УДК 621.8

А. І. Андрухів[1✉], Н. М. Гузик[2], Б. І. Сокіл[2], М. Б. Сокіл[1]

# ДИНАМІКА ГНУЧКИХ ЕЛЕМЕНТІВ ПРИВОДУ ПІД ДІЄЮ ІМПУЛЬСНИХ ЗБУРЕНЬ

*Для гнучких елементів приводів, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху, розроблено методику аналітичного дослідження коливань зумовлених дією періодичної системи імпульсних збурень. На її основі отримано аналітичні співвідношення, які описують визначальні параметри нелінійних коливань розглядуваного класу систем як для нерезонансного, так і для резонансного випадків. Показано, що у резонансному випадку значення амплітуди переходу через резонанс істотно залежить від швидкості поздовжнього руху гнучкого елемента.*

***Ключові слова:*** *імпульсне збурення, гнучкий елемент, явище резонансу, амплітуда, частота.*

**Вступ**. Належне функціонування приводів з гнучкими елементами (пасові чи ремінні передачі, канатні витяги) часто порушується різними збуреннями. Вони можуть мати періодичний або випадковий характер і діяти в окремих точках у певні моменти часу та бути викликані взаємодією, наприклад, із зовнішніми об’єктами, із яких передається чи на які передається рух. Дію одних із них на гнучкі приводи можна описати за допомогою періодичних чи випадкових функцій, а дію інших можна змоделювати за допомогою $\delta$-функції Дірака [5]. Такі збурення навіть за малої їх величини можуть порушити нормальне функціонування розглядуваних елементів приводів, а отже, і систем, складовими частинами яких вони є. Детальний аналіз динамічних процесів у таких гнучких елементах можна провести на основі адекватних математичних моделей, особливостями яких є поздовжня складова швидкості руху, яка надає якісно нового відтінку математичній моделі, та дискретний характер збурення. Це означає, що потрібно узагальнити існуючі методи дослідження систем, які характеризуються сталою швидкістю руху [4, 6, 8–13], у частині впливу дискретної дії збурення руху.

Саме така проблема частково вирішується у цій статті. В основу її розв’язання покладено: принцип одночастотності коливань у нелінійних системах з багатьма ступенями вільності та розподіленими параметрами [2, 3]; поширення основних ідей асимптотичних методів нелінійної механіки на динамічні системи, які характеризуються сталою швидкістю руху [8]; базові положення дослідження коливних процесів систем із миттєвими збуреннями [1, 3, 5]. Це дозволило отримати для випадку періодичної дії імпульсного збурення базові співвідношення, які описують визначальні параметри коливань гнучкого елемента приводу як для резонансного, так і нерезонансного випадків.

**1. Постановка задачі.** Поперечні коливання гнучкого елемента систем приводів, які характеризується сталою швидкістю руху $V$, описуються диференціальним рівнянням [6, 8]

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (\alpha^2 - V^2)u_{xx} = \varepsilon f(u, u_x, u_t)\,, \tag{1}$$

де $u(x,t)$ – поперечне переміщення перерізу гнучкого елемента з ейлеровою координатою $x$ у довільний момент часу $t$, аналітична функція $f(u, u_x, u_t)$ є апроксимацією всієї множини нелінійних сил, а малий параметр $\varepsilon$ вказує на малу величину нелінійних сил порівняно з величиною сили натягу ($\alpha^2 = \dfrac{T}{\rho}$, $T$ – сила натягу, $\rho$ – погонна маса гнучкого елемента).

✉andriy.i.andrukhiv@lpnu.ua

У випадку, коли до елемента приводу у точці з координатою $x_0$ додатково прикладена періодична з періодом $\tau$ імпульсна сила малої величини, рівняння (1) трансформується до вигляду

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (\alpha^2 - V^2)u_{xx} = \varepsilon f(u, u_x, u_t) +$$
$$+ \varepsilon\delta(x - x_0)\sum_{i=1}\delta(t - (i-1)\tau)g_i(u, u_x, u_t)\,, \qquad (2)$$

де

$$\varepsilon g_i\big(u(x_0, (i-1)\tau), u_x(x_0, (i-1)\tau), u_t(x_0, (i-1)\tau)\big)$$

– величина імпульсної сили, яка діє у момент $i\tau$, $i = 1, 2, \ldots$; $\delta(\cdot)$ – дельта-функція Дірака.

Щодо крайових умов для рівняння (2), то вони класичні першого роду:

$$u(0, t) = u(\ell, t) = 0\,, \qquad (3)$$

де $\ell = \mathrm{const}$ – довжина елемента приводу. Задача полягає у побудові та аналізі розв'язку рівняння (2) з крайовими умовами (3).

Зауважимо, що розглянута крайова задача (1), (3) описує також поздовжні коливання рухомого однорідного пружного тіла, якщо в рівнянні (1) покласти $\alpha^2 = \frac{E}{\rho}$, де $E$ – модуль пружності, $\rho$ – погонна маса гнучкого елемента.

**2. Методика дослідження.** Максимальне значення правої частини рівняння (2), як було сказано, є малою величиною порівняно із силою натягу гнучкого елемента, а отже, для побудови розв'язку крайової задачі (2), (3) використаємо загальні положення інтегрування крайових задач, які описують коливні процеси систем із розподіленими параметрами. Перш ніж адаптувати їх до розглядуваної задачі, дещо трансформуємо праву частину рівняння (2), точніше кажучи, ту частину, якою враховується дія імпульсного збурення на гнучкий елемент. Легко переконатись, що повна нормована система функцій $\left\{\sin\frac{s\pi x}{\ell}\right\}$ задовольняє умови $\left.\left\{\sin\frac{s\pi x}{\ell}\right\}\right|_{x=0, x=\ell} = 0$, які певною мірою пов'язані з крайовими умовами (3). Це є підставою для подання дельта-функції $\delta(x - x_0)$ у вигляді ряду:

$$\delta(x - x_0) = \frac{2}{\ell}\sum_{s=1}\sin\frac{s\pi x_0}{\ell}\sin\frac{s\pi x}{\ell}.$$

Як випливає із властивостей $\delta$-функції, точність розв'язку не зміниться, якщо функцію $\sum_{i=1}\delta(t - (i-1)\tau)g_i(u, u_x, u_t)$ замінити такою [7]:

$$\sum_{i=1}\delta(t - i\tau)g_i(u, u_x, u_t) = \cos\theta\sum_{i=1}\delta\left(\frac{\theta}{\mu} - \frac{2(i-1)\pi}{\mu}\right)g_i(u, u_x, u_t)\,, \qquad (4)$$

де $\theta = \mu t$, $\mu = \frac{2\pi}{\tau}$, $\delta(t - (i-1)\tau) = \cos\theta\delta\left(\frac{\theta}{\mu} - \frac{2(i-1)\pi}{\mu}\right)$.

Остаточно диференціальне рівняння (2) трансформується до вигляду

$$u_{tt} + 2Vu_{xt} - (\alpha^2 - V^2)u_{xx} = \varepsilon f(u, u_x, u_t) +$$
$$+ \varepsilon\frac{2}{\ell}\cos\theta\sum_{s=1}\sin\frac{s\pi x_0}{\ell}\sin\frac{s\pi x}{\ell}\sum_{i=1}\delta\left(\frac{\theta}{\mu} - \frac{2(i-1)\pi}{\mu}\right)g_i(u, u_x, u_t)\,. \qquad (5)$$

Другий доданок правої частини рівняння (5) можемо трактувати як періодичне збурення із деякою частотою $\Omega$, а це є підставою для подання першого наближення одночастотного розв'язку рівняння (5) у вигляді

$$u(x,t) = au_0(x,\varphi) + \varepsilon U_1(a,x,\varphi,\theta), \quad (6)$$

де $au_0(x,\varphi) = a(\cos(\ae x - \varphi) - \cos(\chi x + \varphi))$ − розв'язок незбуреної ($\varepsilon = 0$) крайової задачі [2, 3], у якому $\varphi = \omega t + \varphi_0$, $\ae = \frac{k\pi}{\alpha\ell}(\alpha + V)$, $\chi = \frac{k\pi}{\alpha\ell}(\alpha - V)$, $\omega = \frac{k\pi}{\alpha\ell}(\alpha^2 - V^2)$, при цьому $a$ та $\varphi_0$ − відповідно амплітуда та початкова фаза незбуреного руху. Оскільки функція $U_1(a,x,\varphi,\theta)$ у рівності (6) повинна враховувати вплив нелінійних сил та імпульсного періодичного збурення, то:

по-перше, вона повинна задовольняти крайові умови, які випливають із умов (3):

$$U_1(a,x,\varphi,\theta)\big|_{x=0} = U_1(a,x,\varphi,\theta)\big|_{x=\ell} = 0, \quad (7)$$

по-друге, не містити у своїх розвиненнях доданків, пропорційних першим модам фази коливань $\varphi$:

$$\int_0^{2\pi} U_1(a,x,\varphi,\theta)\begin{Bmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{Bmatrix} d\varphi = 0. \quad (8)$$

Будемо розглядати перше наближення асимптотичного розв'язку у формі, близькій до першої форми коливань незбуреного руху, тобто у залежностях для хвильових чисел $\ae$ і $\chi$, а також для частоти коливань $\omega$ покладаємо, що параметр $k = 1$. Крім цього, якщо для незбуреного руху амплітуда та частота коливань є сталими величинами, то для збуреного руху − змінними. Закони їх зміни визначаються не тільки нелінійними силами та імпульсними діями, але і співвідношенням між частотою (періодом) власних коливань і частотою (періодом) імпульсного збурення. Якщо вказані величини не пов'язані співвідношенням $m\omega \neq n\Omega$ (такий випадок називаємо нерезонансним), то закони зміни параметрів $a$ та $\varphi$ визначаються для першого наближення звичайними диференціальними рівняннями

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \omega + \varepsilon B_1(a). \quad (9)$$

Невідомі функції $A_1(a)$ та $B_1(a)$ у правих частинах співвідношень (9) будемо шукати у такому вигляді, щоб подання розв'язку у формі (6) із розглядуваною точністю задовольняло вихідне рівняння (5), якщо у поданні (6) замінити $a$ та $\varphi$ функціями від часу, які виражаються залежністю (9). Продиференціювавши асимптотичне подання за незалежними змінними та підставивши отримані вирази у рівняння (5), а потім прирівнявши коефіцієнти отриманої залежності при $\varepsilon$ правої та лівої частин, запишемо

$$\begin{aligned}\bar L(U_1) = {} & f_1(a,x,\varphi) + \\ & + \frac{2}{\ell}\cos\theta \sum_{s=1} \sin\frac{s\pi x_0}{\ell} \sin\frac{s\pi x}{\ell} \sum_{i=1} \delta\left(\frac{\theta}{\mu} - \frac{2(i-1)\pi}{\mu}\right) g_1(a,x,\varphi) + \\ & + \rho(x,\varphi)A_1(a) + ah(x,\varphi)B_1(a),\end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned}\bar L(U_1) = {} & \omega^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2} + \mu^2\frac{\partial^2 U_1}{\partial\theta^2} + 2\mu\omega\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi\partial\theta} + \\ & + 2V\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi\partial x}\omega + \frac{\partial^2 U_1}{\partial\theta\partial x}\mu\right) - (\alpha^2 - V^2)\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2},\end{aligned}$$

$$\rho(x,\varphi) = 2[(\omega + \ae V)\sin(\ae x + \varphi) + (\omega - \chi V)\sin(\chi x - \varphi)],$$

$$h(x,\varphi) = 2[(\omega + æV)\cos(æx + \varphi) - (\omega - \chi V)\cos(\chi x - \varphi)],$$

функції $f_1(a,x,\varphi)$ та $g_1(a,x,\varphi)$ відповідають значенням функцій $f(u,u_x,u_t)$ та $g(u,u_x,u_t)$ за умови, що $u(x,t)$, а також її похідні визначаються відповідно до головної частини у поданні (6)

Накладені на функцію $U_1(a,x,\varphi,\theta)$ умови (8) дозволяють знайти із рівняння (10) співвідношення, які визначають закони зміни амплітуди і частоти збуреного руху у вигляді

$$A_1(a) = \frac{\varepsilon}{\pi\ell\left[(\omega + æV)^2 + (\omega - \chi V)^2\right]}\int_0^{\ell}\int_0^{2\pi}\left\{f_1(a,x,\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi\ell\mu}\sum_{i=1}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sum_{s=1}\sin\frac{s\pi x_0}{\ell}\sin\frac{s\pi x}{\ell}\,\delta\left(\frac{\theta}{\mu} - \frac{2(i-1)\pi}{\mu}\right)g_i(a,x,\varphi)\,d\theta\right\}\times$$

$$\times\left[\bar{\rho}(x)\cos\varphi + \bar{h}(x)\sin\varphi\right]d\varphi\,dx,$$

$$B_1(a) = \frac{\varepsilon}{a\pi\ell\left[(\omega + æV)^2 + (\omega - \chi V)^2\right]}\int_0^{\ell}\int_0^{2\pi}\left\{f_1(a,x,\varphi) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi\ell\mu}\sum_{i=1}\int_0^{2\pi}\cos\theta\sum_{s=1}\sin\frac{s\pi x_0}{\ell}\sin\frac{s\pi x}{\ell}\,\delta\left(\frac{\theta}{\mu} - \frac{2(i-1)\pi}{\mu}\right)g_i(a,x,\varphi)\,d\theta\right\}\times$$

$$\times\left[\bar{\rho}(x)\sin\varphi - \bar{h}(x)\cos\varphi\right]d\varphi\,dx, \tag{11}$$

де

$$\bar{\rho}(x) = (\omega + æV)\sin æx + (\omega - \chi V)\sin\chi x,$$

$$\bar{h}(x) = (\omega + æV)\cos æx - (\omega - \chi V)\cos\chi x.$$

Як окремий випадок викладеного вище є результати, які стосуються дії на гнучкий елемент у фіксованій точці періодичної (сталої за величиною) сили $F_i$, тобто $g_i(u,u_x,u_t) \equiv F_i$. Тоді маємо

$$A_1(a) = \frac{\varepsilon}{\pi\ell\left[(\omega + æV)^2 + (\omega - \chi V)^2\right]}\int_0^{\ell}\int_0^{2\pi}f_1(a,x,\varphi)\times$$

$$\times\left[\bar{\rho}(x)\cos\varphi + \bar{h}(x)\sin\varphi\right]d\varphi\,dx,$$

$$B_1(a) = \frac{\varepsilon}{a\pi\ell\left[(\omega + æV)^2 + (\omega - \chi V)^2\right]}\int_0^{\ell}\int_0^{2\pi}f_1(a,x,\varphi)\times$$

$$\times\left[\bar{\rho}(x)\sin\varphi - \bar{h}(x)\cos\varphi\right]d\varphi\,dx. \tag{12}$$

Зі співвідношень (12) випливає, що у нерезонансному випадку періодичне імпульсне збурення не спричиняє у першому наближенні ні зміни амплітуди, ні частоти процесу. Вплив періодичного збурення проявляється у частковій зміні форми динамічного процесу, тобто періодичне збурення впливає у нерезонансному випадку на вигляд функції $U_1(a,x,\varphi,\theta)$. Щоб описати цей вплив, треба розкласти праву частину рівняння (10), як і невідому функцію $U_1$, у ряди Фур'є і прирівняти коефіцієнти при однакових гармоніках.

Як було відмічено вище, значно складнішим у дослідженні є резонансний випадок, коли $m\omega \approx n\Omega$. Відомо [2, 3], що у нелінійних системах динамічний процес істотно залежать від різниці фаз власних і вимушених коливань, тобто від параметра $\gamma = \varphi - \frac{m}{n}\theta$. Тому, на відміну від розглянутого вище нерезонансного випадку, вважаємо, що закони зміни базових параметрів $a$ та $\gamma$, які визначають динамічний процес у поданні (6), мають дещо складнішу форму, ніж у нерезонансному випадку:

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a,\gamma) + \dots, \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \omega - \frac{m}{n}\Omega + \varepsilon B_1(a,\gamma) + \dots. \tag{13}$$

Таким чином, задача полягає у визначенні таких функцій $A_1(a,\gamma)$, $B_1(a,\gamma)$, які разом із асимптотичним поданням (6) з розглядуваною точністю задовольняють базове рівняння (2), якщо в ньому $a$ та $\varphi$ замінити функціями від часу, визначеними залежністю (13). Аналогічно до нерезонансного випадку диференціальне рівняння першого наближення, яке пов'язує шукані величини, має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{L}(U_1) = {} & f_1(a,x,\varphi) + \frac{2}{\ell}\cos\theta \times \\ & \times \sum_{s=1} \sin\frac{s\pi x_0}{\ell}\sin\frac{s\pi x}{\ell}\sum_{i=1}\delta\left(\frac{\theta}{\Omega} - \frac{2(i-1)\pi}{\Omega}\right) g_1(a,x,\varphi) + \\ & + \rho(x,\varphi)A_1(a,\gamma) + a h(x,\varphi)B_1(a,\gamma) + \\ & + \left[\wp(x,\varphi)\frac{\partial A_1(a,\gamma)}{\partial\gamma} + a\hbar(x,\varphi)\frac{\partial B_1(a,\gamma)}{\partial\gamma}\right]\left(\omega - \frac{s}{n}\mu\right), \end{aligned} \tag{14}$$

де

$$\wp(x,\varphi) = -[\cos(æx + \varphi) - \cos(\chi x - \varphi)],$$

$$\hbar(x,\varphi) = \sin(æx + \varphi) + \sin(\chi x - \varphi).$$

Накладені на функцію $U_1(a,x,\varphi,\theta)$ умови (8) дозволяють отримати систему рівнянь, яка пов'язує невідомі функції:

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}(x)A_1(a,\gamma) + a\bar{h}(x)B_1(a,\gamma) + \\ & \quad + \left[\bar{\wp}(x)\frac{\partial A_1(a,\gamma)}{\partial\gamma} + a\bar{\hbar}(x)\frac{\partial B_1(a,\gamma)}{\partial\gamma}\right]\left(\omega - \frac{s}{n}\mu\right) = \\ & \quad = \frac{\varepsilon}{2\pi^2}\sum_q \exp(inq\gamma)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{ f_1(a,x,\varphi) + \frac{2}{\ell}\cos\theta \times \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{s=1}\sin\frac{s\pi x_0}{\ell}\sin\frac{s\pi x}{\ell}\sum_{i=1}\delta\left(\frac{\theta}{\mu} - \frac{2(i-1)\pi}{\mu}\right) g_1(a,x,\varphi)\right\} \times \\ & \quad \times \exp\left(-inq\left(\varphi - \frac{s}{n}\theta\right)\right)\cos\varphi\, d\varphi\, d\theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\bar{h}(x)A_1(a,\gamma) + a\bar{\rho}(x)B_1(a,\gamma) + \\ & \quad + \left[\bar{\hbar}(x)\frac{\partial A_1(a,\gamma)}{\partial\gamma} - a\bar{\wp}(x)\frac{\partial B_1(a,\gamma)}{\partial\gamma}\right]\left(\omega - \frac{s}{n}\mu\right) = \\ & \quad = \frac{\varepsilon}{2\pi^2}\sum_q \exp(inq\gamma)\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{ f_1(a,x,\varphi) + \frac{2}{\ell}\cos\theta \times \right. \end{aligned}$$

$$\times \sum_{s=1} \sin\frac{s\pi x_0}{\ell} \sin\frac{s\pi x}{\ell} \sum_{i=1} \delta\left(\frac{\theta}{\mu} - \frac{2(i-1)\pi}{\mu}\right) g_1(a, x, \varphi) \Bigg\} \times$$

$$\times \exp\left( - inq\left(\varphi - \frac{s}{n}\theta\right)\right) \cos\varphi \, d\varphi \, d\theta. \tag{15}$$

Як бачимо із рівнянь (15), для загального випадку періодичного збурення знайти у замкнутому вигляді співвідношення, які визначають у першому наближенні $\frac{da}{dt}$ і $\frac{d\varphi}{dt}$, не вдається. Проте праві частини вказаних співвідношень є періодичними функціями різниці фаз $\gamma$ і амплітуди $a$, тобто є сумами вигляду $\sum_q \tilde{f}_q(a) \exp(inq\gamma)$, тому і розв'язок для функцій $A_1(a, \gamma)$ і $B_1(a, \gamma)$ треба також шукати у вигляді аналогічних сум. Всі викладки при визначенні функцій $A_1(a, \gamma)$ і $B_1(a, \gamma)$ вказаним способом зводяться до операцій з тригонометричними функціями. Отримані залежності дають можливість дослідити динамічний процес як безпосередньо у резонансній області, так і при підході до неї.

Відомо [2, 3], що динамічний процес у нелінійних системах з часом наближається до деякого усталеного процесу, який визначається рівняннями

$$A_1(a, \gamma) = 0, \qquad \omega - \frac{m}{n}\mu + \varepsilon B_1(a, \gamma) = 0\,, \tag{16}$$

або до періодичного.

У першому випадку частота власних коливань перебуває у простій раціональній залежності із частотою вимушених коливань, і такий динамічний процес відповідає синхронним коливанням привідного елемента. У другому випадку, коли розв'язок рівнянь

$$\frac{da}{dt} = A_1(a, \gamma), \qquad \frac{d\gamma}{dt} = \omega - \frac{m}{n}\mu + \varepsilon B_1(a, \gamma) \tag{17}$$

зі збільшенням часу наближається до періодичного, динамічний процес гнучкого елемента приводу буде реалізуватись із власною частотою коливань і коливань з частотою $\Delta\omega = \omega - \frac{m}{n}\mu$. Цьому випадку відповідають асинхронні коливання системи. Зауважимо, що рівняння, які описують закони зміни амплітудно-частотної характеристики динамічного процесу системи з урахуванням нелінійних і періодичних сил у резонансному випадку, на перший погляд, є громіздкими. Проте при конкретних значеннях сил вони істотно спрощуються. Покажемо це на прикладі резонансних коливань гнучкого елемента приводу за умови періодичної дії у фіксованій точці імпульсного збурення, частота якого є близькою до частоти власних коливань. У цьому випадку рівняння (17) набуває вигляду

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{\pi\ell\left[(\omega + æV)^2 + (\omega - \chi V)^2\right]} \times$$

$$\times \Bigg\{ \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} f_1(a, x, \varphi) \left[\bar{\rho}(x)\cos\varphi + \bar{h}(x)\sin\varphi\right] d\varphi \, dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi\ell\mu} \sum_{i=1} F_i \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \cos\theta \left[ \sum_{s=1} \sin\frac{s\pi x_0}{\ell} \sin\frac{s\pi x}{\ell} \delta\left(\frac{\theta}{\mu} - \frac{2(i-1)\pi}{\mu}\right)\right] \times$$

$$\times \left[\bar{\rho}(x)\cos(\gamma + \theta) + \bar{h}(x)\sin(\gamma + \theta)\right] d\theta \, dx \Bigg\},$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega - \mu + \frac{\varepsilon}{\pi a\ell\left[(\omega + æV)^2 + (\omega - \chi V)^2\right]} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} f_1(a, x, \varphi)\left[\bar{\rho}(x)\sin\varphi - \bar{h}(x)\cos\varphi\right] d\varphi\, dx + \right.$$

$$+ \frac{1}{\pi\ell\mu} \sum_{i=1} F_i \int_0^{\ell} \int_0^{2\pi} \cos\theta \left[ \sum_{s=1} \sin\frac{s\pi x_0}{\ell} \sin\frac{s\pi x}{\ell} \delta\left(\frac{\theta}{\mu} - \frac{2(i-1)\pi}{\mu}\right)\right] \times$$

$$\left. \times \left[\bar{\rho}(x)\sin(\gamma + \theta) - \bar{h}(x)\cos(\gamma + \theta)\right] d\theta\, dx \right\}. \qquad (18)$$

Властивості дельта-функції, а також періодичність імпульсного збурення дозволяють подати співвідношення (18) у вигляді

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{\pi\ell\left[(\omega + æV)^2 + (\omega - \chi V)^2\right]}\left[A_1(a) + \frac{\cos\gamma}{\pi\ell\Omega}\beta_1\cos\gamma + \beta_2\sin\gamma\right],$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \omega - \mu + \frac{\varepsilon}{\pi a\ell\left[(\omega + æV)^2 + (\omega - \chi V)^2\right]}\left[B_1(a) + \beta_1\sin\gamma - \beta_2\cos\gamma\right], \qquad (19)$$

де

$$\beta_1 = \frac{1}{\pi\ell\mu}\sum_{i=1} F_i \sum_{s=1}\sin\frac{s\pi x_0}{\ell}\int_0^{\ell}\bar{\rho}(x)\sin\frac{s\pi x}{\ell}\,dx,$$

$$\beta_2 = \frac{1}{\pi\ell\mu}\sum_{i=1} F_i \sum_{s=1}\sin\frac{s\pi x_0}{\ell}\int_0^{\ell}\bar{h}(x)\sin\frac{s\pi x}{\ell}\,dx.$$

На рис. 1 відповідно до залежностей (19) для випадку $f(u, u_x, u_t) = -\delta u_t + k_1(u_{xx})^3$ наведено обчислені резонансні значення амплітуди $a$ за різних значень сили натягу $\alpha^2$ і різних значень швидкості руху $V$ гнучкого елемента.

Всі обчислення виконано при $m = 30$ кг/м, $F_i = 200$ Н, $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м$^2$, $A = 4 \cdot 10^{-6}$ м$^2$.

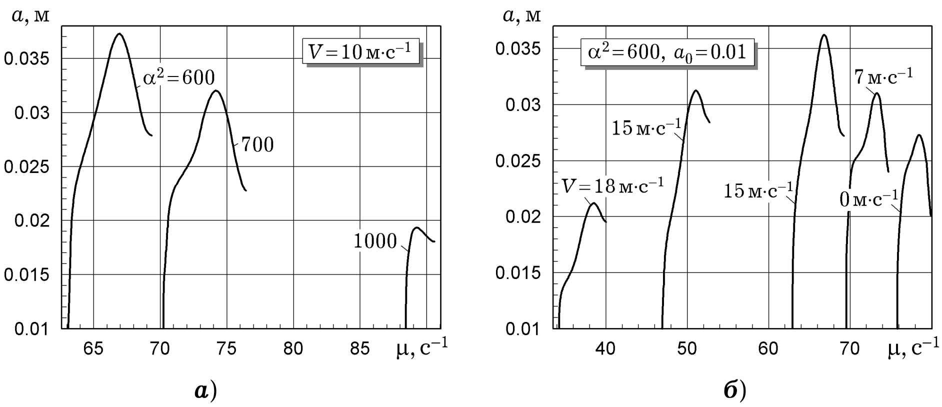


Рис. 1. Резонансні значення амплітуди за різних значень параметрів.

На рис. 2 наведено зміну амплітуди $a$ поздовжніх коливань пружного елемента, зумовлених дією періодичної системи імпульсних сил, які діють на його кінцях, при переході через головний резонанс, за різних значень амплітуди $a_0$ [м] входження в резонанс і довжин гнучкого елемента $\ell$ [м].

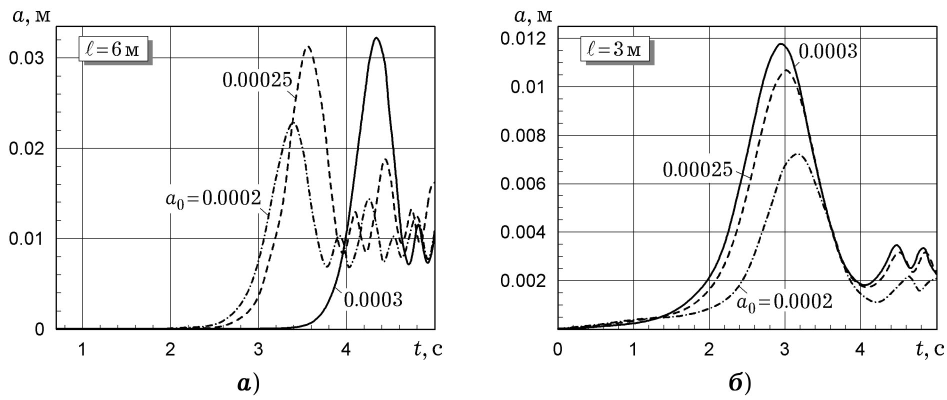


Рис. 2. Зміна амплітуди поздовжніх коливань привідного елемента при проходженні головного резонансу, зумовленого періодичною системою імпульсних сил, які діють на кінцях елемента.

**Висновки.** Для гнучких елементів приводів, які характеризуються сталою швидкістю поздовжнього руху, розроблено методику аналітичного дослідження поперечних коливань, зумовлених дією періодичної системи імпульсних збурень. У механічних системах найбільш небезпечними є резонансні процеси, які зумовлюють значні динамічні навантаження на об'єкти. Тому основна увага у роботі зосереджена на дослідженні впливу саме періодичного імпульсного збурення.

У роботі побудовано перше асимптотичне наближення відповідних крайових задач збуреного руху. Отримано аналітичні співвідношення, які описують визначальні параметри нелінійних коливань розглядуваного класу систем як для нерезонансного, так і для резонансного випадків. Як окремий випадок розглянуто коливання гнучких привідних елементів під дією сталого за величиною імпульсного збурення. Показано, що у нерезонансному випадку таке збурення впливає частково на зміну форми коливань. Що стосується резонансних коливань, які мають важливе теоретичне та прикладне значення, то:

− для більших швидкостей поздовжнього руху гнучкого елемента систем приводу власна частота його коливань зменшується, одночасно період імпульсного збурення, за якого має місце резонанс, зростає;

− резонансне значення амплітуди із зростанням швидкості поздовжнього руху спочатку зростає, а потім спадає;

− з наближенням швидкостей руху гнучких елементів систем приводів до критичних, резонансні значення амплітуд суттєво залежать від початкового значення амплітуди і величини гармонічного збурення.

Отримані у роботу результати можуть служити базою для вибору експлуатаційних параметрів систем із гнучкими привідним елементами з метою уникнення у них резонансних явищ або проходження їх із найменшою амплітудою. Методику, описану у роботі, можна застосувати і для дослідження систем, математичні моделі яких подібні до розглянутих, зокрема у випадку неоднорідних крайових умов.

Алгоритм побудови і дослідження першого асимптотичного наближення розглянутої задачі можна поширити для другого та наступних асимптотичних наближень, очевидно, що при цьому зросте громіздкість викладок. Однак, можливо, вдасться виявити якісь нові особливості чи ефекти.


1. *Капустян О. В., Перестюк М. О. Стенжицький О. М.* Екстремальні задачі: теорія, приклади, методи розв'язування. − Київ: ВПЦ Київ. ун-ту, 2019. − 65 с.
2. *Митропольський Ю. А.* Избранные труды: В 2 т. − Київ: Наук. думка, 2012. − 504 с.
3. *Митропольский Ю. А., Мосеенков Б. И.* Асимптотические решения уравнений в частных производных. − Київ: Вища шк., 1976. − 592 с.

4. *Огороднiков П. I., Свiтлицький В. М., Гоголь В. I.* Дослiдження зв'язку мiж поздовжнiми i крутильними коливаннями бурильної колони // Нафтова галузь України. – 2014. – № 2. – С. 6–9.
5. *Перестюк М. О., Чернiкова О. С.* Деякi сучаснi аспекти асимптотики теорiї диференцiальних рiвнянь з iмпульсною дiєю // Укр. мат. журн. – 2008. – **60,** № 1. – С. 81–90.
6. *Харченко Є. В., Сокiл М. Б.* Коливання рухомих нелiнiйно пружних середовищ i асимптотичний метод у їх дослiдженнi // Наук. вiсн. нац. лiсотехн. ун-ту України. – 2006. – **16**, № 1. – С. 134–138.
7. *Andrukhiv A., Sokil M., Sokil B., Fedushko S., Syerov Yu., Karovic V., Klynina T.* Influence of impulse disturbances on oscillations of nonlinearly elastic bodies // Mathematics (MDPI). – 2021. – **9**, No. 8. – 13 p. – https://doi.org/10.3390/math9080819.
8. *Chen L. Q.* Analysis and control of transverse vibrations of axially moving strings // Appl. Mech. Rev. – 2005.– **58**, No. 2.– P. 91–116. – doi:10.1115/1.1849169.
9. *Chen L. Q., Wang B., Ding H.* Nonlinear parametric vibration of axially moving beams: asymptotic analysis and differential quadrature verification // J. Phys.: Conf. Ser. – 2009. – **181**. – P. 1–8. – doi:10.1088/1742-6596/181/1/012008.
10. *Cveticanin L., Pogany T.* Oscillator with a sum of non-integer order non-linearities // J. Appl. Math. – 2012. – **2012.** – 20 p. – doi:10.1155/2012/649050.
11. *Lyashuk O, Vovk Y., Sokil B., Klendii V., Ivasechko R., Dovbush T.* Mathematical model of a dynamic process of transporting a bulk material by means of a tube scraping conveyor // Agricultural Engineering International: CIGR Journal. – 2019. – **21**, No. 1. – P. 74–81.
12. *Sokil B. I., Pukach P. Ya., Sokil M. B., Vovk M. I.* Advanced asymptotic approaches and perturbation theory methods in the study of the mathematical model of single-frequency oscillations of a nonlinear elastic body // Math. Model. Comput. – 2020. – **7**, No. 2. – P. 269–277. – https://doi.org/10.23939/mmc2020.02.269.
13. *Tian Y., Yuan P., Yang F., Gu J., Chen M., Tang J., Su Y., Ding T., Zhang K., Cheng Q.* Research on the principle of a new flexible screw conveyor and its power consumption // Applied Sciences (MDPI). – 2018. – **8,** No. 7. – 14 p. – doi:10.3390/app8071038.


## DYNAMICS OF FLEXIBLE DRIVE ELEMENTS UNDER THE ACTION OF IMPULSE PERTURBATIONS


*For flexible drive elements, which are characterized by a constant speed of longitudinal motion, a method of analytical study of oscillations under the action of a periodic system of impulse perturbations are developed. Based on it, analytical relations are obtained that describe the defining parameters of nonlinear oscillations of the considered class of systems for both nonresonant and resonant cases. It is shown that in the resonance case the value of the amplitude of the transition through resonance significantly depends on the speed of longitudinal motion of the flexible element.*



***Key words***: *impulse perturbation, flexible element, resonance phenomenon, amplitude, frequency*.



[1] Нац. ун-т «Львiв. полiтехнiка», Львiв,

[2] Нац. акад. сухопутних вiйськ iм. гетьмана П. Сагайдачного, Львiв



Одержано 26.09.21