{3p}(r)}{4Q c_p(r)} - \\ &- \frac{V_p^{(1s)}(r, Fo) - V_p^{(2s)}(r, Fo)}{2r c_p(r)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{g_{\varepsilon p}^{(i)}(r)}{r c_p(r)} \bar{u}_i^s(r_i, Fo), \\ &s = t, \varepsilon, y, \quad p = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\quad (13)$$

Зазначимо, що формула (11) є першим наближенням у методі послідовних наближень, який застосовано до розв'язання системи інтегро-алгебричних рівнянь [2], коли за початкове наближення вибрати (9).

У формулах (12), (13) використано позначення:

$$c_p(r) = \frac{E_p(r)[1 - v_p(r)]}{[1 + v_p(r)][1 - 2v_p(r)]}, \quad c_p^*(r) = \frac{E_p(r)}{1 - 2v_p(r)}, \quad v_p^*(r) = \frac{v_p(r)}{1 - v_p(r)},$$

$$u_{sp}(r, Fo) = \frac{R_{1p}^s(Fo)\varphi_{2p}(r) - R_{2p}^s(Fo)\varphi_{1p}(r)}{2Q} + \frac{1}{\rho} J_{sp}(r, Fo),$$

$$\varepsilon_{sp}(r, Fo) = \frac{R_{1p}^s(Fo)\varphi_{4p}(r) - R_{2p}^s(Fo)\varphi_{3p}(r)}{2Q} - \frac{1}{r^2} J_{sp}(r, Fo) + \Lambda_{sp}(r, Fo),$$

$$R_{1p}^s(Fo) = \sum_{j=1}^{p-1} M_{1j}^+ J_{sj}(r_j, Fo), \quad R_{2p}^s(Fo) = \sum_{j=p}^n M_{2j}^- J_{sj}(r_j, Fo) \frac{c_{0p}}{r_j^2 c_{0j}}, \quad s = t, \varepsilon,$$

$$R_{1p}^y(Fo) = 2r_0^2 \sigma_0(Fo), \quad R_{2p}^y(Fo) = \sigma_n(Fo) \frac{c_{0p}}{c_{0n}},$$

$$J_{sp}(r, Fo) = \int_{r_{p-1}}^r \rho \Lambda_{sp}(\rho, Fo) d\rho, \quad \Lambda_{tp}(r, Fo) = c_p^*(r) \alpha_{tp}(r) t_s t_p(r, Fo),$$

$$\Lambda_{\varepsilon p}(r, Fo) = c_p(r) v_p^*(r), \quad \Lambda_{yp}(r, Fo) = 0,$$



$$L_{1p}^s(\mathbf{Fo}) = H_{1p}^s(\mathbf{Fo}) + 4\gamma_1 r_0 \bar{u}_1^s(r_0, \mathbf{Fo}),$$

$$L_{2p}^s(\mathbf{Fo}) = H_{2p}^s(\mathbf{Fo}) - 2\gamma_n \bar{u}_n^s(r_n, \mathbf{Fo}) \frac{c_{0p}}{r_n c_{0n}},$$

$$H_{1p}^s(\mathbf{Fo}) = \sum_{j=1}^{p-1} r_j M_{1j}^+ V_j^{(1s)}(r_j, \mathbf{Fo}) + \sum_{j=1}^p r_{j-1} M_{1j}^- V_j^{(2s)}(r_{j-1}, \mathbf{Fo}),$$

$$H_{2p}^s(\mathbf{Fo}) = \sum_{j=p+1}^n M_{2j}^+ V_j^{(2s)}(r_{j-1}, \mathbf{Fo}) \frac{c_{0p}}{r_{j-1} c_{0j}} - \sum_{j=p}^n M_{2j}^- V_j^{(1s)}(r_j, \mathbf{Fo}) \frac{c_{0p}}{r_j c_{0j}},$$

$$V_p^{(1s)}(r, \mathbf{Fo}) = c_p^{(1)}(r) \bar{u}_p^s(r, \mathbf{Fo}) - c_p^{(1)}(r_{p-1}) \bar{u}_p^s(r_{p-1}, \mathbf{Fo}) \frac{r_{p-1}}{r} - \\ - \frac{1}{r} \int_{r_{p-1}}^r U_p^{(1s)}(\rho, \mathbf{Fo}) \rho d\rho,$$

$$V_p^{(2s)}(r, \mathbf{Fo}) = -c_p^{(2)}(r_p) \bar{u}_p^s(r_p, \mathbf{Fo}) \frac{r}{r_p} + c_p^{(2)}(r) \bar{u}_p^s(r, \mathbf{Fo}) - \\ - r \int_r^{r_p} U_p^{(2s)}(\rho, \mathbf{Fo}) \frac{1}{\rho} d\rho,$$

$$U_p^{(1s)}(r, \mathbf{Fo}) = c_p^{(1)}(r) \left[ \frac{d\bar{u}_p^s(r, \mathbf{Fo})}{dr} + \frac{\bar{u}_p^s(r, \mathbf{Fo})}{r} \right],$$

$$U_p^{(2s)}(r, \mathbf{Fo}) = c_p^{(2)}(r) \left[ -\frac{d\bar{u}_p^s(r, \mathbf{Fo})}{dr} + \frac{\bar{u}_p^s(r, \mathbf{Fo})}{r} \right],$$

$$c_p^{(1)}(r) = \frac{c_p^*(r)}{1 + v_p(r)}, \quad c_p^{(2)}(r) = \frac{E_p(r)}{1 + v_p(r)}.$$

Осьову деформацію знаходимо за формулою

$$\varepsilon_z(\mathbf{Fo}) = \left[ \sum_{p=1}^n \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho [\sigma_{zp}^t(\rho, \mathbf{Fo}) + \sigma_{zp}^y(\rho, \mathbf{Fo})] d\rho - \frac{P(\mathbf{Fo})}{2\pi} \right] \times \\ \times \left[ \sum_{p=1}^n \int_{r_{p-1}}^{r_p} \rho \sigma_{zp}^\varepsilon(\rho, \mathbf{Fo}) d\rho \right]^{-1},$$

у якій

$$\sigma_{zp}^s(\rho, \mathbf{Fo}) = c_p(\rho) v_p^*(\rho) \left[ \frac{du_p^s(\rho, \mathbf{Fo})}{d\rho} + \frac{u_p^s(\rho, \mathbf{Fo})}{\rho} \right] - T_{zp}^s(\rho, \mathbf{Fo}),$$

$$T_{zp}^t(\rho, \mathbf{Fo}) = \Lambda_{tp}(\rho, \mathbf{Fo}), \quad T_{zp}^y(\rho, \mathbf{Fo}) = 0, \quad T_{zp}^\varepsilon(\rho, \mathbf{Fo}) = c_p(\rho).$$

Решту позначень наведено в [1].

Якщо виявиться, що і в цьому випадку не досягнуто заданої точності, тоді повторюємо процедуру знаходження першого наближення за формулами (11)–(13). Тепер вхідними будуть відповідні параметри для  $\sum_{p=1}^n n_p$ -шарового циліндра, де  $n_p$  – кількість частин, на які поділено область  $r_{p-1} \leq r \leq r_p$ .

**4. Числові результати.** Дослідження термопружного стану тришарового ( $\bar{n} = 3$ ) циліндра із закріпленими торцями, складові якого виготовлені з функціонально-градієнтних матеріалів, виконано за відсутності джерел тепла і силових навантажень. ФМХ кожної зі складових циліндра визначали за формулами

$$p_1(r) = p^{(c)} + (p^{(m)} - p^{(c)}) \left( \frac{r - r_0}{r_1 - r_0} \right)^4,$$

$$p_2(r) = p^{(m)} + (p^{(c)} - p^{(m)}) \left( \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \right)^4,$$

$$p_3(r) = p^{(m)} + (p^{(c)} - p^{(m)}) \left( \frac{r - r_2}{r_3 - r_2} \right)^{0.2}.$$

Тут величини з індексами «с» і «м» відповідають значенням температурнозалежних характеристик кераміки  $ZrO_2$  і металу  $Ti-6Al-4V$  [7], вибраних при температурі 400 °С.

Обчислення виконували для таких геометричних і фізико-механічних характеристик:

$$r_0 = 0.1 \text{ м}, \quad \tilde{r}_1 = 0.104 \text{ м}, \quad \tilde{r}_2 = 0.108 \text{ м}, \quad \ell = \tilde{r}_3 = 0.112 \text{ м},$$

$$t_{c0}(Fo) = t_c^- = 20 \text{ °С}, \quad \tilde{q}_0 = 0, \quad \tilde{q}_n = 2.5 \cdot 10^5 \text{ Вт/м}^2, \quad q_n^*(\tau) = 1,$$

$$\alpha_0 = 1612 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{°С)}, \quad \alpha_n = 0, \quad \lambda_t^* = 7.222 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°С)},$$

$$c_V^* = 2.664 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с/(м}^3 \cdot \text{°С)}, \quad \lambda_t^{(c)} = 1.904 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°С)},$$

$$\lambda_t^{(m)} = 12.541 \text{ Вт/(м} \cdot \text{°С)}, \quad c_V^{(c)} = 2.11 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с/(м}^3 \cdot \text{°С)},$$

$$\alpha_V^{(m)} = 2.775 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{с/(м}^3 \cdot \text{°С)}, \quad \alpha_t^{(c)} = 63.32 \cdot 10^{-7} \text{ [°С}^{-1}\text{]},$$

$$\alpha_t^{(m)} = 99.53 \cdot 10^{-7} \text{ [°С}^{-1}\text{]}, \quad E^{(c)} = 94.68 \text{ ГПа}, \quad E^{(m)} = 85.012 \text{ ГПа},$$

$$\nu^{(c)} = 0.333, \quad \nu^{(m)} = 0.31, \quad t_s = \tilde{q}_3 r_3 / \lambda_t^* = 3876.8 \text{ °С},$$

$$\sigma_0^*(\tau) = \sigma_n^*(\tau) = 0, \quad P^*(\tau) = 0.$$

Результати досліджень при поділі складових на чотири частини ( $n = 12$ ) подано на рис. 1 – рис. 6. На рис. 1 – рис. 4 суцільні лінії побудовано з урахуванням теплового випромінювання ( $Sk_n = 51.23$ ), штрихові – без такого врахування ( $Sk_n = 0$ ).

На рис. 1 зображено залежність від часу  $\tau$  температури  $\bar{t}$  на обмежувальних поверхнях, на рис. 2 – рис. 4 – залежність від радіальної координати температури і напружень  $\sigma_j^* = \frac{\sigma_j^t}{E^* \alpha_t^* t_s}$ ,  $j = r, \phi$  (при  $E^* = 89.845$  ГПа,

$\alpha_t^* = 81.43 \cdot 10^{-7} \text{ [°С}^{-1}\text{]}$ ), у різні моменти часу. З графіків, наведених на рис. 1 – рис. 4, випливає, що неврахування теплового випромінювання приводить до завищення максимальних значень температури (рис. 1, рис. 2), радіальних (рис. 3) і кільцевих (рис. 4) напружень майже на 32% і до збільшення часу виходу на стаціонарний режим. Для малих часів вплив теплового випромінювання є неістотним. Температура досягає максимальних значень на зовнішній поверхні, а радіальні та кільцеві напруження – відповідно на поверхні поділу першої і другої складових та внутрішній поверхні. Радіальні напруження усередині циліндра є розтягувальними, що може призвести до відшарування складових.

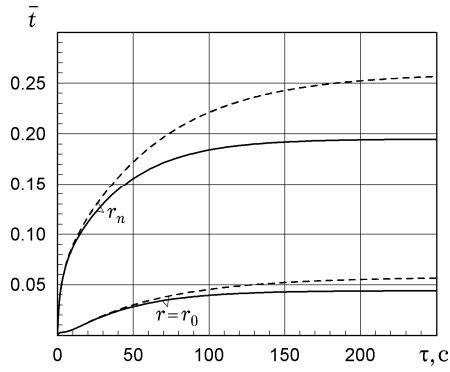


Рис. 1

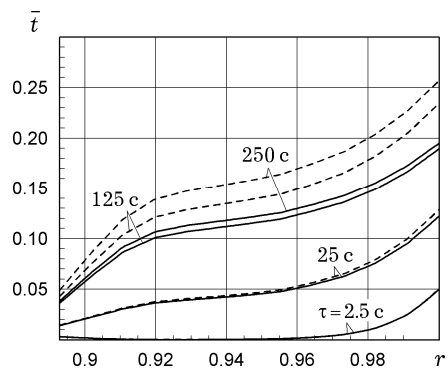


Рис. 2

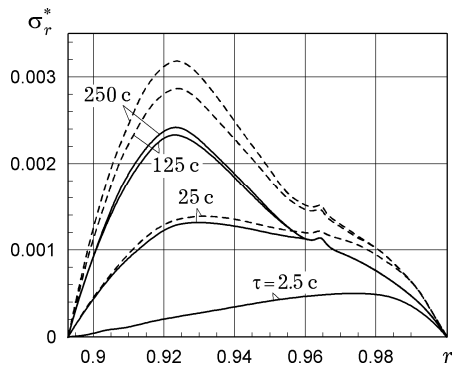


Рис. 3

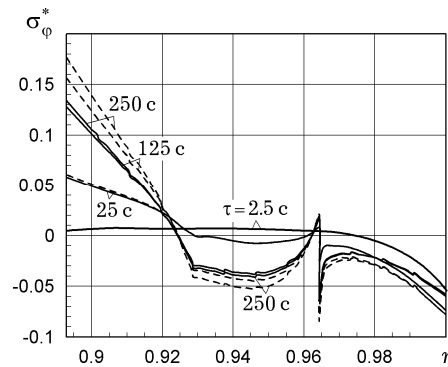


Рис. 4

Зауважимо, що температури поверхні  $r = r_n$ , обчислені на основі (4) при  $\tau = 250$  с і за формулою (8) (у стаціонарному режимі), відрізняються на 0.000224.

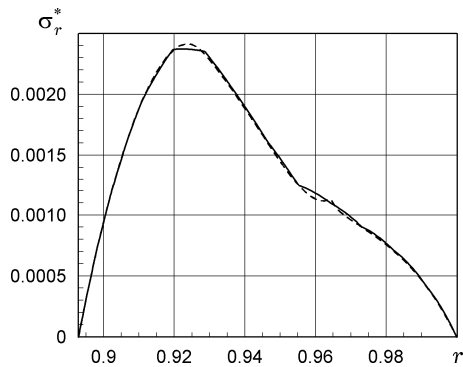


Рис. 5

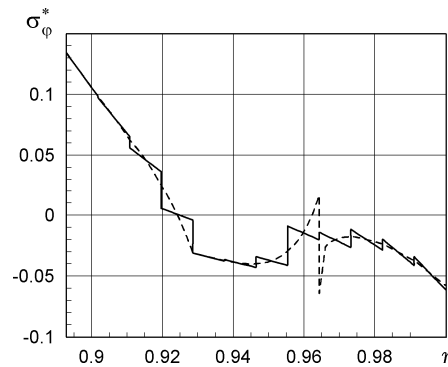


Рис. 6

На рис. 5 і рис. 6 для порівняння наведено розподіли радіальних і кільцевих напружень, обчислені при  $\tau = 250$  с на основі формул (9) (суцільні криві) і (10) (штрихові криві). Їх аналіз показує, що розподіли радіальних напружень, які описуються нульовим наближенням (розв'язком задачі термопружності для багат шарового циліндра зі сталими ФМХ) і першим наближенням, відрізняються лише в областях, що прилягають до поверхонь поділу тришарового циліндра із залежними від координати ФМХ. Кільцеві напруження у такому циліндрі за нульового наближення, на відміну від першого наближення, мають у кожному шарі стрибкоподібний характер поведінки (рис. 6, суцільна крива).

**Висновки.** Запропоновано методику розв'язання квазістатичних задач термопружності для порожнистих циліндрів, складених із функціонально-градієнтних шарів, за нелінійних теплових граничних умов і широкого спектра теплової дії. Методика апробована на задачі термопружності для тришарового функціонально-градієнтного циліндра за нагріву його зовнішньої поверхні тепловим потоком і відводу з неї потоку теплового випромінювання. Досліджено вплив теплового випромінювання на термопружний стан.

1. Процюк Б. В. Статичні задачі термопружності для шаруватого функціонально-градієнтного термочутливого циліндра // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2021. – **64**, № 2. – С. 70–81.
2. Процюк Б. В. Термопружний стан кусково-неоднорідного ортотропного термочутливого циліндра // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 3. – С. 57–73.  
Te same: Protsiuk B. V. Thermoelastic state of a piecewise inhomogeneous orthotropic thermosensitive cylinder // *J. Math. Sci.* – 2022. – **263**, No. 1. – P. 62–83. – <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05907-8>.
3. Процюк Б. В., Синюта В. М. Нестационарне осесиметричне температурне поле необмеженого циліндра зі змінними по товщині теплофізичними характеристиками // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2019. – **62**, № 2. – С. 74–81.  
Te same: Protsiuk B. V., Syniuta V. M. Nonstationary axisymmetric temperature field of an unbounded cylinder with thermal characteristics variable over thickness // *J. Math. Sci.* – 2022. – **261**, No. 1. – P. 85–94. – <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05739-6>.
4. Kushnir R., Protsiuk B. Determination of the thermal fields and stresses in multilayer solids by means of the constructed Green functions // In: *Encyclopedia of Thermal Stresses* / Ed. R. B. Hetnarski. – Dordrecht etc.: Springer, 2014. – Vol. 2. – P. 924–931. – [https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7\\_608](https://doi.org/10.1007/978-94-007-2739-7_608).
5. Lee S.-Y., Huang C.-C. Analytic solutions for heat conduction in functionally graded circular hollow cylinders with time-dependent boundary conditions // *Math. Probl. Eng.* – 2013. – **2013**, No. 3. – P. 1–8. – <https://doi.org/10.1155/2013/816385>.
6. Ootao Y. Transient thermoelastic analysis for a multilayered hollow cylinder with piecewise power law nonhomogeneity // *J. Solid Mech. Mater. Eng.* – 2010. – **4**, No. 8. – P. 1167–1177. – <https://doi.org/10.1299/jmmp.4.1167>.
7. Tanigawa Y., Akai T., Kawamura R., Oka N. Transient heat conduction and thermal stress problems of a nonhomogeneous plate with temperature-dependent material properties // *J. Therm. Stresses.* – 1996. – **19**, No. 1. – P. 77–102. – <https://doi.org/10.1080/01495739608946161>.

#### QUASISTATIC THERMOELASTIC STATE OF A LAYERED FUNCTIONALLY GRADED CYLINDER WITH ACCOUNTING THERMAL RADIATION

*A method for determination of the quasistatic thermoelastic state of layered cylinders with functionally-graded components, taking into account thermal radiation, is proposed. The solution of the heat conduction problem involves the approximation of thermo-physical characteristics by piecewise constant functions of the radial coordinate and the determination at fixed times of the temperatures of the bounding surfaces from recurrent linear relations. In this case, the Green's function of the non-stationary problem of heat conduction for a multilayer cylinder, linear splines and generalized functions are used. Deformations and stresses are determined using the analytical solution of a system of integro-algebraic equations for the problem of thermoelasticity in terms of displacements. It is obtained by the method of successive approximations, which is limited only by the first approximation. The solution of the thermoelasticity problem for a cylinder with piecewise constant physical and mechanical characteristics is taken as the zero approximation. The results of numerical studies for a three layer cylinder are presented.*

**Key words:** multilayer cylinder, functionally graded materials, thermal radiation, thermoelastic state, generalized functions, Green's functions, linear splines.