УДК 517.53.57

О. В. Веселовська[✉], В. В. Достойна, Х. Т. Дрогомирецька

ПОБУДОВА РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ У ВИГЛЯДІ ОДНОРІДНИХ ПОЛІНОМІВ ЗА ДВОМА БІОРТОГОНАЛЬНИМИ СИСТЕМАМИ ФУНКЦІЙ

Побудовано систему розв'язків для коефіцієнтів розвинення за системою тригонометричних функцій розв'язку рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій. Доведено деякі властивості біортогональних систем функцій.

Ключові слова: *рівняння Гельмгольца, однорідні поліноми, біортогональні системи функцій, контурні інтеграли.*

Вступ. Гармонічні рівняння і рівняння Гельмгольца належать до рівнянь гіперболічного типу і описують важливі фізичні процеси гідродинаміки, електростатики, магнітостатики, теплопровідності, теорії пружності. Зокрема, гармонічні рівняння описують стаціонарні процеси, а рівняння Гельмгольца – стаціонарні та динамічні процеси.

Розв'язки широкого класу задач для рівняння Гельмгольца будуються методами Фур'є, інтегральних перетворень і теорії потенціалів [3, 7]. У роботах [8, 10] досліджено властивості систем однорідних поліномів, які зображуються контурними інтегралами вигляду

$$P_n(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (x+\xi y)^n \gamma(\xi)\, d\xi ,$$

де $\gamma(\xi)$ – регулярна у нескінченно віддаленій точці функція; Γ – замкнений контур, що охоплює хоча б одну особливу точку функції $\gamma(\xi)$; ξ – комплексна змінна; x, y – дійсні або комплексні змінні. Для поліномів $P_n(x,y)$ побудовано систему асоційованих функцій, біортогональних до них на замкнених кривих комплексної площини, та встановлено умови, за яких аналітичні функції можна розкласти в ряди за цими системами.

Метод побудови розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь із частинними похідними у вигляді контурних інтегралів $u(x,y) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} F(x+\xi y)\gamma(\xi)\, d\xi$ і рядів за системою однорідних поліномів викладено в роботах [1, 6, 14]. При цьому для функцій F і γ одержано відповідно функціональне та звичайне диференціальне рівняння.

У роботі [11] методом контурних інтегралів побудовано систему розв'язків бігармонічного рівняння та рівняння Гельмгольца у декартових координатах у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій. Функції однієї з цих систем задаються у вигляді лінійних комбінацій добутків степеневих та тригонометричних функцій, а іншої – у вигляді поліномів за від'ємними степенями змінної. Досліджено властивості біортогональних систем функцій та встановлено достатні умови розвинення функцій у ряди за цими системами. Розв'язки рівняння Гельмгольца у площині, півплощині та смузі одержано у вигляді рядів за системами однорідних поліномів.

У цій статті побудовано систему розв'язків для коефіцієнтів розвинення за тригонометричною системою функцій розв'язку рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат у вигляді однорідних поліномів за двома

✉ olha.v.veselovska@lpnu.ua

біортогональними системами функцій, що узагальнює відповідні результати з [13], отримані для нульового та першого коефіцієнтів розвинення за тригонометричною системою функцій розв'язку рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат. Крім того, доведено деякі властивості системи біортогональних функцій.

1. Біортогональні системи розв'язків рівняння Гельмгольца в циліндричній системі координат. Розглянемо диференціальне рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \chi^2 U = 0\,, \tag{1}$$

де $z \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\chi = \mathrm{const}$. Розв'язки цього рівняння будемо шукати у вигляді ряду за тригонометричною системою функцій

$$U(z, r, \varphi) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} U^{\nu}(z, r) e^{i\nu\varphi}\,.$$

Підставивши цей ряд в (1), отримаємо рівняння для знаходження функцій $U^{\nu} = U^{\nu}(z, r)$:

$$\frac{\partial^2 U^{\nu}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U^{\nu}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U^{\nu}}{\partial r} + \left(\chi^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) U^{\nu} = 0, \qquad \nu \in \mathbb{Z}\,. \tag{2}$$

Заміною $x = \chi z$, $\rho = \chi r$ зведемо це рівняння до вигляду

$$\frac{\partial^2 U^{\nu}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U^{\nu}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U^{\nu}}{\partial \rho} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right) U^{\nu} = 0, \qquad \nu \in \mathbb{Z}\,. \tag{3}$$

Розв'язки рівняння (3) будемо шукати у вигляді рядів за однорідними поліномами, зображеними в інтегральній формі:

$$u_n^{\nu}(x, \rho) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (x + \xi\rho)^k \gamma_k(\xi)\, d\xi\,, \tag{4}$$

де Γ – замкнена крива, що охоплює хоча б одну особливу точку функції γ_k. Підставляючи інтегральне зображення (4) у рівняння (3), отримаємо таке функціональне рівняння:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=n}^{\infty} \int_{\Gamma} \Bigg[k(k-1)(1+\xi^2)(x+\xi\rho)^{k-2} + \frac{k\xi}{\rho}(x+\xi\rho)^{k-1} + \left(1 - \frac{\nu^2}{\rho^2}\right)(x+\xi\rho)^k \Bigg] \gamma_k(\xi)\, d\xi = 0\,.$$

Інтегруючи частинами та згруповуючи відповідні доданки, знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \Bigg\{ (x+\xi\rho)^n \left[\frac{d^2}{d\xi^2}\left[(1+\xi^2)\gamma_n(\xi)\right] - \frac{d}{d\xi}\left[\xi\gamma_n(\xi)\right] - \nu^2\gamma_n(\xi) \right] + \\ + (x+\xi\rho)^{n+1} \Bigg[\frac{d^2}{d\xi^2}\left[(1+\xi^2)\gamma_{n+1}(\xi)\right] - \frac{d}{d\xi}\left[\xi\gamma_{n+1}(\xi)\right] - \\ - \nu^2\gamma_{n+1}(\xi) \Bigg] \Bigg\} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=n+2}^{\infty} \int_{\Gamma} (x+\xi\rho)^k \Bigg\{ \frac{d^2}{d\xi^2}\left[(1+\xi^2)\gamma_k(\xi)\right] - \\ - \frac{d}{d\xi}\left[\xi\gamma_k(\xi)\right] - \nu^2\gamma_k(\xi) + \frac{1}{k(k-1)}\frac{d^2}{d\xi^2}\left[\gamma_{k-2}(\xi)\right] \Bigg\} d\xi = 0\,. \end{aligned}$$

Звідси отримаємо звичайні диференціальні рівняння для визначення невідомих функцій $\gamma_j(\xi)$:

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left[(1+\xi^2)\gamma_n(\xi)\right]-\frac{d}{d\xi}\left[\xi\gamma_n(\xi)\right]-\nu^2\gamma_n(\xi)=0\,,$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left[(1+\xi^2)\gamma_{n+1}(\xi)\right]-\frac{d}{d\xi}\left[\xi\gamma_{n+1}(\xi)\right]-\nu^2\gamma_{n+1}(\xi)=0\,,$$

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left[(1+\xi^2)\gamma_k(\xi)\right]-\frac{d}{d\xi}\left[\xi\gamma_k(\xi)\right]-\nu^2\gamma_k(\xi)+\frac{1}{k(k-1)}\frac{d^2}{d\xi^2}\left[\gamma_{k-2}(\xi)\right]=0\,,$$

або

$$(1+\xi^2)\gamma_n''(\xi)+3\xi\gamma_n'(\xi)+(1-\nu^2)\gamma_n(\xi)=0\,,$$

$$(1+\xi^2)\gamma_{n+1}''(\xi)+3\xi\gamma_{n+1}'(\xi)+(1-\nu^2)\gamma_{n+1}(\xi)=0\,, \tag{5}$$

$$(1+\xi^2)\gamma_k''(\xi)+3\xi\gamma_k'(\xi)+(1-\nu^2)\gamma_k(\xi)=-\frac{1}{k(k-1)}\gamma_{k-2}''(\xi)\,,$$

$$k=n+2,n+3,\ldots. \tag{6}$$

Розв'язками рівнянь (5) є функції

$$\gamma_n(\xi)=\gamma_{n+1}(\xi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)!}{2^{2k}k!(k+\nu)!}\frac{1}{\xi^{2k+\nu+1}}\,,$$

а рекурентного рівняння (6) – функції

$$\gamma_{n+2m}(\xi)=\frac{n!}{m!(n+2m)!}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)!}{2^{2k}(k-m)!(k+\nu)!}\frac{1}{\xi^{2k+\nu+1}}\,,$$

де $m=1,2,\ldots$.

Підставляючи розв'язки $\gamma_{n+2m}(\xi)$ у співвідношення (4), знаходимо

$$u_n^\nu(x,\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(x+\xi\rho)^{n+2m}\gamma_{n+2m}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(x+\rho\xi)^{n+2m}\frac{n!}{m!(n+2m)!}\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)!}{2^{2k}(k-m)!(k+\nu)!}\frac{d\xi}{\xi^{2k+\nu+1}}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n!}{m!(n+2m)!}\sum_{j=0}^{n+2m}C_{n+2m}^j x^{n+2m-j}\rho^j\times$$

$$\times\sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+\nu)!}{2^{2k}(k-m)!(k+\nu)!}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{d\xi}{\xi^{2k-j+\nu+1}}\,.$$

Нехай $\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n,\\ 0, & m\neq n,\end{cases}$ – символ Кронекера. Відомо [5, с. 81–82], що

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{dz}{z^n}=\delta_{mn}\,. \tag{7}$$

Тому згідно з (7) матимемо

$$u_n^{\nu}(x,\rho)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{n!}{m!(n+2m)!}\sum_{k=m}^{\left[\frac{n-\nu}{2}+m\right]}\frac{(-1)^k(2k+\nu)!}{2^{2k}(k-m)!(k+\nu)!}\times$$

$$\times C_{n+2m}^{2k+\nu}x^{n+2m-2k-\nu}\rho^{2k+\nu}=$$

$$=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-\nu}{2}\right]}\frac{(-1)^r n!}{2^{2r}r!(n-2r-\nu)!(r+\nu)!}x^{n-2r-\nu}(r+\nu)!\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m}m!(m+r+\nu)!}\rho^{2(m+r)+\nu}=$$

$$=\sum_{r=0}^{\left[\frac{n-\nu}{2}\right]}\frac{(-1)^r C_n^{2r+\nu}C_{2r+\nu}^{r}}{2^{2r}}x^{n-2r-\nu}(r+\nu)!\times$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^{2m}m!(m+r+\nu)!}\rho^{2(m+r)+\nu}. \tag{8}$$

Тут $[x]$ – ціла частина x.

Введемо систему $\{b_n^{\mu}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ функцій комплексної змінної z:

$$b_n^{\mu}(z)=\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]+\mu\right)!\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{2^{2\ell}\ell!\left(\ell+\left[\frac{n+1}{2}\right]+\mu\right)!}z^{n+2\ell}, \tag{9}$$

де $n=0,1,2,\ldots$. Зі співвідношень (9) отримаємо вирази для функцій $b_n^{\mu}(z)$ окремо для парних і непарних значень індексів n:

$$b_{2n}^{\mu}(z)=(n+\mu)!\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\ell}}{2^{2\ell}\ell!(\ell+n+\mu)!}z^{2(n+\ell)}=$$

$$=(n+\mu)!\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^{j-n}}{2^{2(j-n)}(j-n)!(j+\mu)!}z^{2j}=$$

$$=(-1)^n 2^{2n}n!(n+\mu)!\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j}j!(j+\mu)!}z^{2j}, \tag{10}$$

$$b_{2n+1}^{\mu}(z)=(-1)^n 2^{2n}n!(n+\mu+1)!\sum_{j=n}^{\infty}\frac{(-1)^j C_j^n}{2^{2j}j!(j+\mu+1)!}z^{2j+1}. \tag{11}$$

Тоді розв'язки $u_n^{\nu}(x,\rho)$, визначені співвідношенням (8), для різних значень n та ν виражаються через функції $b_{2n}^{\mu}(z)$, $b_{2n+1}^{\mu}(z)$ так:

$$u_n^{2\mu}(x,\rho)=\sum_{\ell=\mu}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{\ell-\mu}C_n^{2\ell}C_{2\ell}^{\ell-\mu}}{2^{2(\ell-\mu)}}x^{n-2\ell}b_{2\ell}^{\mu}(\rho), \tag{12}$$

$$u_n^{2\mu+1}(x,\rho)=\sum_{\ell=\mu}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{(-1)^{\ell-\mu}C_n^{2\ell+1}C_{2\ell+1}^{\ell-\mu}}{2^{2(\ell-\mu)}}x^{n-(2\ell+1)}b_{2\ell+1}^{\mu}(\rho). \tag{13}$$

Зауважимо, що з формул (12) та (13) при $\mu = 0$ отримаємо систему розв'язків для нульового та першого коефіцієнтів розвинення за тригонометричною системою функцій розв'язку рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат відповідно [13].

2. Властивості систем функцій $b_n^{\mu}(z)$. Сформулюємо та доведемо деякі властивості систем функцій $b_n^{\mu}(z)$, що узагальнюють функції $b_n(z)$ з [12].

Твердження 1. *Функції* $b_n^{\mu}(z)$ *– цілі.*

Д о в е д е н н я. На підставі ознаки Даламбера ряд у співвідношенні (9) збігається рівномірно на будь-якому компакті комплексної площини і тому визначає цілу функцію. ♦

Твердження 2. *Для функцій* $b_{2n}^{\mu}(z)$, $b_{2n+1}^{\mu}(z)$ *справджуються співвідношення*

$$b_{2n}^{\mu}(z) = 2^{n+\mu}(n+\mu)!\,z^{n-\mu}J_{n+\mu}(z), \tag{14}$$

$$b_{2n+1}^{\mu}(z) = 2^{n+\mu+1}(n+\mu+1)!\,z^{n-\mu}J_{n+\mu+1}(z), \tag{15}$$

де $J_{\lambda}(z)$ *– функція Бесселя 1-го роду порядку* λ [2, с. 12].

Д о в е д е н н я. Використовуючи зображення [2, с. 12] функцій Бесселя:

$$J_{\lambda}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\lambda} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell}}{2^{2\ell}\,\ell!(\ell+\lambda)!} z^{2\ell}$$

і співвідношення (10), (11), отримуємо формули (14), (15). ♦

Твердження 3. *Для функцій* $b_n^{\mu}(z)$ *виконуються оцінки*

$$\left|b_n^{\mu}(z)\right| \le e^{|z|}\,|z|^n. \tag{16}$$

Д о в е д е н н я. Зі співвідношення (10) на підставі відомої оцінки [2, с. 23] $J_{\mu}(z) \le \left|\frac{z}{2}\right|^{\mu} \frac{e^{|y|}}{\Gamma(\mu+1)}$, де $y = \operatorname{Im} z$, маємо

$$\left|b_{2n}^{\mu}(z)\right| \le 2^{n+\mu}(n+\mu)!\,|z|^{n-\mu} \frac{|z|^{n+\mu}\,e^{|y|}}{2^{n+\mu}(n+\mu)!} \le e^{|z|}\,|z|^{2n}.$$

Аналогічно отримуємо

$$\left|b_{2n+1}^{\mu}(z)\right| \le e^{|z|}\,|z|^{2n+1}.$$

З отриманих нерівностей випливає оцінка (16). ♦

Твердження 4. *Для похідних від функцій* $b_{2n}^{\mu}(z)$, $b_{2n+1}^{\mu}(z)$ *справджуються формули*

$$\frac{db_{2n}^{\mu}(z)}{dz} = 2(n+\mu)z^2 b_{2n-3}^{\mu}(z) - \frac{2\mu}{z} b_{2n}^{\mu}(z),$$

$$\frac{db_{2n+1}^{\mu}(z)}{dz} = 2(n+\mu+1) b_{2n}^{\mu}(z) - \frac{2\mu+1}{z} b_{2n+1}^{\mu}(z).$$

Д о в е д е н н я. Ці формули безпосередньо випливають зі співвідношень (10), (11). ♦

Твердження 5. *Функції* $b_{2n}^{\mu}(z)$, $b_{2n+1}^{\mu}(z)$ *задовольняють диференціальні рівняння*

$$z^2 \frac{d^2 b_{2n}^{\mu}(z)}{dz^2} - (2n - 2\mu - 1) z \frac{d b_{2n}^{\mu}(z)}{dz} + \left(z^2 - 4n\mu\right) b_{2n}^{\mu}(z) = 0 ,$$

$$z^2 \frac{d^2 b_{2n+1}^{\mu}(z)}{dz^2} - (2n - 2\mu - 1) z \frac{d b_{2n+1}^{\mu}(z)}{dz} +$$

$$+ \left[z^2 - (2n+1)(2\mu+1)\right] b_{2n+1}^{\mu}(z) = 0 .$$

Д о в е д е н н я. Підставляючи у ці диференціальні рівняння вирази (10), (11) для функцій $b_{2n}^{\mu}(z)$, $b_{2n+1}^{\mu}(z)$, переконуємось у правильності твердження 5. ♦

Твердження 6. *Справджуються розвинення*

$$b_0^{\mu}(\sqrt{2}z) = \mu! \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2^{2r} r!(r+\mu)!} b_{2r}^{\mu}(z) ,$$

$$b_{2n}^{\mu}(\sqrt{2}z) = (-1)^n 2^{3n} n!(n+\mu)! \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r C_r^n}{2^{2r} r!(r+\mu)!} b_{2r}^{\mu}(z) ,$$

$$b_1^{\mu}(\sqrt{2}z) = \sqrt{2}(\mu+1)! \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2^{2r} r!(r+\mu+1)!} b_{2r+1}^{\mu}(z) ,$$

$$b_{2n+1}^{\mu}(\sqrt{2}z) = (-1)^n 2^{3n+\frac{1}{2}} n!(n+\mu+1)! \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r C_r^n}{2^{2r} r!(r+\mu+1)!} b_{2r+1}^{\mu}(z) . \qquad (17)$$

При цьому ряди в (17) *збігаються рівномірно в області* $|z| \le R$, $R < \infty$.

Д о в е д е н н я. Підставимо у праву частину першого зі співвідношень (17) вираз (10) для $b_{2n}^{\mu}(z)$ і змінимо порядок підсумовування:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2^{2r} r!(r+\mu)!} b_{2r}^{\mu}(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k^r}{2^{2k} k!(k+\mu)!} z^{2k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+\mu)!} z^{2k} \sum_{r=0}^{k} C_k^r .$$

Врахувавши відому тотожність [9, с. 619] $\sum_{r=0}^{k} C_k^r = 2^k$, матимемо

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2^{2r} r!(r+\mu)!} b_{2r}^{\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k k!(k+\mu)!} z^{2k} = \frac{1}{\mu!} b_0^{\mu}(\sqrt{2}z) ,$$

звідки випливає перше зі співвідношень (17).

Подібною підстановкою покажемо правильність другого розвинення:

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r C_r^n}{2^{2r} r!(r+\mu)!} b_{2r}^{\mu}(z) = \sum_{r=n}^{\infty} C_r^n \sum_{k=r}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k^r}{2^{2k} k!(k+\mu)!} z^{2k} =$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{2k} k!(k+\mu)!} z^{2k} \sum_{r=n}^{k} C_k^r C_r^n .$$

Врахувавши відому тотожність [9, с. 619] $\sum_{r=n}^{k} C_k^r C_r^n = 2^{k-n} C_k^n$, знаходимо

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r C_r^n}{2^{2r} r!(r+\mu)!} b_{2r}^{\mu}(z) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k C_k^n}{2^k k!(k+\mu)!} z^{2k} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2^{3n} n!(n+\mu)!} b_{2n}^{\mu}(\sqrt{2}z),$$

звідки отримуємо потрібне співвідношення.

Аналогічно отримуємо решту розвинень із (17).

Покажемо рівномірну збіжність ряду, наприклад, в останньому співвідношенні (17). На підставі оцінки (16) маємо

$$\left| \sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r C_r^n}{2^{2r} r!(r+\mu+1)!} b_{2r+1}^{\mu}(z) \right| \le \frac{e^{|z|}}{n!} \sum_{r=n}^{\infty} \frac{1}{2^{2r}(r-n)!(r+\mu+1)!} |z|^{2r+1} \le$$

$$\le \frac{2e^R}{n!(n+\mu+1)!} \sum_{r=n}^{\infty} \left(\frac{R}{2}\right)^{2r+1}.$$

Оскільки отриманий числовий ряд збіжний, то ряд

$$\sum_{r=n}^{\infty} \frac{(-1)^r C_r^n}{2^{2r} r!(r+\mu+1)!} b_{2r+1}^{\mu}(z)$$

збігається рівномірно в області $|z| \le R$, $R < \infty$. ♦

Висновки. У роботі методом контурних інтегралів одержано систему розв’язків для коефіцієнтів розвинення розв’язку рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат за тригонометричною системою функцій у вигляді однорідних поліномів за двома біортогональними системами функцій. За цими результатами можна отримати розв’язки для часткових випадків нульової і першої гармонік, що мають самостійний прикладний характер. Запропонований метод не є звичним методом відокремлення змінних, адже одна із систем функцій є системою однорідних поліномів за двома змінними. Крім того, доведено деякі властивості біортогональних систем функцій, через які виражаються розв’язки рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат.

Продовжуючи дослідження, важливо побудувати функції, асоційовані з системою функцій $\{b_n^{\mu}(z)\}$ [8], що біортогональні до них на замкнених кривих комплексної площини, та встановити умови, за яких аналітичні функції можна розвинути в ряди за цими системами. Це дозволить розв’язувати крайові задачі для рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат.

1. *Айнс Э. Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ГОНТИ–ДНТВУ–НКТП , 1939. – 720 с.
   Те саме: *Ince E. L.* Ordinary differential equations. – London: Longmans & Green Co., 1927. – viii+558 p.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – Т. 2: Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1974. – 296 с.
   Те саме: *Bateman H., Erdélyi A.* Higher transcendental functions. – Vol. 2: Bessel functions, parabolic cylinder functions, and orthogonal polynomials. – New York McGraw-Hill, 1953. – 396 p.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1981. – 512 с.
4. *Воробьев Н. Н.* Теория рядов. – Москва: Наука, 1979. – 408 с.
5. *Жевержеев В. Ф., Кальницкий Л. А., Сапогов Н. А.* Специальный курс высшей математики для втузов. – Москва: Высш. шк., 1970. – 416 с.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – Москва: Наука, 1976. – 576 с.
   Те саме: *Kamke E.* Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. – Vol. I: Gewöhnliche Differentialgleichungen. – Leipzig: B. G. Teubner, 1977.

– http://dx.doi.org/10.1007/978-3-663-05925-7.
7. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – Москва: Наука, 1987. – 688 с.
8. *Маркушевич А. И.* Избранные главы теории аналитических функций. – Москва: Наука, 1976. – 192 с.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды: В 3 т. – Т. 1: Элементарные функции. – Москва: Наука, 1981. – 798 с.
   Те саме: *Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I.* Integrals and series. Vol. 1. Elementary Functions. – New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1986.
10. *Сухорольський М. А.* Розвинення функцій за системою поліномів, біортогональних на замкненому контурі з системою регулярних у нескінченно віддаленій точці функцій // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 2. – С. 238–254.
   Те саме: *Sukhorolsky M. A.* Expansion of functions in a system of polynomials biorthogonal on a closed contour with a system of functions regular at infinitely remote point // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, No. 2. – P. 268–288.
   – https://doi.org/10.1007/s11253-010-0350-6.
11. *Сухорольський М. А.* Системи розв'язків рівняння Гельмгольца // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2011. – № 718. – С. 19–34.
12. *Сухорольський М. А., Достойна В. В.* Один клас біортогональних систем функцій, які виникають при розв'язанні рівняння Гельмгольца у циліндричній системі координат // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 2. – С. 52–62.
   Те саме: *Sukhorolsky M. A., Dostoyna V. V.* One class of biorthogonal systems of functions that arise in the solution of the Helmholtz equation in the cylindrical coordinate system // J. Math. Sci. – 2013. – **192**, No. 5. – P. 541–554.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-013-1415-5.
13. *Сухорольський М. А., Достойна В. В., Веселовська О. В.* Біортогональні системи розв'язків системи Гельмгольца в циліндричній системі координат // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2018. – № 898. – С. 56–68.
14. *Сухорольський М. А., Костенко І. С., Достойна В. В.* Побудова розв'язків рівнянь з частинними похідними у вигляді контурних інтегралів // Вестн. Херсон. нац. техн. ун-та. – 2013. – № 2(47). – С. 323–326.

CONSTRUCTION OF THE SOLUTIONS OF THE HELMHOLTZ EQUATION IN CYLINDRICAL SYSTEM OF COORDINATES IN THE FORM OF HOMOGENEOUS POLYNOMIALS BY TWO BIORTHOGONAL SYSTEMS OF FUNCTIONS

The system of solutions for coefficients of expansion in trigonometric system of functions for the solution of the Helmholtz equation in the cylindrical system of coordinate in the form of homogeneous polynomials by two biorthogonal systems of functions are constructed. Some properties of the biorthogonal systems of functions are proved.

Key words: *Helmholtz equation, homogeneous polynomials, biorthogonal systems of functions, contour integrals.*

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
15.10.21