УДК 517.956

І. П. Лусте, І. Д. Пукальський[✉]

ЗАГАЛЬНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕРІВНОМІРНО ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

Досліджується загальна крайова задача для нерівномірно $\overrightarrow{2b}$*-параболічних рівнянь із виродженням. Коефіцієнти параболічних рівнянь і крайових умов допускають степеневі особливості довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і теорем Арцела і Рісса встановлено існування та інтегральне зображення єдиного розв'язку сформульованої крайової задач. Знайдено оцінки розв'язку загальної параболічної крайової задачі та його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою. Порядок степеневої ваги визначається через величини порядків степеневих особливостей і вироджень коефіцієнтів* $\overrightarrow{2b}$*-параболічних рівнянь і крайових умов.*

Ключові слова: $\overrightarrow{2b}$*-параболічне рівняння, степеневі особливості, інтерполяційні нерівності, апріорні оцінки, гельдерові простори, інтеграл Стілтьєса.*

Вступ. Задачі для вироджених рівнянь із частинними похідними виникають при моделюванні різних складних явищ і процесів у сучасному природознавстві, техніці, математичній фізиці, квантовій механіці, теорії ядерних ланцюгових реакцій, економіці тощо. Рівняннями із сингулярним оператором Бесселя моделюються дифузійні процеси у тілах із симетрією, радіальні коливання, тепло- та масообмін при вирощуванні монокристалів [6].

У монографіях [7, 8] досліджено розв'язки задачі Коші та крайових задач для лінійних параболічних систем, коефіцієнти яких мають обмежені степеневі особливості.

Дослідженню властивостей фундаментального розв'язку та встановленню коректної розв'язності задачі Коші для параболічних рівнянь із виродженнями за деякими змінними присвячено праці [3, 5].

У роботах [4, 10, 11] вивчено задачі з нелокальними та інтегральними умовами за часовою змінною для параболічних рівнянь другого порядку зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах рівняння і крайових умов за будь-якими змінними на деякій множині точок.

Задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння зі степеневими особливостями довільного порядку в коефіцієнтах за будь-якими змінними на деякій множині точок досліджено у [9].

У цій статті розглядається загальна крайова задача для параболічного рівняння порядку $2b$ ($b > 1$) зі степеневими особливостями в коефіцієнтах рівняння і крайових умов довільного порядку за будь-якими змінними на деякій множині точок. За допомогою апріорних оцінок і теорем Арцела і Рісса встановлено існування, інтегральне подання єдиного розв'язку сформульованої задачі та оцінки його похідних у гельдерових просторах зі степеневою вагою.

1. Постановка задачі і основний результат. Нехай D − обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею ∂D, $\dim D = n$; Ω − деяка обмежена область, $\bar{\Omega} \subset \bar{D}$, $\dim \Omega \le n-1$; t_0, T − фіксовані додатні числа, $0 < t_0 < T$, $Q = [0,T) \times D$, $Q_0 = \{(t,x) \mid t \in [0,T), x \in \bar{\Omega}\} \cup \{(t,x) \mid t = t_0, x \in \bar{D}\}$.

В області Q розглянемо задачу знаходження функції $u(t,x)$, яка при $(t,x) \in Q \setminus Q_0$ задовольняє рівняння

[✉] i.pukalsky@chnu.edu.ua

$$(Lu)(t,x) \equiv \left[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x)\partial_x^k - \sum_{|p|\le 2b-1} A_p(t,x)\partial_x^p\right]u(t,x) = f_0(t,x), \quad (1)$$

початкову умову за змінною t:

$$u(0,x) = \varphi(x), \qquad x \in D \setminus \bar{\Omega}, \qquad (2)$$

а на межі області $\Gamma = [0,T] \times \partial D$ крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|=r_\lambda} B_k^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^k u + \sum_{|p|\le r_\lambda - 1} B_p^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^p u - f_\lambda(t,x)\right] = 0. \qquad (3)$$

Тут $\partial_x^k = \partial_{x_1}^{k_1}\ldots\partial_{x_n}^{k_n}$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$, $\lambda \in \{1,\ldots,b\}$, $0 \le r_\lambda \le 2b-1$.

Степеневі особливості коефіцієнтів рівняння (1) і крайових умов (3) у точці $P(t,x) \in Q\setminus Q_0$ характеризують функції $s_1(\beta_i^{(1)},t)$ і $s_2(\beta_i^{(2)},x)$:

$$s_1(\beta_i^{(1)},t) = \begin{cases} |t-t_0|^{\beta_i^{(1)}}, & |t-t_0| \le 1, \\ 1, & |t-t_0| > 1, \end{cases} \qquad s_2(\beta_i^{(2)},x) = \begin{cases} \rho^{\beta_i^{(2)}}(x), & \rho(x) \le 1, \\ 1, & \rho(x) > 1, \end{cases}$$

де $\rho(x) = \inf_{z\in\partial D}|x-z|$, $\beta_i^{(1)},\beta_i^{(2)} \in (-\infty,\infty)$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, $\beta^{(\nu)} = (\beta_1^{(\nu)},\beta_2^{(\nu)},\ldots,\beta_n^{(\nu)})$, $\nu \in \{1,2\}$.

Введемо позначення: ℓ, q, α, $\gamma^{(\nu)}$, $\mu_0^{(\nu)}$, $\mu_{p_j}^{(\nu)}$, $\delta_{p_j}^{(\nu)}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$, – дійсні додатні числа, $[\ell]$ – ціла частина ℓ, $\{\ell\} = \ell - [\ell]$; $P(t,x)$, $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(1)})$, $H_r(t^{(2)},x^{(2)})$ – довільні точки з Q; $x^{(1)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, $x^{(2)} = (x_1^{(1)},\ldots,x_{r-1}^{(1)},x_r^{(2)},x_{r+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$.

Означимо простори, в яких вивчається задача (1)–(3).

$C^\ell(\gamma;\beta;q;Q)$ – множина функцій $u(t,x) \in \bar{Q}$, які мають неперервні частинні похідні в області $\bar{Q} \setminus Q_0$ вигляду $\partial_t^j\partial_x^k u$, $\beta = (\beta^{(1)},\beta^{(2)})$, $2bj + |k| \le [\ell]$, для яких є скінченною норма

$$\|u;\gamma;\beta;q;Q\|_\ell = \sum_{2bj+|k|\le[\ell]} \|u;\gamma;\beta;q;Q\|_{2bj+|k|} + \langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_\ell,$$

де, наприклад,

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_0 = \sup_{P\in\bar{Q}}\|u(P)\| \equiv \|u;Q\|_0,$$

$$\begin{aligned}\langle u;\gamma;\beta;q;Q\rangle_\ell = \sum_{2bj+|k|=[\ell]}\sum_{r=1}^{n}\Bigg\{ &\sup_{(P_2,H_r)\in\bar{Q}} s_1((q+[\ell])\gamma^{(1)},t^{(1)})\, s_2((q+[\ell])\gamma^{(2)},\tilde{x}) \times \\ &\times s_1(\{\ell\}(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}),t^{(1)})\, s_2(\{\ell\}(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}),\tilde{x}) \times \\ &\times \left|x_r^{(1)} - x_r^{(2)}\right|^{-\{\ell\}} \left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_2) - \partial_t^j\partial_x^k u(H_r)\right| \times \\ &\times \prod_{i=1}^{n} s_1(-k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)})\, s_2(-k_i\beta_i^{(2)},\tilde{x}) \Bigg\} + \\ &+ \sum_{2bj+|k|=[\ell]}\Bigg\{ \sup_{(P_1,P_2)\in\bar{Q}} s_1((q+\ell)\gamma^{(1)},\tilde{t})s_2((q+\ell)\gamma^{(2)},x^{(1)}) \times \\ &\times \left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\{\ell/(2b)\}} \left|\partial_t^j\partial_x^k u(P_1) - \partial_t^j\partial_x^k u(P_2)\right| \times\end{aligned}$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} s_1(-k_i\beta_i^{(1)}, \tilde t) s_2(-k_i\beta_i^{(2)}, x^{(1)}) \Big\} ,$$

$$s_1(a, \tilde t) = \min\{s_1(a, t^{(1)}), s_1(a, t^{(2)})\} ,$$

$$s_2(a, \tilde x) = \min\{s_2(a, x^{(1)}), s_2(a, x^{(2)})\} .$$

Приймаємо, що для задачі (1)–(3) виконуються умови:

1°) для коефіцієнтів рівняння (1):

$$A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)}, t)\, s_2(k_i\beta_i^{(2)}, x) \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q) ,$$

$$A_p(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(p_i\mu_{p_i}^{(1)}, t)\, s_2(p_i\mu_{p_i}^{(2)}, x) \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q), \qquad 1 \le |p| \le 2b-1 ,$$

$$A_0(t,x) \le K < \infty, \qquad A_0(t,x)\, s_1(\mu_0^{(1)}, t)\, s_2(\mu_0^{(2)}, x) \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q) ,$$

а задача

$$\Big[\partial_t - \sum_{|k|=2b} A_k(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)}, t)\, s_2(k_i\beta_i^{(2)}, x)\,\partial_x^k\Big] u(t,x) = \tilde f(t,x) ,$$

$$u\,|_{t=0} = \tilde\varphi(x) ,$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\Big[\sum_{|k|=r_\lambda} B_k^{(\lambda)}(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)}, t)\, s_2(k_i\beta_i^{(2)}, x)\,\partial_x^k u(t,x) - \tilde f_\lambda(t,x)\Big] = 0$$

задовольняє в області Q рівномірну умову параболічності та умову Я. Б. Лопатинського [2];

2°) для коефіцієнтів крайових умов (3):

$$B_k^{(\lambda)}(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(k_i\beta_i^{(1)}, t)\, s_2(k_i\beta_i^{(2)}, x) \in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q) ,$$

$$B_p^{(\lambda)}(t,x)\prod_{i=1}^{n} s_1(p_i\delta_{\lambda,p_i}^{(1)}, t)\, s_2(p_i\delta_{\lambda,p_i}^{(2)}, x) \in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q) ,$$

$$B_0^{(\lambda)}(t,x)\, s_1(\delta_\lambda^{(1)}, t)\, s_2(\delta_\lambda^{(2)}, x) \in C^{2b-r_i+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q) ;$$

3°) для функцій: $f_0(t,x) \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b;Q)$, $\quad f_\lambda(t,x) \in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;r_\lambda;Q)$,

$$\partial D \in C^{2b+\alpha}, \quad \varphi(x) \in C^{2b+\alpha}(\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D), \quad \tilde\gamma = (0,\gamma^{(2)}), \quad \tilde\beta = (0,\beta^{(2)}) ,$$

$$\gamma^{(\nu)} = \max\Big\{\max_i \beta_i^{(\nu)},\ \max_{i,p_i}\frac{p_i(\mu_{p_i}^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)})}{2b-|p|},$$

$$\max_{i,\lambda,p_i}\frac{p_i(\delta_{\lambda,p_i}^{(\nu)} - \beta_i^{(\nu)})}{r_\lambda - |p|},\ \frac{\mu_0^{(\nu)}}{2b},\ \max_\lambda\frac{\delta_\lambda^{(\nu)}}{r_\lambda}\Big\}, \qquad \nu\in\{1,2\} .$$

Правильною є така

Теорема 1. *Нехай для задачі* (1)–(3) *виконуються умови* ***1°–3°***. *Тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *із простору* $C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ *і справджується нерівність*

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha} \le c\Big(\|\varphi;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2b+\alpha} + \|f;\gamma;\beta;2b;Q\|_{\alpha} +$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{b}\|f_\lambda;\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\Big). \qquad (4)$$

Якщо $f_0\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$, $f_\lambda\in C^\alpha(\gamma;\beta;0;Q)$ *і для задачі* (1)–(3) *виконуються умови* ***1°–3°****, то єдиний розв'язок задачі* (1)–(3) *в області* Q *визначається інтегралами Стілтьєса з борелівською мірою*:

$$u(t,x)=\int_0^t\int_D Z(t,x;d\tau,d\xi)f_0(\tau,\xi)+\int_D Z(t,x;0,d\xi)\varphi(\xi)+$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{b}\int_0^t\int_{\partial D} Z_\lambda(t,x;d\tau,d_\xi S)f_\lambda(\tau,\xi). \qquad (5)$$

Для доведення теореми 1 встановимо спочатку розв'язність допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Із множини одержаних розв'язків виділимо збіжну підпослідовність, граничне значення якої буде розв'язком задачі (1)–(3).

2. Оцінка розв'язків допоміжних крайових задач з гладкими коефіцієнтами. Нехай $Q_m=Q\cap\{(t,x)\in Q\mid s_1(1,t)\ge m_1^{-1},\, s_2(1,x)\ge m_2^{-1}\}$, $m_1\ge 1$, $m_2\ge 1$, $m=(m_1,m_2)$, – послідовність областей, яка при $m_1,m_2\to\infty$ збігається до Q.

Розглянемо в області Q задачу знаходження розв'язків рівняння

$$(L_1u_m)(t,x)\equiv\Big[\partial_t-\sum_{|k|=2b}a_k(t,x)\partial_x^k-\sum_{|p|\le 2b-1}a_p(t,x)\partial_x^p\Big]u_m(t,x)=$$

$$=F_m(t,x), \qquad (6)$$

які задовольняють при $t\to+0$ початкову умову

$$u_m(0,x)=\varphi_m(x), \qquad (7)$$

а на межі області Γ крайові умови

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\Big[B^{(\lambda)}u_m(t,x)-g_m^{(\lambda)}(t,x)\Big]\equiv\lim_{x\to z\in\partial D}\Big[\sum_{|k|=r_\lambda}b_k^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^k u_m+$$

$$+\sum_{|p|\le r_\lambda-1}b_p^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^p u_m-g_m^{(\lambda)}(t,x)\Big]=0. \qquad (8)$$

Тут коефіцієнти a_k, a_p, $b_k^{(\lambda)}$, $b_p^{(\lambda)}$ функції F_m, φ_m, g_m в області Q_m співпадають з A_k, A_p, $B_k^{(\lambda)}$, $B_p^{(\lambda)}$, f_0, φ, f_λ відповідно, а в області $Q\setminus Q_m$ є неперервними продовженнями коефіцієнтів A_k, A_p, $B_k^{(\lambda)}$, $B_p^{(\lambda)}$ і функцій f_0, φ, f_λ з області Q_m в область $Q\setminus Q_m$ зі збереженням гладкості та норм [12, с. 82].

Позначимо через $H^\ell(\gamma;\beta;q;Q)$ сукупність функцій простору $C^\ell(Q)$ з нормою $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_\ell$, еквівалентну при кожному m_1, m_2 гельдеровій нормі, яка означується аналогічно, як і $\|u;\gamma;\beta;Q\|_\ell$, із заміною функцій $s_1(a^{(1)},t)$, $s_2(a^{(2)},x)$ на $d_1(a^{(1)},t)$, $d_2(a^{(2)},x)$ відповідно:

$$d_1(a^{(1)},t)=\begin{cases}\max\big(s_1(a^{(1)},t),m_1^{-a^{(1)}}\big), & a^{(1)}\ge 0,\\ \min\big(s_1(a^{(1)},t),m_1^{-a^{(1)}}\big), & a^{(1)}<0,\end{cases}$$

$$d_2(a^{(2)},x)=\begin{cases}\max\left(s_2(a^{(2)},x),m_2^{-a^{(2)}}\right), & a^{(2)}\ge 0,\\ \max\left(s_2(a^{(2)},x),m_2^{-a^{(2)}}\right), & a^{(2)}<0.\end{cases}$$

Для норм $\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_\ell$ є правильними інтерполяційні нерівності.

Лема 1. *Нехай* $u_m\in H^\ell(\gamma;\beta;q;Q)$. *Тоді для довільного* $0<\varepsilon<1$ *існує така стала* $c(\varepsilon)$, *що виконуються нерівності*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{[\ell]}\le\varepsilon^\alpha\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_\ell+c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0,$$

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{|k|}\le\varepsilon\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_{|k|+1}+\frac{c}{\varepsilon}\|u_m;\gamma;\beta;q;Q\|_{|k|-1},\tag{9}$$

$$|k|\le[\ell]-1,\quad \ell=[\ell]+\{\ell\},\quad \ell>[\ell].$$

Д о в е д е н н я нерівностей (9) одержуємо за схемою доведення леми з [9]. ♦

При виконанні умов ***1°–3°*** існує єдиний класичний розв'язок крайової задачі (6)–(8) у просторі $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ [7, с. 83]. Встановимо оцінку норми $\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}$.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* ***1°–3°***, *то для розв'язку задачі* (6)–(8) *справджується оцінка*

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\le c\Big(\|F_m;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha+\|\varphi_m;\tilde\gamma;\tilde\beta;0;D\|_{2b+\alpha}+\|u_m;Q\|_0+$$
$$+\sum_{\lambda=1}^{b}\|g_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\Big).\tag{10}$$

Стала c *не залежить від* m.

Д о в е д е н н я. З огляду на інтерполяційні нерівності (9) маємо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\le(1+\varepsilon^\alpha)\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2b+\alpha}+c(\varepsilon)\|u_m;Q\|_0.$$

Тому достатньо оцінити півнорму $\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2b+\alpha}$. З означення $\langle u_m;\gamma;\beta;0;Q\rangle_{2b+\alpha}$ випливає існування в $\bar{Q}$ точок $P_1(t^{(1)},x^{(1)})$, $P_2(t^{(2)},x^{(1)})$, $H_r(t^{(2)},x_1^{(1)},\ldots,x_{r-1}^{(1)},x_r^{(2)},x_{r+1}^{(1)},\ldots,x_n^{(1)})$, для яких виконується нерівність

$$\frac12\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}\le E_1+E_2,\tag{11}$$

де

$$E_1=\sum_{2bj+|k|=2b}\sum_{r=1}^{n}d_1(2b\gamma^{(1)},t^{(1)})\,d_2(2b\gamma^{(2)},\tilde x)\,d_1(\alpha(\gamma^{(1)}-\beta_r^{(1)}),t^{(1)})\times$$
$$\times d_2(\alpha(\gamma^{(2)}-\beta_r^{(2)}),\tilde x)\left|x_r^{(1)}-x_r^{(2)}\right|^{-\alpha}\times$$
$$\times\left|\partial_t^j\partial_x^k u_m(P_2)-\partial_t^j\partial_x^k u_m(H_r)\right|\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n}d_1(-k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)})\,d_2(-k_i\beta_i^{(2)},\tilde x),$$

$$E_2=\sum_{2bj+|k|=2b}d_1((2b+\alpha)\gamma^{(1)},\tilde t)\,d_2((2b+\alpha)\gamma^{(2)},x^{(1)})\times$$

$$\times \left|t^{(1)} - t^{(2)}\right|^{-\alpha/(2b)} \left|\partial_t^j \partial_x^k u_m(P_1) - \partial_t^j \partial_x^k u_m(P_2)\right| \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} d_1(-k_i\beta_i^{(1)}, \tilde{t})\, d_2(-k_i\beta_i^{(2)}, x^{(1)}).$$

Якщо $\left|x_r^{(1)} - x_r^{(2)}\right| \geq \dfrac{\varepsilon_1}{2n} d_1(\gamma^{(1)} - \beta_r^{(1)}, \tilde{t})\, d_2(\gamma^{(2)} - \beta_r^{(2)}, \tilde{x}) \equiv N_1$, де ε_1 – довільне число із $(0,1)$, то

$$E_1 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha} \left\| u_m; \gamma; \beta; 0; Q \right\|_{2b}. \tag{12}$$

Якщо $\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \geq (\varepsilon_1/2)^{2b} d_1(2b\gamma^{(1)}, \tilde{t})\, d_2(2b\gamma^{(2)}, \tilde{x}) \equiv N_2$, то

$$E_2 \leq 2\varepsilon_1^{-\alpha} \left\| u_m; \gamma; \beta; 0; Q \right\|_{2b}. \tag{13}$$

Застосовуючи інтерполяційні нерівності (9) до (12), (13), отримуємо

$$E_1 + E_2 \leq \varepsilon^{\alpha} \left\| u_m; \gamma; \beta; 0; Q \right\|_{2b+\alpha} + c(\varepsilon) \left\| u_m; Q \right\|_0. \tag{14}$$

Нехай $\left|x_r^{(1)} - x_r^{(2)}\right| \leq N_1$ або $\left|t^{(1)} - t^{(2)}\right| \leq N_2$. Будемо вважати, що $d_1(\gamma^{(1)}, \tilde{t}) = d_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)}) \equiv \min\left(d_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)}), d_1(\gamma^{(1)}, t^{(2)})\right)$, $d_2(\gamma^{(2)}, \tilde{x}) = d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)}) \equiv \equiv \min\left(d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)}), d_2(\gamma^{(2)}, x^{(2)})\right)$, $P_1(t^{(1)}, x^{(1)}) \in Q$. Нехай $\left|x_n^{(1)} - \xi_n\right| \leq 2N_1$ або $\left|x^{(1)} - \xi\right| \leq 2N_1 n$, $\xi \in \partial D$. Розглянемо кулю $K(a, P)$ радіуса a, $a > \max(8N_1 n, 4N_2)$, що містить точки P_1, P_2, H_r, із центром в деякій точці $P \in \Gamma$. Використовуючи обмеження на гладкість межі ∂D, можемо розпрямити $\partial D \bigcap K(a, P)$ за допомогою взаємно однозначного перетворення $x = \psi(y)$ [12, с. 155], в результаті чого область $\Pi_0 = Q \bigcap K(a; P)$ перейде в область Π_1, для точок якої $t \geq 0$, $y_n \geq 0$. Функція $u_m(t, x)$ при перетворенні $x = \psi(y)$ перейде у функцію $v_m(t, y)$. Приймемо також, що P_1, P_2, H_r, E_1, E_2, $d_1(\gamma^{(1)}, x^{(1)})$, $d_2(\gamma^{(2)}, x^{(1)})$ переходять при цьому перетворенні в R_1, R_2, M_r, $E^{(1)}$, $E^{(2)}$, $h_1(\gamma^{(1)}, t^{(1)})$, $h_2(\gamma^{(2)}, y^{(1)})$. Позначимо коефіцієнти рівняння (6) і крайових умов (8) в області Π_1 через e_k, e_p, $\ell_k^{(\lambda)}$, $\ell_p^{(\lambda)}$. Тоді $v_m(t, y)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t v_m - \sum_{|k|=2b} e_k(R_1) \partial_y^k v_m = \sum_{|k|=2b} \left[e_k(t, y) - e_k(R_1)\right] \partial_y^k v_m +$$

$$+ \sum_{|p| \leq 2b-1} e_p(t, y) \partial_x^p v_m + F_m(t, \psi(y)) \equiv F_m^{(0)}(t, y; v_m), \tag{15}$$

$$v_m(0, y) = \varphi_m(\psi(y)) \equiv \varphi_m^{(0)}(y), \tag{16}$$

$$\sum_{|k|=r_\lambda} \ell_k^{(\lambda)}(R_1) \partial_y^k v_m \Big|_{y_n=0} = \Big\{ \sum_{|k|=r_\lambda} \left[\ell_k^{(\lambda)}(R_1) - \ell_k^{(\lambda)}(t, y)\right] \partial_y^k v_m -$$

$$- \sum_{|p| \leq r_\lambda - 1} \ell_p^{(\lambda)}(t, y) \partial_y^p v_m + g_m^{(\lambda)}(t, \psi(y)) \Big\}\Big|_{y_n=0} \equiv$$

$$\equiv \Psi_m^{(\lambda)}(t, y; v_m)\Big|_{y_n=0}. \tag{17}$$

У задачі (15)–(17) зробимо заміну $v_m(t, y) = \omega_m(t, z)$, де $z_i = h_1(\beta_i^{(1)}, t^{(1)}) \times \times h_2(\beta_i^{(2)}, y^{(1)})\, y_i$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Позначимо через Π_2 область визначення

$\omega_m(t,z)$. Тоді функція $\omega_m(t,x)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\partial_t \omega_m - \sum_{|k|=2b} e_k(R_1)\, S(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)})\, \partial_z^k \omega_m = F_m^{(0)}(t,\tilde{z};\omega_m), \tag{18}$$

$$\omega_m(0,z) = \varphi_m^{(0)}(\tilde{z}), \tag{19}$$

$$\sum_{|k|=r_\lambda} \ell_k^{(\lambda)}(R_1)\, S(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)})\, \partial_z^k \omega_m\Big|_{z_n=0} = \Psi_m^{(\lambda)}(t,\tilde{z};v_m)\Big|_{z_n=0}, \tag{20}$$

де

$$S(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}) = \prod_{i=1}^{n} h_1(k_i\beta_i^{(1)},t^{(1)})\, h_2(k_i\beta_i^{(2)},y^{(1)}),$$

$$\tilde{z} = \left(h_1^{-1}(\beta_1^{(1)},t^{(1)}), h_2^{-1}(\beta_1^{(2)},y^{(1)})z_1,\ldots,h_1^{-1}(\beta_n^{(1)},t^{(1)}), h_2^{-1}(\beta_n^{(2)},y^{(1)})\, z_n\right).$$

Позначимо $z_i^{(1)} = h_1(\beta_i^{(1)},t^{(1)})\, h_2(\beta_i^{(2)},y^{(1)})\, y_i^{(1)}$, $i \in \{1,\ldots,n\}$, і

$$K_\delta = \Big\{(t,z) \in \Pi_2 \mid \left|z_i - z_i^{(1)}\right| \le \frac{\delta\varepsilon_1}{n} h_1(\gamma^{(1)},t^{(1)})\, h_2(\gamma^{(2)},y^{(1)}),$$

$$\left|t^{(1)} - t\right| \le (\delta\varepsilon_1)^{2b} h_1(2b\gamma^{(1)},t^{(1)})\, h_2(2b\gamma^{(2)},y^{(1)})\Big\}.$$

Виберемо функцію $\eta(t,z)$, яка має другі неперервні частинні похідні за змінною t і неперервні частинні похідні порядку $2b+1$ за змінними z_i, $i \in \{1,\ldots,n\}$, і задовольняє умови

$$\eta(t,z) = \begin{cases} 1, & (t,z) \in K_{1/2}, \quad 0 \le \eta(t,y) \le 1, \\ 0, & (t,z) \notin K_{3/4}, \quad \left|\partial_t^j \partial_z^k \eta\right| \le c_{kj} h_1^{-1}((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}) \times \\ & \qquad \times h_2^{-1}((2bj+|k|)\gamma^{(2)},y^{(1)}). \end{cases}$$

Тоді функція $V_m(t,z) = \omega_m(t,z)\,\eta(t,z)$ буде розв'язком крайової задачі

$$\partial_t V_m - \sum_{|k|=2b} e_k(R_1)\, S(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)})\, \partial_z^k V_m = \omega_m \partial_t \eta + \eta F_m^{(0)}(t,\tilde{z};\omega_m) +$$

$$+ \sum_{|k|=2b} e_k(R_1)\, S(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}) \times$$

$$\times \sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|} \partial_z^{k-p} \omega_m \partial_z^p \eta \equiv \Phi_m(t,z;\omega_m), \tag{21}$$

$$V_m(0,z) = \eta(0,z)\,\varphi_m^{(0)}(\tilde{z}), \tag{22}$$

$$\sum_{|k|=r_\lambda} \ell_k^{(\lambda)}(R_1) S(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)})\, \partial_z^k V_m\Big|_{z_n=0} =$$

$$= \Bigg\{\eta \Psi_m^{(\lambda)}(t,\tilde{z};\omega_m) + \sum_{|k|=r_\lambda} \ell_k^{(\lambda)}(R_1)\, S(k;h_1,h_2;t^{(1)},y^{(1)}) \times$$

$$\times \sum_{0<|p|\le|k|} C_{|k|}^{|p|}\, \partial_z^{k-p} \omega_m \partial_z^p \eta\Bigg\}\Bigg|_{z_n=0} \equiv G_m^{(\lambda)}(t,z;\omega_m)\Big|_{z_n=0}. \tag{23}$$

Зазначимо, що коефіцієнти рівняння (21) і крайових умов (23) обмежені константами, незалежними від точки $R_1(t^{(1)},y^{(1)})$. Тому за теоремою 7.1 з [7, с. 83] для довільних точок $M_1, M_2 \in K_{1/2}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1, M_2)\left|\partial_t^j \partial_z^k \omega_m(M_1) - \partial_t^j \partial_z^k \omega_m(M_2)\right| \le c\Bigg(\|\Phi_m\|_{C^\alpha(K_{3/4})} +$$

$$+ \left\|\eta\varphi_m^{(0)}\right\|_{C^{2b+\alpha}(K_{3/4}\cap\{t=0\})} + \sum_{\lambda=1}^{b}\left\|G_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b-r_\lambda+\alpha}(K_{3/4})}\Bigg), \qquad (24)$$

де $d(M_1, M_2)$ – параболічна відстань між точками M_1 і M_2, $2bj + |k| = 2b$.

Враховуючи властивості функції $\eta(t,z)$ і нерівності (9), одержимо:

$$\|\Phi_m\|_{C^\alpha(K_{3/4})} \le cW(h_1, h_2)\Bigg(\left\|\omega_m; K_{3/4}\right\|_0 + \left\|F_m^{(0)}; \gamma; 0; 2b; K_{3/4}\right\|_\alpha +$$

$$+ \left\|\omega_m; \gamma; 0; 0; K_{3/4}\right\|_{2b}\Bigg), \qquad (25)$$

$$\left\|\eta\varphi_m^{(0)}\right\|_{C^{2b+\alpha}(K_{3/4}\cap\{t=0\})} \le cW(h_1, h_2)\left\|\varphi_m^{(0)}; \tilde{\gamma}; 0; 0; K_{3/4} \cap \{t = 0\}\right\|_{2b+\alpha}, \qquad (26)$$

$$\left\|G_m^{(\lambda)}\right\|_{C^{2b-r_\lambda+\alpha}(K_{3/4})} \le cW(h_1, h_2)\Bigg(\left\|\omega_m; K_{3/4}\right\|_0 + \left\|\omega_m; \gamma; 0; 0; K_{3/4}\right\|_{2b} +$$

$$+ \left\|\Psi_m^{(\lambda)}; \gamma; 0; z_\lambda; K_{3/4}\right\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\Bigg), \qquad (27)$$

де $W(h_1, h_2) = h_1\big((2b+\alpha)\gamma^{(1)}, t^{(1)}\big)\, h_2\big((2b+\alpha)\gamma^{(2)}, y^{(1)}\big)$.

З означення простору $H^\ell(\gamma; \beta; q; Q)$ випливає виконання нерівності

$$c_1\left\|\omega_m; \gamma; 0; q; K_{3/4}\right\|_\ell \le \left\|v_m; \gamma; \beta; q; T_{3/4}\right\|_\ell \le c_2\left\|\omega_m; \gamma; 0; q; K_{3/4}\right\|_\ell,$$

де

$$T_\delta = \Bigg\{ (t, y) \in \Pi_1 \mid \left|y_i - y_i^{(1)}\right| \le$$

$$\le \delta\frac{\varepsilon_1}{2n} h_1\big(\gamma^{(1)} - \beta_i^{(1)}, t^{(1)}\big)\, h_2\big(\gamma^{(2)} - \beta_i^{(2)}, y^{(1)}\big),\ i \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\left|t - t^{(1)}\right| \le \delta\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^{2b} h_1\big(2b\gamma^{(1)}, t^{(1)}\big)\, h_2\big(2b\gamma^{(2)}, y^{(1)}\big) \Bigg\}.$$

Підставляючи (25)–(27) у (24), знаходимо, що

$$E_1 + E_2 \le C_b\Bigg(\left\|F_m; \gamma; \beta; 2b; \Pi_0\right\|_\alpha + \sum_{\lambda=1}^{b}\left\|g_m^{(\lambda)}; \gamma; \beta; r_\lambda; \Pi_0\right\|_{2b-r_\lambda+\alpha} +$$

$$+ \left\|u_m; \Pi_0\right\|_0 + \left\|\varphi_m; \tilde{\gamma}; \tilde{\beta}; 0; \Pi_0 \cap \{t = 0\}\right\|_{2b+\alpha}\Bigg) +$$

$$+ \varepsilon_4\left\|u_m; \gamma; \beta; 0; \Pi_0\right\|_{2b+\alpha}. \qquad (28)$$

Розглянемо випадок, коли $\left|x_n^{(1)} - \xi_n\right| \ge 2N_1$ або $\left|x^{(1)} - \xi\right| \ge 2N_1 n$, $\xi \in \partial D$.

Запишемо задачу (6)–(8) у вигляді

$$\partial_t u_m - \sum_{|k|=2b} a_k(P_1)\partial_x^k u_m = f_m(t, x) + \sum_{|p|\le 2b-1} a_p(t, x)\partial_x^p u_m +$$

$$+ \sum_{|k|=2b}\left[a_k(t, x) - a_k(P_1)\right]\partial_x^k u_m \equiv F_m^{(1)}(t, x; u_m), \qquad (29)$$

$$u_m(0, x) = \varphi_m(x), \qquad (30)$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D}\left[\sum_{|k|=r_\lambda} b_k^{(\lambda)}(P_1)\,\partial_x^k u_m\right]=\lim_{x\to z\in\partial D}\left\{\sum_{|k|=r_\lambda}\left[\ell_k^{(\lambda)}(P_1)-\ell_k^{(\lambda)}(t,x)\right]\partial_x^k u_m-\right.$$

$$\left.-\sum_{|p|\le r_\lambda-1}\ell_p^{(\lambda)}(t,x)\partial_x^p u_m+g_m^{(\lambda)}(t,x)\right\}\equiv$$

$$\equiv\lim_{x\to z\in\partial D} G_{m,1}^{(\lambda)}(t,x;u_m)\,. \tag{31}$$

У задачі (29)–(31) зробимо заміну $u_m(t,x)=v_m(t,z)$, де $z_i=d_1\big(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\big)\times\times d_2\big(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\big)x_i$, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Тоді функція $V_m^{(1)}(t,z)=v_m(t,z)\eta_1(t,z)$ буде розв'язком задачі

$$\partial_t V_m^{(1)}-\sum_{|k|=2b}a_k(P_1)\,S\big(k;d_1,d_2;t^{(1)},x^{(1)}\big)\,\partial_z V_m^{(1)}=$$

$$=v_m\partial_t\eta_1+\eta_1 F_m^{(1)}(t,\tilde z;v_m)+\sum_{|k|=2b}a_k(P_1)\,S\big(k;d_1,d_2;t^{(1)},x^{(1)}\big)\times$$

$$\times\sum_{0<|p|\le|k|}C_{|k|}^{|p|}\,\partial_z^{k-p}v_m\partial_z^p\eta_1\equiv\Phi_m^{(1)}(t,z;v_m)\,, \tag{32}$$

$$V_m^{(1)}(0,z)=\eta_1(0,z)\varphi_m(\tilde z)\,, \tag{33}$$

$$\sum_{|k|=r_\lambda}b_k^{(\lambda)}(P_1)\,S\big(k;d_1,d_2;t^{(1)},x^{(1)}\big)\,\partial_z^k V_m^{(1)}\Big|_\Gamma=$$

$$=\left[\sum_{|k|=r_\lambda}b_k^{(\lambda)}(P_1)\,S\big(k;d_1,d_2;t^{(1)},x^{(1)}\big)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{0<|p|\le|k|}C_{|k|}^{|p|}\,\partial_z^{k-p}v_m\partial_z^p\eta_1+\eta_1 G_{m,1}^{(\lambda)}(t,\tilde z;v_m)\right]\Bigg|_\Gamma\equiv$$

$$\equiv\tilde G_m^{(1)}(t,z;v_m)\Big|_\Gamma\,, \tag{34}$$

де $\tilde z=\big(d_1^{-1}(\beta_1^{(1)},t^{(1)})\,d_2^{-1}(\beta_1^{(2)},x^{(1)})z_1,\ldots,d_1^{-1}(\beta_n^{(1)},t^{(1)})\,d_2^{-1}(\beta_n^{(2)},x^{(1)})z_n\big)$,

$$\eta_1(t,z)=\begin{cases}1, & (t,z)\in T_{1/2}^{(1)},\quad 0\le\eta_1(t,z)\le 1,\\ 0, & (t,z)\notin T_{3/4}^{(1)},\quad \left|\partial_t^j\partial_z^k\eta_1\right|\le c_{kj}d_1^{-1}\big((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t^{(1)}\big)\times\\ & \qquad\times\, d_2^{-1}\big((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x^{(1)}\big),\end{cases}$$

$$T_\delta^{(1)}=\left\{(t,z)\,\big|\,\left|t^{(1)}-t\right|\le 2\delta N_2,\ \left|z_i-z_i^{(1)}\right|\le 2\delta d_1\big(\gamma^{(1)},t^{(1)}\big)\,d_2\big(\gamma^{(2)},x^{(1)}\big)\,,\right.$$

$$\left.z_i^{(1)}=d_1\big(\beta_i^{(1)},t^{(1)}\big)\,d_2\big(\beta_i^{(2)},x^{(1)}\big)x_i^{(1)},\ i\in\{1,\ldots,n\}\right\}.$$

Коефіцієнти рівняння (32) і крайових умов (34) обмежені константами, незалежними від точки $P_1\big(t^{(1)},x^{(1)}\big)$. Тому за теоремою 4.1 із [7, с. 41] для довільних точок $M_1,M_2\in T_{1/2}^{(1)}$ виконується нерівність

$$d^{-\alpha}(M_1,M_2)\left|\partial_t^j\partial_x^k v_m(M_1)-\partial_t^j\partial_x^k v_m(M_2)\right|\le c_z\left(\left\|\Phi_m^{(1)}\right\|_{C^\alpha(T_{3/4}^{(1)})}+\right.$$

$$\left.+\left\|\eta_1\varphi_m\right\|_{C^{2b+\alpha}(T_{3/4}^{(1)}\cap\{t=0\})}+\sum_{\lambda=1}^{b}\left\|\tilde G_m^{(1)}\right\|_{C^{2b-r_\lambda+\alpha}(T_{3/4}^{(1)})}\right).$$

Враховуючи властивості функції $\eta_1(t,z)$ та означення простору $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;q;Q)$ і повторюючи міркування при встановленні оцінки (28), знаходимо

$$E_1 + E_2 \le c_b \Big(\|F_m;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha + \sum_{\lambda=1}^{b} \|g_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha} + \|u_m;Q\|_0 +$$

$$+ \|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2b+\alpha}\Big) + \varepsilon_5 \|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha}. \qquad (35)$$

Враховуючи нерівності (11), (14), (28), (35) і вибираючи ε_1, ε, ε_4, ε_5 достатньо малими, одержимо оцінку (10). Теорему доведено. ♦

Знайдемо оцінку норми $\|u_m;Q\|_0$.

У задачі (6)–(8) зробимо заміну $u_m(t,x) = \varphi_m(x) + V_m^{(1)}(t,x)$. Одержимо крайову задачу для розв'язку $V_m^{(1)}(t,x)$:

$$(L_1 V_m^{(1)})(t,x) = F_m(t,x) - (L_1\varphi_m)(x),$$

$$V_m^{(1)}(0,x) = 0,$$

$$\lim_{x\to z\in\partial D} \big(B^{(\lambda)}V_m^{(1)}(t,x) + B^{(\lambda)}\varphi_m(x) - g_m^{(\lambda)}(t,x)\big) = 0.$$

Правильною є така

Теорема 3. *Якщо* $u_m(t,x)$ – *єдиний класичний розв'язок задачі* (6)–(8) *і виконуються умови* ***1°–3°***, *то для* $u_m(t,x)$ *справджується нерівність*

$$\|u_m;Q\|_0 \le c\Big(\|F_m;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha + \|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2b+\alpha} +$$

$$+ \sum_{\lambda=1}^{b} \|g_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\Big), \qquad (36)$$

де стала c не залежить від m.

Д о в е д е н н я. За умов, накладених на гладкість коефіцієнтів задачі (6)–(8) і функцій F_m, φ_m, $g_m^{(\lambda)}$, існує єдиний розв'язок задачі (6)–(8), який належить до простору $H^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і має при кожному фіксованому m_1, m_2 скінченну норму [7, с. 83].

Використовуючи методику доведення зауваження 2 з [1, с. 79], встановлюємо нерівність (36). ♦

Д о в е д е н н я **теореми 1**. Оскільки

$$\|F_m;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha \le c\|f_0;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha,$$

$$\|\varphi_m;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2b+\alpha} \le c\|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2b+\alpha},$$

$$\|g_m^{(\lambda)};\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha} \le c\|f_\lambda;\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha},$$

то, використовуючи нерівності (10), (36), одержимо

$$\|u_m;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha} \le c\Big(\|f_0;\gamma;\beta;2b;Q\|_\alpha +$$

$$+ \|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2b+\alpha} + \sum_{\lambda=1}^{b} \|f_\lambda;\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\Big). \qquad (37)$$

Права частина нерівності (37) не залежить від m_1, m_2 і послідовності

$$\{W_m^{(j,k)}\} = \Big\{ d_1((2bj+|k|)\gamma^{(1)},t)\, d_2((2bj+|k|)\gamma^{(2)},x) \left|\partial_t^j \partial_x^k u_m\,(t,x)\right| \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{n} d_1(-k_i\beta_i^{(1)},t) d_2(-k_i\beta_i^{(2)},x),\ 2bj+|k| \le 2b \Big\}$$

є рівномірно обмеженими і рівностепенево неперервними в $\bar{Q}$. За теоремою Арцела існують послідовності $\{W_{m(\ell)}^{(j,k)}\}$, рівномірно збіжні при $m(\ell)\to\infty$ до $W^{(j,k)}$. Переходячи до границі при $m(\ell)\to\infty$ в задачі (6)–(8), одержимо, що $u(t,x) = W^{(0,0)}$ – єдиний розв'язок задачі (6)–(8), $u \in C^{2b+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$, і справджується оцінка (4).

Оскільки

$$C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q) \subset C^{\alpha}(\gamma;\beta;2b;Q)$$

і

$$C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q) \subset C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;r_\lambda;Q),$$

то для $f_0 \in C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ і $f_\lambda \in C^{2b-r_\lambda+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)$ виконуються нерівності

$$\|f_0;\gamma;\beta;2b;Q\|_{\alpha} \le c\,\|f_0;\gamma;\beta;0;Q\|_{\alpha},$$

$$\|f_\lambda;\gamma;\beta;r_\lambda;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha} \le c\,\|f_\lambda;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}.$$

Тому з огляду на нерівність (4) для розв'язку задачі (6)–(8) є правильною оцінка

$$\|u;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b+\alpha} \le c\Big(\|f_0;\gamma;\beta;0;Q\|_{\alpha} + \|\varphi;\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D\|_{2b+\alpha} +$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{b} \|f_\lambda;\gamma;\beta;0;Q\|_{2b-r_\lambda+\alpha}\Big). \tag{38}$$

Будемо розглядати $u(t,x)$ при фіксованих (t,x) як лінійний неперервний функціонал $F(f_0,\varphi,f_1,\ldots,f_b)$ на нормованому просторі

$$C_\alpha \equiv C^{\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)\times C^{2b+\alpha}(\tilde{\gamma};\tilde{\beta};0;D)\times C^{2b-r_1+\alpha}(\gamma;\beta;0;Q)\times\ldots\times C^{2b-r_b+\alpha}(\gamma;\beta;0;D)$$

з нормою, що дорівнює правій частині нерівності (38). З огляду на включення $C_\alpha \subset C(Q)$, згідно з теоремою Рісса, можемо вважати, що $u(t,x)$ породжує борелівську міру $Z(t,x;H)$, яка визначається на σ-алгебрі підмножин G області $\bar{Q}$ включно з Q і всіма її відкритими підмножинами такими, що значення функціонала визначається формулою (5).

Теорему 1 доведено. ♦

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 208 с.
2. *Ивасишен С. Д.* Линейные параболические граничные задачи. – Киев: Вища шк., 1987. – 72 с.
3. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические уравнения с вырождением по части переменных // Докл. РАН. – 1998. – **360**, № 3. – С. 303–305.
4. *Исарюк И. М., Пукальский И. Д.* Краевые задачи для параболических уравнений с нелокальным условием и вырождениями // Укр. мат. вісн. – 2014. – **11**, № 4. – С. 480–496.

Те саме: *Isaryuk I. M., Pukal'skii I. D.* The boundary-value problems for parabolic equations with a nonlocal condition and degenerations // J. Math. Sci. – 2015. – **207**, No. 1. – P. 26–38. – https://doi.org/10.1007/s10958-015-2352-2.

5. *Івасишен С. Д., Мединський І. П., Пасічник Г. С.* Параболічні рівняння з виродженнями на початковій гіперплощині // Буков. мат. журн. – 2016. – **4**, № 3-4. – С. 57–68.
6. *Конаков П. К., Веревочкин Г. Е., Горяинов Л. А., Зарувинская Л. А., Конаков Ю. П., Кудрявцев В. В., Третьяков Г. А.* Тепло- и массообмен при получении монокристаллов. – Москва: Металлургия, 1971. – 238 с.
7. *Матійчук М. І.* Параболічні сингулярні крайові задачі. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
8. *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями. – Чернівці: Прут, 2003. – 248 с.
9. *Пукальський І. Д.* Задача Коші для нерівномірно параболічних рівнянь зі степеневими особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2021. – **64**, № 2. – С. 31–41.
10. *Пукальський І. Д.* Крайові задачі для нерівномірно параболічних та еліптичних рівнянь з виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 2008. – 253 с.
11. *Пукальський І. Д., Ісарюк І. М.* Нелокальні параболічні крайові задачі з особливостями // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 54–66.
    Те саме: *Pukal's'kyi I. D., Isaryuk I. M.* Nonlocal parabolic boundary-value problems with singularities // J. Math. Sci. – 2015. – **208**, No. 3. – P. 327–343. – https://doi.org/10.1007/s10958-015-2449-7.
12. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 427 с.
    Те саме: *Friedman A.* Partial differential equations of parabolic type. – Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1964. – xiv+347 p.

GENERAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR NONUNIFORMLY PARABOLIC EQUATIONS WITH POWER SINGULARITIES

General boundary value problem for nonuniformly $\overrightarrow{2b}$-parabolic equations with degeneration is studied. The coefficients of parabolic equations and boundary conditions admit power singularities of an arbitrary order in any variables on a certain set of points. Using a priori estimates and the Arzelà and Riesz theorems the existence and integral representation of a unique solution of the formulated boundary value problem are established. The estimates for the solution of the general parabolic boundary value problem and its derivatives in Hölder spaces with power weight are found. The order of the power weight is determined by the magnitude of the orders of the power singularities and the degenerations of the coefficients of $\overrightarrow{2b}$-parabolic equations and boundary conditions.

***Key words*:** $\overrightarrow{2b}$*-parabolic equations, power singularities, interpolation inequalities, a priori estimates, Hölder spaces, Stieltjes integral.*

Чернів. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, Чернівці

Одержано
15.02.22