УДК 539.3

О. В. Максимук[1], І. М. Васильків[1], Ю. В. Сачук[2]✉

ПЕРІОДИЧНА КОНТАКТНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНОЇ ОСНОВИ З ДВОМА КОЕФІЦІЄНТАМИ ПОСТЕЛІ

Досліджується періодична контактна задача для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі. Задачу зведено до розв'язування інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, для якого знайдено аналітичний розв'язок у випадку дії періодичної системи штампів параболічної форми. Проведено числовий аналіз результатів.

Ключові слова: *контактна задача, інтегральне рівняння Фредгольма, контактний тиск, зміщення штампа, вплив мікровиступів.*

Вступ. Проблема взаємовпливу мікровиступів, величина фактичної та номінальної областей контакту під час фрикційної взаємодії шорстких поверхонь є головною при розрахунках надійності роботи фрикційних вузлів машин і механізмів. Контактна задача про взаємодію системи періодичних штампів із пружною основою, яка описується математичною моделлю з двома коефіцієнтами постелі [1], дала змогу отримати інженерні формули для різних форм штампів − виступів.

1. Постановка задачі. Спочатку розглянемо допоміжну задачу про дію зосередженої сили $\mathbf{P}$ на пружну основу з двома коефіцієнтами постелі (див. рис. 1, рис. 2). Як відомо [1, 7], рівняння рівноваги пружного шару з двома коефіцієнтами постелі має вигляд:

$$2t\,V''(x) - kV(x) = 0\,, \tag{1}$$

а його розв'язком є

$$V(x,y) = \frac{P}{4\alpha t}\, e^{-\alpha|x|}\psi(y)\,, \tag{2}$$

де $k = \dfrac{E_0\Delta}{H(1-\nu_0)}$, $t = \dfrac{E_0\Delta H}{12(1+\nu_0)}$, $\alpha = \sqrt{\dfrac{k}{2t}} = \dfrac{1}{H}\dfrac{\sqrt{6(1-\nu_0)}}{1-\nu_0}$, $\psi(y) = \dfrac{H-y}{H}$, Δ − одиниця ширини пружного шару, E_0, ν_0 − модуль Юнга та коефіцієнт Пуассона матеріалу шару [1]. На підставі розв'язку (2) переміщення поверхні шару $V(x)$ при $y=0$ для довільного навантаження $q(\xi)$, де ξ − відстань від початку координат, визначаємо за формулою:

$$V(x) = \begin{cases} C\displaystyle\int_a^b q(\xi)e^{\alpha(x-\xi)}d\xi, & x < a, \\ C\displaystyle\int_a^b q(\xi)e^{-\alpha|x-\xi|}d\xi, & a \le x < b, \\ C\displaystyle\int_\alpha^b q(\xi)e^{-\alpha(x-\xi)}d\xi, & x > b, \end{cases} \qquad \text{де} \quad C = \frac{1}{4\alpha t}\,. \tag{3}$$

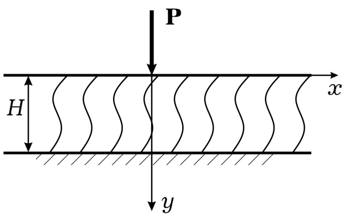

Рис. 1

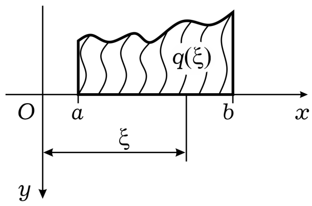

Рис. 2

✉ sachykyra@gmail.com

З розв'язку (3) випливає, що $\sigma_{xy}(0) \neq 0$ поза областю прикладеного навантаження, $x \notin [a, b]$. Це пов'язано з тим, що рівняння рівноваги пружної основи виконуються в інтегральній формі [3].

Далі розглянемо задачу про дію на пружну основу періодичної (з періодом ℓ) системи зосереджених сил $\mathbf{P}$ (рис. 3).

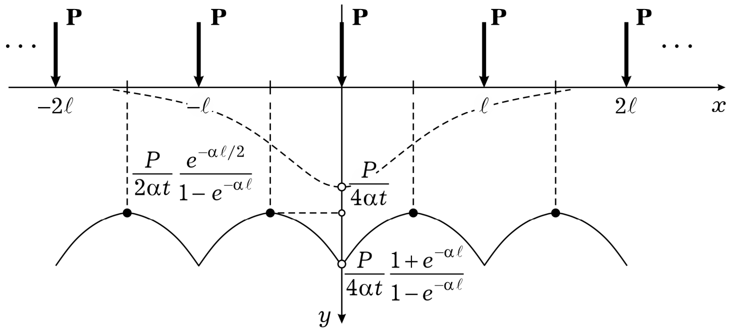

Рис. 3

За алгоритмом, запропонованим у працях [2, 4, 6, 11] до розв'язку періодичних задач, у тому числі для тріщин і включень, враховуючи періодичність, виконаємо підсумовування для переміщення поверхні шару

$$dV(x) = \frac{P}{4\alpha t}\Big(\ldots + e^{-\alpha|x-n\ell|} + \ldots + e^{-\alpha|x-2\ell|} + e^{-\alpha|x-\ell|} +$$

$$+ e^{-\alpha|x|} + e^{-\alpha|x+\ell|} + e^{-\alpha|x+2\ell|} + \ldots + e^{-\alpha|x+n\ell|} + \ldots\Big) dt =$$

$$= \frac{P}{4\alpha t}\left(e^{\alpha|x|}\, \frac{e^{-\alpha\ell}}{1-e^{-\alpha\ell}} + \frac{e^{-\alpha|x|}}{1-e^{-\alpha\ell}} \right) dt = \frac{P}{4\alpha t}\mathcal{K}_\ell(x)\, dt\,, \tag{4}$$

Якщо $x > 0$, тоді маємо

$$e^{-\alpha|x|} = e^{-\alpha x},$$

$$e^{-\alpha|x+\ell|} = e^{-\alpha(x+\ell)} = e^{-\alpha\ell}e^{-\alpha x}, \qquad e^{-\alpha|x+n\ell|} = e^{-\alpha x}\left(e^{-\alpha\ell}\right)^n,$$

$$e^{-\alpha|x-\ell|} = e^{-\alpha(\ell-x)} = e^{-\alpha\ell}e^{\alpha x}, \qquad e^{-\alpha|x-n\ell|} = e^{-\alpha(n\ell-x)} = \left(e^{-\alpha\ell}\right)^n e^{\alpha x},$$

і відповідно

$$\mathcal{K}_\ell(x) = e^{\alpha x}\left[\ldots + \left(e^{-\alpha\ell}\right)^n + \ldots + \left(e^{-\alpha\ell}\right)^2 + e^{-\alpha\ell} \right] +$$

$$+ e^{-\alpha x}\left[1 + e^{-\alpha\ell} + \left(e^{-\alpha\ell}\right)^2 + \ldots + \left(e^{-\alpha\ell}\right)^n + \ldots \right].$$

У квадратних дужках маємо спадні геометричні прогресії зі знаменником $q = e^{-\alpha\ell} < 1$, тому

$$\mathcal{K}_\ell(x) = e^{\alpha x}\, \frac{e^{-\alpha\ell}}{1-e^{-\alpha\ell}} + \frac{e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha\ell}}.$$

Для $x < 0$ маємо аналогічно:

$$e^{-\alpha|x|} = e^{-\alpha x},$$

$$e^{-\alpha|x+\ell|} = e^{-\alpha(\ell-x)} = e^{-\alpha\ell}e^{\alpha x}, \qquad e^{-\alpha|x+n\ell|} = e^{-\alpha(n\ell-x)} = e^{\alpha x}\left(e^{-\alpha\ell}\right)^n,$$

$$e^{-\alpha|x-\ell|} = e^{-\alpha(x+\ell)} = e^{-\alpha x}e^{-\alpha\ell}, \qquad e^{-\alpha|x\text{-}n\ell|} = e^{-\alpha(x+n\ell)} = e^{-\alpha x}\left(e^{-\alpha\ell}\right)^n.$$

Остаточно отримуємо

$$\mathcal{K}_\ell(x) = \frac{e^{\alpha|x|}e^{-\alpha\ell} + e^{-\alpha|x|}}{1 - e^{-\alpha\ell}}.$$

Нескладно зрозуміти, що з формули (4) випливає, що

$$\lim_{\ell\to\infty} \mathcal{K}_\ell(x) = e^{-\alpha|x|}.$$

Це означає, що розв'язок задачі про дію на пружну основу періодичної системи зосереджених сил збігається із розв'язком (2) задачі для однієї зосередженої сили.

На рис. 3 показано прогини в точках: $V(0) = \dfrac{P}{4\alpha t}$, $V(\ell) = \dfrac{P}{4\alpha t}\dfrac{1 + e^{-\alpha\ell}}{1 - e^{-\alpha\ell}}$, $V(\ell/2) = \dfrac{P}{2\alpha t}\dfrac{e^{-\alpha\ell/2}}{1 - e^{-\alpha\ell}}$. Штриховій кривій відповідає прогин поверхні шару під дією однієї зосередженої сили, суцільній кривій − прогин поверхні шару під дією системи періодичних зосереджених сил з періодом ℓ.

За аналогією з формулою (3), для невідомого контактного тиску $p(x)$ та області контактного тиску $[a, -a]$ маємо прогин поверхні пружного шару:

$$V(x) = \begin{cases} C\displaystyle\int_{-a}^{a} p(\xi)\frac{e^{-\alpha\ell}e^{-\alpha(x-\xi)} + e^{\alpha(x-\xi)}}{1 - e^{-\alpha\ell}}d\xi, & x < -a, \\ C\displaystyle\int_{-a}^{a} p(\xi)\frac{e^{-\alpha\ell}e^{\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha|x-\xi|}}{1 - e^{-\alpha\ell}}d\xi, & |x| \le a, \\ C\displaystyle\int_{-a}^{a} p(\xi)\frac{e^{-\alpha\ell}e^{\alpha(x-\xi)} + e^{-\alpha(x-\xi)}}{1 - e^{-\alpha\ell}}d\xi, & x > a. \end{cases}$$

Інтегральне рівняння для визначення контактного тиску у випадку періодичної системи зосереджених сил виглядає так (прирівнюємо прогини в області контакту) [6]:

$$\delta - f(x) = \int_{-a}^{a} p(\xi)\frac{e^{-\alpha\ell}e^{\alpha|x-\xi|} + e^{-\alpha|x-\xi|}}{1 - e^{-\alpha\ell}}d\xi, \qquad |x| \le a,$$

де δ − зміщення штампа як жорсткого тіла, $f(x)$ − форма штампа.

2. Періодична контактна задача для параболічної форми штампів. Нехай у пружний шар втискується жорсткий штамп параболічної форми профілю основи з областю контакту $-a \le x \le a$ (рис. 4):

$$f(x) = \frac{x^2}{2R}.$$

Інтегральне рівняння Фредгольма першого роду для визначення контактного тиску запишемо так:

$$\delta - \frac{x^2}{2R} = C\int_{-a}^{a} p(t)\frac{e^{-\alpha\ell}e^{\alpha|x-t|} + e^{-\alpha|x-t|}}{1 - e^{-\alpha\ell}}dt. \qquad (5)$$

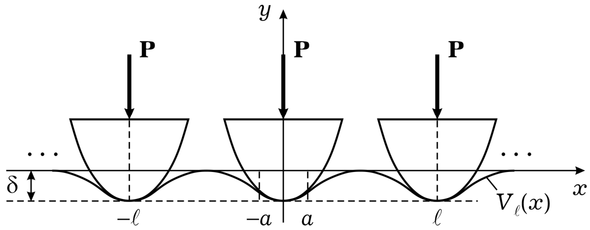

Рис. 4

Розіб’ємо інтеграл у рівнянні (5) на два:

$$\delta - \frac{x^2}{2R} = \frac{C}{1-e^{-\alpha\ell}} \int_{-a}^{a} p(t)\left(e^{-\alpha|x-t|} + e^{-\alpha\ell} e^{\alpha|x-t|}\right) dt =$$

$$= \frac{C}{1-e^{-\alpha\ell}} \left(\int_{-a}^{x} p(t)\left(e^{-\alpha(x-t)} + e^{-\alpha\ell} e^{\alpha(x-t)}\right) dt + \right.$$

$$\left. + \int_{x}^{a} p(t)\left(e^{\alpha(x-t)} + e^{-\alpha\ell} e^{-\alpha(x-t)}\right) dt \right). \qquad (5')$$

Контактний тиск будемо шукати у вигляді $p(x) = A + B\dfrac{x^2}{2}$ з невідомими A і B. Підставивши цей вираз у (5′), після обчислення інтегралів отримаємо

$$\delta - \frac{x^2}{2R} = \frac{2C}{\alpha(1-e^{-\alpha\ell})} \left\{ A(1 - e^{-\alpha a}\operatorname{ch}\alpha x) + \right.$$

$$+ B\left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2} - e^{-\alpha a}\operatorname{ch}\alpha x \left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{a}{\alpha} \right) \right] -$$

$$- e^{-\alpha\ell} \left(A(1 - e^{-\alpha a}\operatorname{ch}\alpha x) + B\left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2} - \right.\right.$$

$$\left.\left.\left. - e^{\alpha a}\operatorname{ch}\alpha x \left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{a}{\alpha} \right) \right] \right) \right\}. \qquad (6)$$

Прирівнявши вирази у лівій і правій частинах співвідношення (6) при x^0, x^2 і $\operatorname{ch}\alpha x$, отримаємо три рівняння для визначення δ, A і B:

$$\delta = \frac{2C}{\alpha}\left(A + \frac{1}{\alpha^2} B \right),$$

$$-\frac{1}{R} = \frac{2C}{\alpha(1-e^{-\alpha a})} B(1 - e^{-\alpha a}),$$

$$0 = -A - B\left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{a}{\alpha}\psi(a,\ell) \right).$$

Із цих рівнянь знаходимо

$$A = \frac{\alpha}{2RC}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{a}{\alpha}\psi(a,\ell) \right), \qquad B = -\frac{1}{2RC},$$

$$\delta = \frac{1}{R}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{a}{\alpha}\psi(a,\ell) \right), \qquad \psi(a,\ell) = \frac{e^{-\alpha a} + e^{\alpha a}e^{-\alpha\ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a}e^{-\alpha\ell}}.$$

Тоді для контактного тиску отримуємо таку формулу:

$$p(x) = \frac{\alpha}{2RC}\left(\frac{a^2}{2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{a}{\alpha}\psi(a,\ell) - \frac{x^2}{2} \right). \qquad (7)$$

Визначимо $V(x)$, якщо $x > a$:

$$V(x) = \frac{C}{1-e^{-\alpha x}} \int_{-a}^{a} p(t)\left(e^{-\alpha(x-t)} + e^{-\alpha\ell} e^{\alpha(x-t)}\right) dt,$$

$$\int_{-a}^{a} p(t) e^{-\alpha(x-t)} dt =$$

$$= \frac{a}{2\alpha R} \frac{e^{-\alpha x} + e^{\alpha x} e^{-\alpha \ell}}{1 - e^{-\alpha \ell}} \left(e^{\alpha x} (1 + \psi(a, \ell)) + e^{-\alpha a} (1 - \psi(a, \ell)) \right) =$$

$$= \frac{a}{\alpha R} \cdot \frac{e^{-\alpha x} + e^{\alpha x} e^{-\alpha \ell}}{e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} e^{-\alpha \ell}} .$$

Якщо $x = a$, то $V(a) = \dfrac{a}{\alpha R} \psi(a, \ell)$, що співпадає з розв'язком, якщо $|x| \le a$, де $V(x) = \delta - \dfrac{x^2}{2R}$ і, відповідно, також $V(a) = \dfrac{a}{\alpha R} \psi(a, \ell)$.

Зв'язок між силою P та шириною області контакту $|x| \le a$ знаходимо з умови рівноваги

$$P = \int_{-a}^{a} p(t)\, dt . \tag{8}$$

Підставивши у (8) формулу (7) для контактного тиску, отримаємо

$$P = \frac{\alpha a}{CR} \left(\frac{2}{3} a^2 + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{a}{\alpha} \psi(a, \ell) \right).$$

3. Числові розрахунки. Числовий аналіз проведено для таких безрозмірних величин: $\bar{x} = \dfrac{x}{R}$, $\bar{a} = \dfrac{a}{R}$, $\bar{\ell} = \dfrac{\ell}{R}$, $\bar{\alpha} = \alpha R$, $\bar{P} = \dfrac{P}{ER}$, $\bar{p}(x) = \dfrac{p(x)}{E}$, $\bar{\delta} = \dfrac{\delta}{R}$, $\bar{H} = \dfrac{H}{R}$, $\bar{V}(\bar{x}) = \dfrac{V(x)}{R}$ (надалі рисочки не пишемо). Для обчислень вибрали такі значення параметрів задачі: $\nu = 0.3$, $H = 0.6$.

На рис. 5 наведено розподіли контактних тисків $p(x)$ для одного штампа параболічної форми при контактній взаємодії з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі та для періодичної системи штампів параболічної форми для такої самої пружної основи при фіксованій півширині області контакту $a = 0.1$, а на рис. 6 – відповідні розподіли осадки δ при $a = 0.5$. Крива ***1*** відповідає дії одного штампа, криві ***2, 3, 4*** – дії періодичної системи штампів для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі для значень періодів $\ell = 1.4, 1.2, 1.1$.

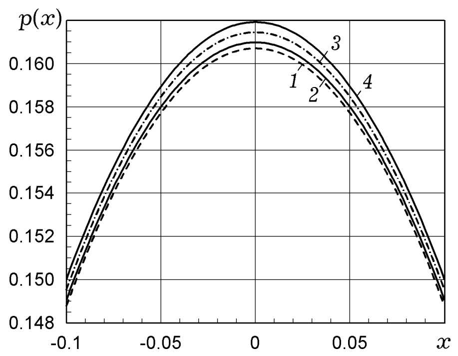

Рис. 5

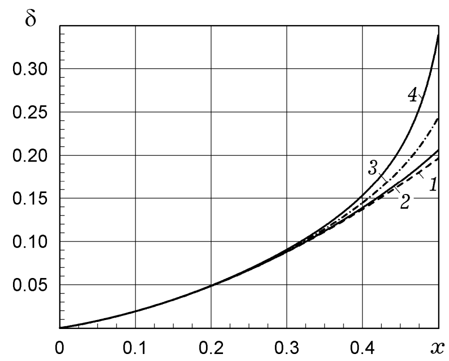

Рис. 6

На рис. 7 наведено залежності прикладеної до штампа сили P від півширини області контакту a для контактної взаємодії штампа з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі, для періодичної контактної задачі для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі та взаємодії штампа з пружним півпростором. Тут крива ***1*** відповідає штампу параболічної форми для основи, що є пружним півпростором, крива ***2*** – штампу тієї ж форми для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі, а криві ***3***, ***4***, ***5*** – періодичній системі параболічних штампів в контактній задачі для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі при значеннях періодів $\ell = 1.4, 1.2, 1.1$, відповідно.

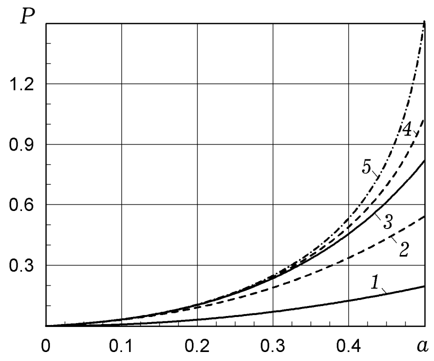

Рис. 7

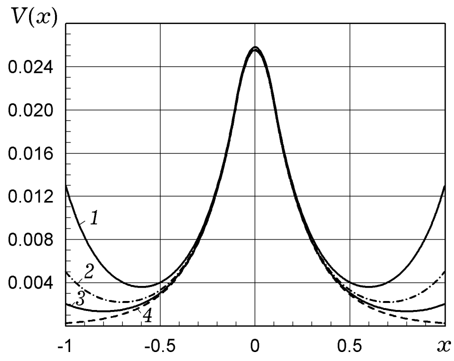

Рис. 8

На рис. 8 наведено графіки залежності прогину $V(x)$ поверхні пружного шару при контактній взаємодії параболічного штампа з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі та періодичної системи параболічних штампів для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі при фіксованій півширині області контакту $a = 0.1$. Тут криві ***1***, ***2***, ***3*** відповідають періодичній системі параболічних штампів для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі при значеннях періодів $\ell = 1.2, 1.4, 1.6$, крива ***4*** відповідає одному штампу параболічної форми для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі [7].

Висновки. Врахування шорсткості (мікроструктури) контактуючих поверхонь було і залишається важливим завданням при визначенні контактної жорсткості, фактичної і номінальної областей контакту тіл, взаємодії мікровиступів тощо. Ці проблеми, як правило, вирішують шляхом розв'язування контактних задач із періодичною структурою поверхонь. Більшість таких досліджень проведено для пружної півплощини (плоска задача) або півпростору [5, 8, 10]. Але застосування цих моделей веде до значних математичних труднощів при отриманні аналітичних розв'язків. У статті побудовано ядро інтегрального рівняння для періодичної задачі про взаємодію системи параболічних штампів із пружною основою. Особливості ядра інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, отриманого в роботі, відображають специфіку пружної основи з двома коефіцієнтами постелі і дають змогу отримати аналітичний розв'язок для штампів довільної форми. Виконано числовий аналіз результатів за параметрами задачі та проведено їх верифікацію через порівняння з відповідними результатами, отриманими для пружної півплощини [3, 7, 9, 11].

1. *Власов В. З., Леонтьев Н. Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – Москва: Физматгиз, 1960. – 491 с.
2. *Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т.* Периодическая задача для упругой плоскости с тонкостенными включениями // Прикл. математика и механика. – 1975. – **39**, № 3. – С. 520–529.
   Те саме: *Grilitskii D. V., Sulim G. T.* Periodic problem for an elastic plane with thin-walled inclusions // J. Appl. Math. Mech. – 1975. – **39**, No. 3. – P. 494–503. – https://doi.org/10.1016/0021-8928(75)90017-9.
3. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
   Те саме: *Johnson K. L.* Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – xii+452 p.

4. *Кит Г. С., Кривцун М. Г.* Плоские задачи термоупругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1983. – 280 с.
5. *Козачок О. П., Слободян Б. С., Мартиняк Р. М.* Взаємодія двох пружних тіл за наявності між ними періодично розташованих зазорів, заповнених реальним газом // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2015. – **58,** № 1. – С. 103–111.
   Те саме: *Kozachok O. P., Slobodian B. S., Martynyak R. M.* Interaction of two elastic bodies in the presence of periodically located gaps filled with a real gas // J. Math. Sci. – 2017. – **222**, No. 2. – P. 131–142.
   – https://doi.org/10.1007/s10958-017-3287-6.
6. *Максимук О. В.* Періодична контактна задача про взаємодію зубчастої та плоскої поверхонь // Машинознавство. – 2001. – № 2. – С. 13–17.
7. *Максимук О. В., Сачук Ю. В., Яцюк С. М.* Плоскі контактні задачі для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2020. – **63**, № 3. – С. 130–135.
8. *Самойленко В. Г., Єлгондиєв К. К.* Про періодичні розв'язки лінійних диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 1. – С. 141–148.
   Те саме: *Samoilenko V. G., Elgondyev K. K.* On periodic solutions of linear differential equations with pulsed influence // Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, No. 1. – P. 156–164. – https://doi.org/10.1007/BF02486623.
9. *Солдатенков И. А.* Контактная задача для упругой полосы и волнистого штампа при наличии трения и износа // Прикл. математика и механика. – 2011. – **75**, № 1. – С. 122–132.
   Те саме: *Soldatenkov I. A.* The contact problem for an elastic strip and a wavy punch when there is friction and wear // J. Appl. Math. Mech. – 2011. – **75**, No. 1. – P. 85–92. – https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2011.04.013.
10. *Чумак К. А., Мартиняк Р. М.* Періодична контактна задача термопружності для тіл з шорсткими поверхнями на локальних ділянках // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2012. – **48**, № 6. – Р. 92–97.
    Те саме: Martynyak R. M., Chumak K. A. Periodic contact problem of thermoelasticity for bodies with rough surfaces in local regions // Mater. Sci. – 2013.– **48**, No. 6. – P. 795–801. – https://doi.org/10.1007/s11003-013-9571-9.
11. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1949. – 270 с.

PERIODIC CONTACT PROBLEM FOR AN ELASTIC FOUNDATION WITH TWO BEDDING COEFFICIENTS

Periodic contact problem for an elastic foundation with two bedding coefficients is investigated. The problem is reduced to solving the Fredholm integral equation of the first kind, for which an analytical solution is obtained in the case of action of the periodic system of the punches of parabolic shapes. Numerical analysis of the results is performed.

Key words**:** *contact problems, Fredholm integral equation, contact pressure, punch displacement, effect of microprotrusions.*

[1] Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів,
[2] Волин. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк

Одержано
14.12.21