УДК 512.64

А. М. Романів, В. П. Щедрик[✉]

АДЕКВАТНІ ВЛАСТИВОСТІ ДІЛЬНИКІВ МАТРИЦЬ

Адекватні кільця, зокрема адекватні елементи, виникли як узагальнення кілець головних ідеалів при дослідженні задачі редукції матриць. Головна властивість елементів цих кілець полягає у можливості їх зображення у вигляді добутку двох співмножників, які задовольняють певні умови. Вводиться поняття адекватності у випадку некомутативних кілець, вивчаються властивості дільників матриць над адекватними кільцями. Також досліджується вплив зміни форм Сміта та перетворювальних матриць на адекватні властивості дільників матриць.

Ключові слова: *дільники матриць, адекватні кільця, форма Сміта, перетворювальні матриці.*

Вступ. Комутативні області скінченно породжених головних ідеалів (області Безу) та кільця матриць над ними мають багато схожих властивостей, незважаючи на те, що кільця матриць є некомутативними об'єктами з дільниками нуля. Зокрема, кожний скінченно породжений лівий (правий) головний ідеал у матричному кільці знову є головним. З поправкою на некомутативність, у таких кільцях є коректним поняття найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного, які визначені однозначно з точністю до відповідної асоційовності. Якщо a, b − елементи комутативної області скінченно породжених головних ідеалів R, то для них виконується рівність $ab = (a,b)[a,b]$. У кільці $M_n(R)$ для добутку матриць AB виконується умова $\det(AB) = \det(A,B)_\ell \det[A,B]_r$, де $\det(A, B)_\ell$, $\det[A,B]_r$ − лівий найбільший спільний дільник і праве найменше спільне кратне матриць A та B (див. означення нижче). З іншого боку, між такими кільцями є і суттєва відмінність. Продемонструємо це на прикладі, що стосується однієї із фундаментальних властивостей елементів кільця R. Так, якщо $(a,b) = 1$ та $(a,c) = 1$, то $(a,bc) = 1$. У матричних кільцях над R таке твердження є хибним.

► ***Приклад***. Розглянемо матриці

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \alpha \end{Vmatrix}, \qquad C = \begin{Vmatrix} \alpha & \alpha \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

де α − ненульовий необоротний елемент R. Тоді $(A,B)_\ell = (A,C)_\ell = I$, тобто є взаємно простими зліва, проте $(A,BC)_\ell \neq I$. Дійсно,

$$BC = \begin{Vmatrix} \alpha & \alpha \\ 2\alpha & \alpha \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} \alpha & \alpha \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} = A \begin{Vmatrix} \alpha & \alpha \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}. \qquad ◄$$

У пропонованій роботі досліджуємо властивості дільників матриць над адекватним кільцем, яке є одним із яскравих прикладів кілець Безу. Кільце R називається *адекватним*, якщо R є комутативною областю Безу і для кожного $0 \neq b \in R$ і $a \in R$ існує такий розклад $b = st$, що $(t,a) = 1$, і для кожного необоротного дільника s' елемента s виконується умова $(s',a) \neq 1$. Концепція адекватних кілець виникла як формалізація O. Helmer-ом [6] властивостей кільця цілих аналітичних функцій. Комутативні області головних ідеалів є прикладом адекватних кілець. Обернене твердження є хибним. Адекватним кільцем, яке не є областю головних ідеалів, є кільце формальних степеневих рядів над полем раціональних чисел із цілим віль-

✉ shchedrykv@ukr.net

ним членом [5, 7]. Регулярне за фон Нейманом кільце є адекватним [5]. Адекватні кільця з дільниками нуля в радикалі Джекобсона досліджував I. Kaplansky [8]. А. Гаталевич [2] досліджував некомутативні адекватні кільця та їхні узагальнення. У роботі [10] вивчалися кільця Безу, в яких кожний регулярний елемент є адекватним. Б. Забавський в [1] увів новий клас кілець, що містить адекватні кільця, і назвав їх узагальненими адекватними кільцями. В. Щедрик у [3] довів, що кільце матриць другого порядку над адекватним кільцем має стабільний ранг 1.5. Також він показав у [4], що над такими кільцями повна лінійна група розкладається у добуток трьох її підгруп.

Для некомутативних кілець Безу введемо таке поняття адекватності.

***Означення* 1.** Елемент $b \in R$ називається *адекватним зліва* до $a \in R$, якщо існує розклад $b = st$ такий, що

1°) для кожного неодиничного елемента $s' \in R$ такого, що $sR \subset s'R \neq \neq R$, виконується умова $s'R + aR \neq R$;

2°) для кожного неодиничного елемента $t' \in R$ такого, що $tR \subset t'R \neq \neq R$, існує розклад $st' = pq$ такий, що $pR + aR = R$.

З огляду на це означення виникає потреба в дослідженні властивостей дільників матриць з точки зору опису адекватних елементів матричних кілець.

1. Допоміжні твердження. Адекватні кільця є кільцями елементарних дільників [2, 4], тобто над такими кільцями для кожної $n \times n$-матриці A існують такі оборотні матриці P_A, Q_A, що $P_A A Q_A = \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, де $\alpha_i \,|\, \alpha_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Матриця $\mathrm{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ називається формою Сміта матриці A, а P_A і Q_A − лівими та правими перетворювальними матрицями для матриці A.

Через (a, b) позначатимемо найбільший спільний дільник, а через $[a, b]$ − найменше спільне кратне елементів $a, b \in R$. Одиничну матрицю позначатимемо через I.

Якщо $A = BC$, то A називається правим кратним матриці B. Якщо $A = DA_1$ і $B = DB_1$, то D називається лівим спільним дільником A і B. Більше того, якщо D є правим кратним кожного лівого спільного дільника A і B, то матриця D називається лівим найбільшим спільним дільником A і B (позначається $(A, B)_\ell$).

Наведемо низку необхідних результатів, які адаптовано до розглядуваного конкретного випадку. Нехай

$$A = P_A^{-1}\, \mathrm{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2) Q_A^{-1}, \qquad B = P_B^{-1}\, \mathrm{diag}\,(\beta_1, \beta_2) Q_B^{-1}, \tag{1}$$

де $P_B P_A^{-1} = [s_{ij}]$, є матрицями над адекватним кільцем.

Теорема 1 [3**]**. *Формою Сміта матриці* $(A, B)_\ell$ *є*

$$\mathrm{diag}\big((\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2, [\alpha_1, \beta_1] s_{21})\big).$$

Наслідок 1 [3**]**. *Для того щоб* $(A, B)_\ell = I$, *необхідно та достатньо, щоб*

$$(\alpha_2, \beta_2, [\alpha_1, \beta_1] s_{21}) = 1. \tag{2}$$

Позначимо через $\mathbf{L}\big(\mathrm{diag}\,(\alpha_1, \alpha_2), \mathrm{diag}\,(\beta_1, \beta_2)\big)$ множину всіх оборотних матриць вигляду

$$\left\| \begin{matrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \dfrac{\beta_2}{(\beta_2, \alpha_1)} \ell_{12} & \ell_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Теорема 2 **[**Теорема 4.2 [9, с. 127]**]**. *Матриця* B *є лівим дільником матриці* A, *тобто* $A = BC$, *тоді й тільки тоді, коли* $\beta_i \,|\, \alpha_i$, $i = 1, 2$, *та* $P_B = LP_A$, *де* $L \in \mathbf{L}(\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2), \operatorname{diag}(\beta_1, \beta_2))$.

Теорема 3 **[**Теорема 4.4 [9, с. 128]**]**. *Множиною всіх лівих дільників матриці* A, *які мають форму Сміта* $\operatorname{diag}(\beta_1, \beta_2)$, *є*

$$(\mathbf{L}(\operatorname{diag}(\alpha_1, \alpha_2), \operatorname{diag}(\beta_1, \beta_2))P_B)^{-1} \operatorname{diag}(\beta_1, \beta_2) GL_2(R).$$

2. Основні результати. Нехай $A = BC$, де матриці A і B мають вигляд (1). Дослідимо вплив зміни перетворювальної матриці P_B і форми Сміта матриці B на той факт, що B є лівим дільником матриці A.

Лема 1. *Нехай* R *– комутативна область Безу і* $\dfrac{ab}{c} \in R$, *причому* $\left(\dfrac{ab}{c}, b\right) = 1$. *Тоді* $c = bt$, *де* $t \in R$.

Д о в е д е н н я. Існують u, v такі, що

$$\frac{ab}{c} u + bv = 1.$$

Тоді $abu + bvc = c$, тобто $c = b(au + cv) = bt$, де $t := au + cv$. ♦

Лема 2. *Нехай* $\beta_1 \,|\, \alpha_1$, $\beta_1 \,|\, \beta_2$ *і* $\gamma_2 \,|\, \beta_2$, *причому*

$$\left(\frac{\beta_2}{(\beta_2, \alpha_1)}, \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)}\right) = 1.$$

Тоді $\gamma_2 \,|\, \alpha^2$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\dfrac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)} \,|\, \gamma_2 \,|\, \beta_2$, то на підставі леми 1

$$\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)} \,|\, (\alpha_1, \beta_2) \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)} \,|\, \alpha_1.$$

Звідси випливає, що $\gamma_2 \,|\, \alpha_1(\gamma_2, \beta_1) = (\alpha_1\gamma_2, \alpha_1\beta_1)$. Отже, $\gamma_2 \,|\, \alpha_1\beta_1$. Оскільки $\beta_1 \,|\, \alpha_1$, то $\alpha_1\beta_1 \,|\, \alpha_1^2$. Таким чином, $\gamma_2 \,|\, \alpha^2$. ♦

Теорема 4. *Нехай* R *– адекватне кільце і* $A = BC$, *де* A, B *– неособливі матриці над* R *вигляду* (1). *Нехай* δ *– елемент* R *такий, що всі дільники* $\dfrac{\beta_2}{(\beta_2, \alpha_1)}$ *мають спільний нетривіальний дільник з* δ. *Тоді кожний лівий дільник матриці вигляду*

$$F = \left(\begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ \delta f_{21} & f_{22} \end{Vmatrix} P_A\right)^{-1} \begin{Vmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{Vmatrix} Q_F^{-1}, \quad \text{де} \quad \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ \delta f_{21} & f_{22} \end{Vmatrix}, \; Q_F \in GL_2(R),$$

має лівий спільний нетривіальний дільник з матрицею A.

Д о в е д е н н я. На підставі теореми 3 кожний лівий дільник матриці F має вигляд

$$F' = \Bigg(\underbrace{\begin{Vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \dfrac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)} \ell_{21} & \ell_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ \delta f_{21} & f_{22} \end{Vmatrix} P_A}_{P_{F'}}\Bigg)^{-1} \begin{Vmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{Vmatrix} Q_{F'}^{-1},$$

де $\gamma_1 \,|\, \gamma_2$ і $\gamma_i \,|\, \beta_i$, $i = 1, 2$, $Q_{F'} \in GL_2(R)$. Розглянемо матрицю

$$P_{F'}P_A^{-1} = \begin{Vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)}\ell_{21} & \ell_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ \delta f_{21} & f_{22} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)}, \delta\right) g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} := \|s_{ij}\|.$$

Отже,

$$s_{21} = \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)}, \delta\right) g_{21}. \tag{3}$$

На підставі теореми 2 маємо $\beta_i \,|\, \alpha_i$, $i = 1, 2$. Згідно з теоремою 1, формою Сміта матриці $(A, F')_\ell$ є матриця

$$\begin{Vmatrix} (\alpha_1, \gamma_1) & 0 \\ 0 & (\alpha_2, \gamma_2, [\alpha_1, \gamma_1] s_{21}) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & (\gamma_2, \alpha_1 s_{21}) \end{Vmatrix} := \begin{Vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{Vmatrix}.$$

1°. Нехай $\left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)}, \delta\right) = 1$. Припустимо, що

$$\left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)}, \frac{\beta_2}{(\beta_2, \alpha_1)}\right) : \mu \neq 1.$$

Оскільки $\mu \,|\, \frac{\beta_2}{(\beta_2, \alpha_1)}$, то, згідно з обмеженнями на елемент δ, маємо $(\delta, \mu) := \mu_1 \neq 1$. Оскільки $\mu_1 \,|\, \mu \,|\, \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)}$, то $\mu_1 \,|\, \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)}, \delta\right) = 1$. Отримали протиріччя. Отже,

$$\left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)}, \frac{\beta_2}{(\beta_2, \alpha_1)}\right) = 1.$$

На підставі леми 2 це означає, що $\gamma_2 \,|\, \alpha_1^2$, звідки $(\gamma_2, \alpha_1) := a \neq 1$. Тому $a \,|\, \omega_2$. Скориставшись наслідком 1, отримуємо, що $(A, F')_\ell \neq I$.

2°. Нехай $\left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)}, \delta\right) := d \neq 1$. Оскільки $d \,|\, \frac{\gamma_2}{(\gamma_2, \beta_1)}$, то $d \,|\, \gamma_2$. Таким чином, з огляду на (3), отримуємо $d \,|\, (\gamma_2, \alpha_1 s_{21}) = \omega_2$. Це означає, що і в цьому випадку $(A, F')_\ell \neq I$. Теорему доведено. ♦

Теорема 5. *Нехай R − адекватне кільце і $A = BC$, де A, B − неособливі матриці над R вигляду* (1). *Нехай* $\mathrm{diag}(\delta_1, \delta_2)$ − *така матриця, у якій $\delta_1 \,|\, \delta_2$, причому кожний дільник δ_i' елемента δ_i має спільний нетривіальний дільник з β_i, $i = 1, 2$. Тоді кожний лівий дільник матриці вигляду*

$$F = P_B^{-1} \begin{Vmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{Vmatrix} Q_F^{-1}, \qquad \text{де} \qquad Q_F \in GL_2(R),$$

має лівий спільний нетривіальний дільник із матрицею A.

Д о в е д е н н я. Оскільки матриця B є лівим дільником матриці A, то на підставі теореми 2 маємо, що $\beta_i \,|\, \alpha_i$, $i = 1, 2$, і

$$P_B = \begin{Vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \frac{\beta_2}{(\beta_2, \alpha_1)}\ell_{21} & \ell_{22} \end{Vmatrix} P_A.$$

Розглянемо будь-який лівий дільник F' матриці F з формою Сміта $\mathrm{diag}(\gamma_1, \gamma_2)$. Згідно з теоремою 3, цей дільник має вигляд

$$F' = \left(\underbrace{\begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)} h_{21} & h_{22} \end{Vmatrix} P_B}_{P_{F'}} \right)^{-1} \begin{Vmatrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{Vmatrix} Q_{F'}^{-1}, \qquad \text{де} \qquad Q_{F'} \in GL_2(R).$$

Матриця $P_{F'}$ має вигляд:

$$P_{F'} = \begin{Vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)} h_{21} & h_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \frac{\beta_2}{(\beta_2,\alpha_1)} \ell_{21} & \ell_{22} \end{Vmatrix} P_A =$$

$$= \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)}, \frac{\beta_2}{(\beta_2,\alpha_1)} \right) g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} P_A .$$

Розглянемо матрицю

$$P_{F'} P_A^{-1} = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)}, \frac{\beta_2}{(\beta_2,\alpha_1)} \right) g_{21} & g_{22} \end{Vmatrix} := \| s_{ij} \|.$$

Отже, $s_{21} = \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\delta_1)}, \frac{\beta_2}{(\beta_2,\alpha_1)} \right) g_{21}$. Згідно з наслідком 1, $(A,F')_\ell \neq I$ тоді й тільки тоді, коли виконується умова (2).

1°. Нехай $(\alpha_1, \gamma_2) \neq 1$. Тоді нерівність (2) виконується незалежно від вибору елемента s_{21}.

2°. Нехай $(\alpha_1, \gamma_2) = 1$. Припустимо, що $(\gamma_2, \delta_1) := \mu \neq 1$. Оскільки $\mu | \delta_1$, то μ має нетривіальний спільний дільник з β_1. Зважаючи на те, що $\beta_1 | \alpha_1$, приходимо до висновку, що μ має нетривіальний спільний дільник з α_1. Оскільки також $\mu | \gamma_2$, то $(\alpha_1, \gamma_2) \neq 1$. Отримали протиріччя. Отже, $(\gamma_2, \delta_1) = 1$. Таким чином, елемент s_{21} має вигляд

$$s_{21} = \left(\gamma_2, \frac{\beta_2}{(\beta_2,\alpha_1)} \right) g_{21}.$$

Оскільки $(\alpha_1, \gamma_2) = 1$, то і

$$((\alpha_1, \beta_2), \gamma_2) = 1. \tag{4}$$

Запишемо елемент β_2 у вигляді $\beta_2 = (\alpha_1, \beta_2)\beta_2'$. Елемент γ_2 є дільником елемента δ_2. Отже, згідно з припущенням, $(\gamma_2, \beta_2) \neq 1$. Тоді з огляду на (4), отримуємо

$$(\gamma_2, \beta_2) = (\gamma_2, (\alpha_1, \beta_2)\beta_2') = (\gamma_2, \beta_2') = \left(\gamma_2, \frac{\beta_2}{(\beta_2,\alpha_1)} \right) := \nu \neq 1.$$

Оскільки

$$(\gamma_2, s_{21}) = \left(\gamma_2, \gamma_2 g_{21}, \frac{\beta_2}{(\beta_2,\alpha_1)} g_{21} \right) = \left(\gamma_2, \frac{\beta_2}{(\beta_2,\alpha_1)} g_{21} \right),$$

то $\nu \,|\, (\gamma_2, s_{21})$. Елемент ν є дільником δ_2, отже, $(\nu, \beta_2) \neq 1$. Тому і $(\nu, \alpha_2) \neq$ $\neq 1$. Таким чином, виконується нерівність (2). Це означає, що і в цьому випадку $(A, F')_\ell \neq I$. Теорему доведено. ♦

Тепер дослідимо, як зміна перетворювальної матриці P_B впливає на той факт, що B є лівим дільником матриці A.

Теорема 6. *Нехай R − комутативна область головних ідеалів і $A = BC$, де A, B − неособливі матриці над R вигляду* (1). *Нехай*

$$\frac{\beta_2}{(\beta_2,\alpha_1)} = \delta_1^{r_1} \ldots \delta_k^{r_k} \tag{5}$$

– розклад у добуток степенів необоротних і нерозкладних елементів кільця R, $k \geq 1$. Кожний лівий дільник кожної матриці з множини

$$\left\{ \left(\left\| \begin{matrix} f_{11} & f_{12} \\ \delta_1^{\ell_1} \cdots \delta_k^{\ell_k} f_{21} & f_{22} \end{matrix} \right\| P_A \right)^{-1} \left\| \begin{matrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{matrix} \right\| Q^{-1} \right\}, \tag{6}$$

де $Q \in GL_2(R)$, $\ell_i \geq 1$, $i = 1,\ldots,k$, має лівий спільний нетривіальний дільник з матрицею A.

Д о в е д е н н я. Виберемо в множині (6) довільну матрицю

$$F = \left(\underbrace{\left\| \begin{matrix} f_{11} & f_{12} \\ \delta_1^{\ell_1} \cdots \delta_k^{\ell_k} f_{21} & f_{22} \end{matrix} \right\| P_A}_{P_F} \right)^{-1} \left\| \begin{matrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{matrix} \right\| Q_F^{-1}.$$

Ліві дільники матриці F з формою Сміта $\operatorname{diag}(\gamma_1,\gamma_2)$ мають вигляд

$$F' = \left(\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\beta_1)} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| P_F \right)^{-1} \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{matrix} \right\| Q_{F'}^{-1} =$$

$$= \left(\left\| \begin{matrix} h_{11} & h_{12} \\ \frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\beta_1)} h_{21} & h_{22} \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} f_{11} & f_{12} \\ \delta_1^{\ell_1} \cdots \delta_k^{\ell_k} f_{21} & f_{22} \end{matrix} \right\| P_A \right)^{-1} \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{matrix} \right\| Q_{F'}^{-1} =$$

$$= \left(\underbrace{\left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\beta_1)}, \delta_1^{\ell_1} \cdots \delta_k^{\ell_k} \right) g_{21} & g_{22} \end{matrix} \right\| P_A}_{P_{F'}} \right)^{-1} \left\| \begin{matrix} \gamma_1 & 0 \\ 0 & \gamma_2 \end{matrix} \right\| Q_{F'}^{-1},$$

де $\gamma_i \,|\, \beta_i$, $i = 1,2$. Зауваживши, що

$$P_{F'} P_A^{-1} := \|s_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} g_{11} & g_{12} \\ \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\beta_1)}, \delta_1^{\ell_1} \cdots \delta_k^{\ell_k} \right) g_{21} & g_{22} \end{matrix} \right\|,$$

отримуємо $s_{21} = \left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\beta_1)}, \delta_1^{\ell_1} \cdots \delta_k^{\ell_k} \right) g_{21}$. З огляду на те, що $\gamma_2 \,|\, \beta_2 \,|\, \alpha_2$, маємо

$$(\alpha_2, \gamma_2, [\alpha_1,\gamma_1] s_{21}) = (\gamma_2, [\alpha_1,\gamma_1] s_{21}) := \nu .$$

Оскільки $\gamma_1 \,|\, \gamma_2$, то у випадку, коли $\gamma_1 \neq 1$, на підставі наслідку 1 отримуємо $(A,F')_\ell \neq I$.

Нехай $\gamma_1 = 1$. Тоді $\nu = (\gamma_2, \alpha_1 s_{21})$.

1°. Припустимо, що

$$\left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\beta_1)}, \delta_1^{\ell_1} \cdots \delta_k^{\ell_k} \right) = 1.$$

Беручи до уваги (5), отримуємо

$$\left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\beta_1)}, \frac{\beta_2}{(\beta_2,\alpha_1)} \right) = 1.$$

Згідно з лемою 2, це означає, що $\gamma_2 \,|\, \alpha_1^2$. Отже, $(\gamma_2,\alpha_1) \neq 1$. Тому $\nu \neq 1$ і

$$(A,F')_\ell \neq I .$$

2°. Нехай

$$\left(\frac{\gamma_2}{(\gamma_2,\beta_1)}, \delta_1^{\ell_1} \cdots \delta_k^{\ell_k}\right) := \sigma \neq 1 .$$

Звідси випливає, що $\sigma \,\Big|\, \dfrac{\gamma_2}{(\gamma_2,\beta_1)}$, а отже, $\sigma | \gamma_2$. Оскільки також $\sigma | s_{21}$, то $\sigma \,|\, (\gamma_2, \alpha_1 s_{21})$. Тому і в цьому випадку $(A, F')_\ell \neq I$. Теорему доведено. ♦

1. *Забавський Б. В.* Узагальнені адекватні кільця // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 4. – С. 554–557.
   Те саме: *Zabavskii B. V.* Generalized adequate rings // Ukr. Math. J. – 1996. – **48**, No. 4. – P. 614–617. – https://doi.org/10.1007/BF02390621.
2. *Гаталевич А. І.* Про адекватні і узагальнено адекватні дуо-кільця елементарних дільників // Мат. студії. – 1998. – **9**, № 2. – С. 115–119.
3. *Щедрик В. П.* Кільця Безу стабільного рангу 1.5 // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 6. – С. 849–860.
   Те саме: *Shchedryk V. P.* Bezout ring of stable range 1.5 // Ukr. Math. J. – 2015. – **67**, No. 6. – P. 960–974. – https://doi.org/10.1007/s11253-015-1126-9.
4. *Щедрик В. П.* Кільця Безу стабільного рангу 1.5 та розкладність повної лінійної групи в добуток її підгруп // Укр. мат. журн. – 2017. – **69**, № 1. – С. 113–120.
   Те саме: *Shchedryk V. P.* Bezout ring of stable range 1.5 and the decomposition of a complete linear group into the product of its subgroups // Ukr. Math. J. – 2017. – **69**, No. 1. – P. 138–147. – https://doi.org/10.1007/s11253-017-1352-4.
5. *Gillman L., Henriksen M.* Rings of continuous functions in which every finitely generated ideal is principal // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – **82**, No. 2. – P. 366–391. – https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1956-0078980-4.
6. *Helmer O.* The elementary divisor theorem for certain rings without chain conditions // Bull. Amer. Math. Soc. – 1943. – **49,** No. 4. – P. 225–236.
   – https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1943-07886-X.
7. *Henriksen M.* Some remarks on elementary divisor rings. II // Michigan Math. J. – 1955/1956. – **3**, No. 2. – P. 159–163. – https://doi.org/10.1307/mmj/1028990029.
8. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**, No. 2. – P. 464–491. – https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1949-0031470-3.
9. *Shchedryk V.* Arithmetic of matrices over rings – Київ: Академперіодика, 2021. – 278 с. – https://doi.org/10.15407/akademperiodika.430.278.
10. *Zabavsky B. V., Gatalevych A.* Diagonal reduction of matrices over commutative semihereditary Bezout rings // Commun. Algebra. – 2019. – **47**, No. 4. – P. 1785–1795. – https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1521419.

ADEQUATE PROPERTIES OF MATRIX DIVISORS

Adequate rings, in particular adequate elements, arose as a generalization of principal ideal rings in investigation of the problem of matrix reduction. The main property of the elements of these rings is the possibility of their representation in a form of product of two factors that satisfy certain conditions. The notion of adequacy in the case of non-commutative rings is introduced, and the properties of matrix divisors over adequate rings are studied. The effect of changing the Smith normal forms and transforming matrices on the adequate properties of the matrix divisors is also investigated.

Key words: *divisors of matrices, adequate rings, Smith normal form, transforming matrices.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
05.01.21