

**ПРУЖНА РІВНОВАГА АНІЗОТРОПНИХ БІМАТЕРІАЛЬНИХ ТІЛ З ТОНКИМИ ПРУЖНИМИ АНІЗОТРОПНИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ ЗА ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ**

*З використанням методу інтегральних перетворень Фур'є, методу функцій стрибків і методу спряження континуумів різної вимірності побудовано розв'язок базової задачі поздовжнього зсуву анізотропного біматеріалу з системою тонких внутрішніх стрічкових анізотропних неоднорідностей у кожному з півпросторів. На прикладі зведення задачі поздовжнього зсуву анізотропної двошарової структури з тонкими неоднорідностями до базової задачі здійснено апробацію раніше розробленого методу прямого вирізування. Досліджено вплив модулів пружності та окремих геометричних параметрів задачі на узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень.*

**Ключові слова:** анізотропія, ортотропія, біматеріал, антиплоска деформація, тонке включення, тріщина, двошарова структура, метод прямого вирізування.

Актуальність дослідження задач поздовжнього зсуву біматеріальних анізотропних тіл з тонкими неоднорідностями структури диктується передусім запитами інженерної практики, необхідністю побудови нових математичних моделей і розробки ефективних аналітично-числових методів розв'язування конкретних задач. На сьогодні добре вивчені задачі антиплоскої деформації для однієї чи декількох тонких неоднорідностей, а також відповідних періодичних систем включень в однорідних ізотропних тілах простої геометрії, огляди яких можна знайти у [8, розд. 5, 8]. Дослідження кусково-однорідних тіл з урахуванням анізотропії матеріалу здійснено для дещо меншої кількості праць. Зокрема, у [9] докладно розглянуто задачу поздовжнього зсуву зусиллями на безмежності кусково-однорідного анізотропного простору з внутрішнім включенням, паралельним до межі поділу матеріалів. Випадок впливу зосереджених сил вивчено у роботі [13]. Фундаментальні розв'язки для анізотропного біматеріалу побудовано у [15], а в [10] досліджено довільно орієнтоване включення, що своєю вершиною виходить на межу поділу матеріалів.

Взаємодію тонких неоднорідностей у кусково-однорідних анізотропних тілах за поздовжнього зсуву вивчено переважно для міжфазних тріщин і ізотропних жорстких включень, зокрема й періодичних. У [12] проаналізовано періодичну систему міжфазних жорстких включень у кусково-однорідному просторі. Поздовжній зсув кусково-однорідного клина з міжфазними тріщинами і абсолютно жорсткими включеннями досліджено в [1]. Великий огляд робіт стосовно міжфазних неоднорідностей також здійснено в [11]. У [14], зокрема, виявлено, що напружений стан в околі вершини міжфазного дефекта для кожного з півпросторів не залежить від пружних сталей іншого півпростору. Взаємодію окремих тонких анізотропних включень, що розташовані у різних півплощинах кусково-однорідного анізотропного простору, а також їхніх систем, вивчено далеко неповно, хоча методика розв'язування задач поздовжнього зсуву анізотропних шаруватих структур з тонкими стрічковими неоднорідностями, зокрема з використанням методу функцій стрибків, відома [9, 13].

Зазначимо, що дослідження взаємодії двох і більшої кількості тонких неоднорідностей важливе не тільки для розв'язування окремих інженерно-практичних задач, але й для побудови та застосування нових підходів до дослідження напруженого стану обмежених тіл з тонкими неоднорід-

---

✉ kirill.all@gmail.com

ностями. У [2–5] запропоновано впроваджувати у структуру деформівних тіл додаткові тонкі абсолютно жорсткі включення і тріщини із заданими на них тими чи іншими крайовими умовами для формування додаткових меж тіла і належних крайових умов на них. Вільними чи навантаженими тріщинами моделювали вільні від навантаження або навантажені межі тіла, а ізотропними абсолютно жорсткими включеннями – жорстко защемлені межі. Цей підхід (метод прямого вирізування) було успішно апробовано на задачах поздовжнього зсуву кусково-однорідних ізотропних [2, 5] та однорідних анізотропних [3, 4] тіл з включеннями та тріщинами.

У цій роботі побудуємо розв'язок задачі антипласкої деформації анізотропного біматеріалу з внутрішніми включеннями у кожному з півпросторів і на його основі узагальнимо метод прямого вирізування на випадок обмежених анізотропних біматеріальних структур із внутрішніми тонкими пружними анізотропними неоднорідностями.

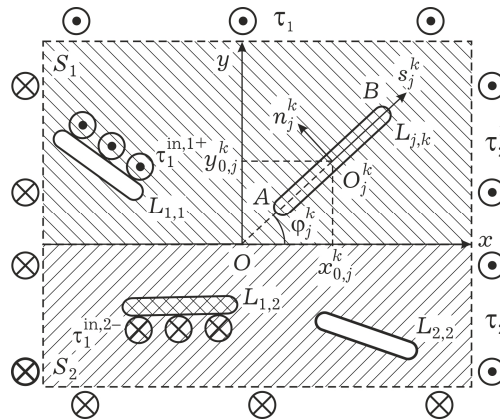


Рис. 1

**1. Формулювання базової задачі.** Розглянемо антипласку деформацію кусково-однорідного анізотропного простору з модулями пружності  $a_{nm}^k$ ,  $n, m = 4, 5$ , за наявності у його верхньому ( $k = 1$ ) і нижньому ( $k = 2$ ) півпросторах  $S_k$  систем з  $N_k$  довільно орієнтованих стрічкових пружних включень  $L_{j,k}$ ,  $j = 1, \dots, N_k$ ,  $k = 1, 2$ , яким відповідають локальні системи координат  $s_j^k O_j^k n_j^k$  у їхніх центрах  $z_{0,j}^k = x_{0,j}^k + iy_{0,j}^k$ . Відомими є кути  $\varphi_j^k$  нахилу неоднорідностей до горизонталі осей  $s_j^k$ , їхні довжини  $2a_j^k$ , товщини  $2h_j^k$  і модулі пружності  $a_{nm,j}^{\text{in},k}$ ,  $n, m = 4, 5$ ,  $j = 1, \dots, N_k$ ,  $k = 1, 2$ . Тут і далі окремі характеристики включень позначатимемо індексом «in» (від «inclusion»). Включення не мають спільних точок перетину чи дотику. Простір може бути навантажений на нескінченності однорідними напруженнями  $\sigma_{yz}^{0,1} = \sigma_{yz}^{0,2} = \tau_1$ ,  $\sigma_{xz}^{0,1} = \tau_1^1$ ,  $\sigma_{xz}^{0,2} = \tau_2^2$ , а на верхньому (+) і нижньому (-) берегах включення  $L_{j,k}$ ,  $j = 1, \dots, N_k$ ,  $k = 1, 2$ , можуть діяти напруження  $\tau_j^{\text{in},k\pm}$  (рис. 1). Урахування додаткового силового чи дислокаційного навантаження не складає труднощів.

На прямолінійній межі поділу півпросторів ( $y = 0$ ) виконуються умови ідеального механічного контакту. Напружено-деформований стан кусково-однорідного простору у площинах, перпендикулярних до напрямку зсуву (вісь  $Oz$ ), відповідно до концепції антипласкої задачі, однаковий, тому будемо його знаходити лише для площини  $xOy$ .

**2. Побудова розв'язку задачі.** Скористаємося відомою [8, 9, 13] методикою розв'язування задач поздовжнього зсуву шаруватих структур з тонкими неоднорідностями.

Напружено-деформований стан кусково-однорідного анізотропного простору з системою внутрішніх тонких неоднорідностей для верхнього ( $k = 1$ ) і нижнього ( $k = 2$ ) півпросторів подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma_{yz}^k(z) + i\sigma_{xz}^k(z) &= \sigma_{yz}^{0,k}(z) + i\sigma_{xz}^{0,k}(z) + \\ &+ [(\hat{\sigma}_{yz}^{0,k}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{0,k}(z)) + (\hat{\sigma}_{yz}^{1,k}(z) + i\hat{\sigma}_{xz}^{1,k}(z))], \\ w^k &= w^{0,k} + [\hat{w}^{0,k} + \hat{w}^{1,k}], \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут  $w^k(x, y)$  – ненульова компонента вектора переміщення уздовж осі  $Oz$  для  $k$ -го півпростору;  $\sigma_{yz}^k, \sigma_{xz}^k$  – відповідні їй напруження.

Однорідний розв'язок  $\sigma_{yz}^{0,k}, \sigma_{xz}^{0,k}, w^{0,k}$  в (1) характеризує напружено-деформований стан  $k$ -го півпростору кусково-однорідного простору без неоднорідностей, проте із заданим зовнішнім навантаженням. Процес його знаходження у разі складної геометрії задачі чи/і складних видів навантаження є окремою, але відносно простою задачею, проте для певних випадків її розв'язок можна записати відразу. За дії однорідного навантаження на нескінченності однорідний розв'язок має вигляд

$$\sigma_{yz}^{0,k}(z) + i\sigma_{xz}^{0,k}(z) = \tau_1 + i\tau_2^k, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

При цьому додатково повинна забезпечуватися умова ідеального механічного контакту півпросторів на нескінченності [8, 13]:

$$\sigma_{yz}^{0,1}|_{x \rightarrow \pm\infty} = \sigma_{yz}^{0,2}|_{x \rightarrow \pm\infty}, \quad \frac{\partial w^{0,1}}{\partial x}|_{x \rightarrow \pm\infty} = \frac{\partial w^{0,2}}{\partial x}|_{x \rightarrow \pm\infty}.$$

Звідси, враховуючи узагальнений закон Гука, впливає необхідний зв'язок між пружними сталими матеріалу і заданими на нескінченності напруженнями:

$$a_{45}^1 \tau_1 + a_{55}^1 \tau_2^1 = a_{45}^2 \tau_1 + a_{55}^2 \tau_2^2.$$

Однорідний розв'язок для полів переміщень  $w^{0,k}$  шукаємо з використанням узагальненого закону Гука:

$$\frac{\partial w^{0,k}}{\partial x} = a_{45}^k \sigma_{yz}^{0,k} + a_{55}^k \sigma_{xz}^{0,k}, \quad \frac{\partial w^{0,k}}{\partial x} = a_{44}^k \sigma_{yz}^{0,k} + a_{45}^k \sigma_{xz}^{0,k}, \quad k = 1, 2.$$

Збурений неоднорідностями розв'язок в (1), позначений символом « $\hat{\cdot}$ » (сірконфлекс), подамо у вигляді суми так званого основного збуреного розв'язку  $\hat{\sigma}_{yz}^{0,k}, \hat{\sigma}_{xz}^{0,k}, \hat{w}^{0,k}$  від  $N_k$  включень  $L_{j,k}$ ,  $j = 1, \dots, N_k$ , у нескінченному просторі з фізичними характеристиками  $k$ -го півпростору, до якого вони належать, і збуреного коригувального розв'язку  $\hat{\sigma}_{yz}^{1,k}, \hat{\sigma}_{xz}^{1,k}, \hat{w}^{1,k}$ , який враховує вплив межі контакту півпросторів і взаємодію включень.

Для отримання основного збуреного розв'язку  $\hat{\sigma}_{yz}^{0,k}, \hat{\sigma}_{xz}^{0,k}, \hat{w}^{0,k}$ , згідно з методом функцій стрибків [8, 9], тонкі неоднорідності вилучаємо з розгляду, а їхній вплив на матрицю замінюємо невідомими функціями стрибків напружень  $f_{5,j}^k$  і похідних від переміщень  $f_{6,j}^k$  на серединній лінії  $L'_{j,k} \equiv \equiv [-a_j^k, a_j^k]$ ,  $n_j^k = 0$ , неоднорідності у її локальній системі координат  $s_j^k O_j^k n_j^k$ :

$$\sigma_{nz,j}^{k-} - \sigma_{nz,j}^{k+} = f_{5,j}^k(s_j^k), \quad \frac{\partial}{\partial s_j^k}(w_j^{k-} - w_j^{k+}) = f_{6,j}^k(s_j^k),$$

$$s_j^k \in L'_{j,k}, \quad j = 1, \dots, N, \quad k = 1, 2.$$

При цьому  $f_{r,j}^k = 0$ ,  $r = 5, 6$ , якщо  $s_j^k \notin L'_{j,k}$ . Тут  $\sigma_{nz,j}^{k\pm}$ ,  $\frac{\partial w_j^{k\pm}}{\partial s_j^k}$  – нормальні напруження і похідні від переміщень на верхньому (+) і нижньому (-) берегах неоднорідності відповідно. Напружений стан анізотропного простору з тонкою неоднорідністю  $L_{j,k}$  у її локальній системі координат стосовно невідомих функцій стрибків  $f_{r,j}^k$ ,  $r = 5, 6$ , з використанням інтегральних перетворень Фур'є побудовано у [8, 13]. Подамо його у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{nz,j}^{0,k} + i\bar{\sigma}_{sz,j}^{0,k} &= \frac{1}{4} \left[ g_p^{j,k} t_5(z_j^k) - g_m^{j,k} t_5(\bar{z}_j^k) \right] + \\ &+ \frac{i}{4a_{55}^{j,k} \alpha_j^k} \left[ g_p^{j,k} t_6(z_j^k) + g_m^{j,k} t_6(\bar{z}_j^k) \right], \\ t_r(z_j^k) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_{j,k}} \frac{f_{r,j}^k(t) dt}{t - z_j^k}, \quad r = 5, 6, \\ g_p^{j,k} &= \beta_j^k + i(1 + \alpha_j^k), \quad g_m^{j,k} = \beta_j^k + i(1 - \alpha_j^k), \quad i^2 = -1, \\ \alpha_j^k &= \frac{\sqrt{a_{44}^{j,k} a_{55}^{j,k} - (a_{45}^{j,k})^2}}{a_{55}^{j,k}}, \quad \beta_j^k = \frac{a_{45}^{j,k}}{a_{55}^{j,k}}, \quad z_j^k = s_j^k + (\beta_j^k + i\alpha_j^k)n_j^k. \end{aligned} \quad (3)$$

Рискою зверху тут і далі позначаємо комплексне спряження виразу.

Пружні сталі матеріалу  $a_{nm}^{j,k}$  для  $k$ -го півпростору у системі координат  $s_j^k O_j^k n_j^k$  визначаються формулами [6]

$$\begin{aligned} a_{44}^{j,k} &= a_{44}^k \cos^2 \varphi_j^k - 2a_{45}^k \sin \varphi_j^k \cos \varphi_j^k + a_{55}^k \sin^2 \varphi_j^k, \\ a_{45}^{j,k} &= (a_{44}^k - a_{55}^k) \sin \varphi_j^k \cos \varphi_j^k + a_{45}^k (\cos^2 \varphi_j^k - \sin^2 \varphi_j^k), \\ a_{55}^{j,k} &= a_{44}^k \sin^2 \varphi_j^k + 2a_{45}^k \sin \varphi_j^k \cos \varphi_j^k + a_{55}^k \cos^2 \varphi_j^k. \end{aligned}$$

Використавши принцип суперпозиції розв'язків, (3) і врахувавши формули перетворення тензора напружень при зміні системи координат, *основний збурений розв'язок* у системі координат  $xOy$  подамо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{yz}^{0,k} + i\bar{\sigma}_{xz}^{0,k} &= \sum_{j=1}^{N_k} (\bar{\sigma}_{nz,j}^{0,k} + i\bar{\sigma}_{sz,j}^{0,k}) \exp(-i\varphi_j^k), \\ \frac{\partial \bar{w}^{0,k}}{\partial x} &= a_{45}^k \bar{\sigma}_{yz}^{0,k} + a_{55}^k \bar{\sigma}_{xz}^{0,k}, \\ s_j^k + in_j^k &= (x + iy - z_{0,j}^k) \exp(-i\varphi_j^k). \end{aligned} \quad (4)$$

*Збурений коригувальний розв'язок*  $\bar{\sigma}_{yz}^{1,k}$ ,  $\bar{\sigma}_{xz}^{1,k}$ ,  $\bar{w}^{1,k}$  з використанням узагальненого закону Гюка, рівняння рівноваги, введення функції напружень і застосування інтегрального перетворення Фур'є подамо в інтегральному вигляді [8, 13]

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma}_{xz}^{1,k}(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1^k(\xi)\lambda_1^k \exp(\lambda_1^k y) + A_2^k(\xi)\lambda_2^k \exp(\lambda_2^k y)] e^{-i\xi x} d\xi, \\
\hat{\sigma}_{yz}^{1,k}(x, y) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A_1^k(\xi) \exp(\lambda_1^k y) + A_2^k(\xi) \exp(\lambda_2^k y)] \xi e^{-i\xi x} d\xi, \\
\frac{\partial \hat{w}^{1,k}}{\partial x} &= a_{45}^k \hat{\sigma}_{yz}^{1,k} + a_{55}^k \hat{\sigma}_{xz}^{1,k}, \quad \lambda_\ell^k = (-1)^{\ell+1} \alpha^k |\xi| - i\beta^k \xi, \quad \ell = 1, 2, \\
\alpha^k &= \frac{\sqrt{a_{44}^k a_{55}^k - (a_{45}^k)^2}}{a_{55}^k}, \quad \beta^k = \frac{a_{45}^k}{a_{55}^k}, \quad k = 1, 2,
\end{aligned} \tag{5}$$

стосовно невідомих функцій  $A_\ell^k(\xi)$ ,  $\ell, k = 1, 2$ , які знайдемо з крайових умов та умов ідеального механічного контакту. Оскільки на нескінченності крайові умови згідно з (1), (2) автоматично задовольняються за допомогою однорідного розв'язку  $\hat{\sigma}_{yz}^{0,k}(z)$ ,  $\hat{\sigma}_{xz}^{0,k}(z)$ , то збурені розв'язки  $\hat{\sigma}_{yz}^{0,k} + \hat{\sigma}_{yz}^{1,k}$ ,  $\hat{\sigma}_{xz}^{0,k} + \hat{\sigma}_{xz}^{1,k}$ ,  $\hat{w}^{0,k} + \hat{w}^{1,k}$  повинні задовольняти нульові крайові умови:

$$(\hat{\sigma}_{yz}^{0,1} + \hat{\sigma}_{yz}^{1,1})|_{y=+\infty} = 0, \quad (\hat{\sigma}_{yz}^{0,2} + \hat{\sigma}_{yz}^{1,2})|_{y=-\infty} = 0.$$

Звідси, у свою чергу, випливає, що

$$A_1^1(\xi) = A_2^2(\xi) = 0. \tag{6}$$

Також треба забезпечити умови ідеального механічного контакту верхнього і нижнього півпросторів. Оскільки однорідний розв'язок на лінії поділу матеріалів  $y = 0$  задовольняється автоматично, то

$$\begin{aligned}
(\hat{\sigma}_{yz}^{0,1} + \hat{\sigma}_{yz}^{1,1})|_{y=0} &= (\hat{\sigma}_{yz}^{0,2} + \hat{\sigma}_{yz}^{1,2})|_{y=0}, \\
\left( \frac{\partial \hat{w}^{0,1}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}^{1,1}}{\partial x} \right)|_{y=0} &= \left( \frac{\partial \hat{w}^{0,2}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}^{1,2}}{\partial x} \right)|_{y=0}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Застосуємо до (7) пряме перетворення Фур'є стосовно  $x$ :

$$f^F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\xi x} dx, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^F(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Тут індексом « $F$ » позначено образ функції  $f$  у просторі зображень інтегралів Фур'є. Таким чином легко позбудемося у (7) від інтегралів за змінними  $\xi$  та  $x$  для  $\hat{\sigma}_{yz}^{1,k}$ ,  $\hat{\sigma}_{xz}^{1,k}$ ,  $\frac{\partial \hat{w}^{1,k}}{\partial x}$ . Врахуємо, що вираз  $\hat{\sigma}_{yz}^{0,k} + i\hat{\sigma}_{xz}^{0,k}$  зводиться до функції  $f$  зі структурою

$$f(x) = \frac{r + iq}{c + bx + id}, \quad c, b, d, r, q \in \mathbb{R}.$$

При цьому з використанням розвинень [8, §13.5] зображення дійсної та уявної частин  $f(x)$  набудуть вигляду

$$(\operatorname{Re}(f(x)))^F = \frac{\pi}{b} (ir \operatorname{sgn}(\xi) + q \operatorname{sgn}(bd)) \exp(-|\xi d/b| - i\xi c/b),$$

$$(\operatorname{Im}(f(x)))^F = \frac{\pi}{b} (iq \operatorname{sgn}(\xi) - r \operatorname{sgn}(bd)) \exp(-|\xi d/b| - i\xi c/b).$$

У такий спосіб (7) зводиться до системи лінійних алгебричних рівнянь другого порядку, з якої знайдемо невідомі  $A_\ell^k$ ,  $\ell, k = 1, 2$ .

Підстановка знайдених значень  $A_\ell^k$ ,  $\ell, k = 1, 2$ , у (5), інтегрування з розбиттям нескінченного проміжку інтегрування на два напівнескінченні та спрощення отриманих залежностей дає такі значення збурених коригувальних розв'язків для напружень:

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma}_{yz}^{1,k} + i\widehat{\sigma}_{xz}^{1,k} = & \sum_{j=1}^{N_k} \int_{L_{j,k}^k} \frac{[\beta^k + i(1 - \alpha^k)](a_{55}^{j,k} \alpha_j^k f_{5,j}^k(t) + i f_{6,j}^k(t)) G_{1,j}^k}{4\pi(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2) a_{55}^{j,k} \alpha_j^k H_{1,j}^k(t)} + \\ & + \frac{-[\beta^k + i(1 + \alpha^k)](a_{55}^{j,k} \alpha_j^k f_{5,j}^k(t) - i f_{6,j}^k(t)) \overline{G_{1,j}^k}}{4\pi(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2) a_{55}^{j,k} \alpha_j^k H_{1,j}^k(t)} dt + \\ & + \sum_{j=1}^{N_{3-k}} \int_{L_{j,3-k}^k} \frac{[\beta^k + i(1 - \alpha^k)](a_{55}^{j,3-k} \alpha_j^{3-k} f_{5,j}^{3-k}(t) - i f_{6,j}^{3-k}(t)) G_{2,j}^k}{4\pi(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2) a_{55}^{j,3-k} \alpha_j^{3-k} H_{2,j}^k(t)} + \\ & + \frac{-[\beta^k + i(1 + \alpha^k)](a_{55}^{j,3-k} \alpha_j^{3-k} f_{5,j}^{3-k}(t) + i f_{6,j}^{3-k}(t)) \overline{G_{2,j}^k}}{4\pi(a_{55}^1 \alpha^1 + a_{55}^2 \alpha^2) a_{55}^{j,3-k} \alpha_j^{3-k} H_{2,j}^k(t)} dt, \end{aligned} \quad (8)$$

$k = 1, 2$ ,

де

$$\begin{aligned} G_{1,j}^k &= a_{45}^k C_{2,j}^k + a_{55}^k C_{1,j}^k + i(-a_{55}^k \alpha_j^k + C_{2,j}^k a_{55}^{3-k} \alpha^{3-k}), \\ G_{2,j}^k &= a_{45}^{3-k} C_{2,j}^{3-k} + a_{55}^{3-k} C_{1,j}^{3-k} + i(a_{55}^{3-k} \alpha_j^{3-k} + C_{2,j}^k a_{55}^{3-k} \alpha^{3-k}), \\ C_{1,j}^k &= \left(-1 + \frac{a_{44}^{j,k}}{a_{55}^{j,k}}\right) \sin \varphi_j^k \cos \varphi_j^k - \beta_j^k \cos 2\varphi_j^k, \\ C_{2,j}^k &= \left(-1 + \frac{a_{44}^{j,k}}{a_{55}^{j,k}}\right) \sin \varphi_j^k \sin \varphi_j^k - \beta_j^k \sin 2\varphi_j^k + 1, \\ H_{1,j}^k(t) &= y B_j^k \alpha^k + T_{1,j}^k + i(y \beta^k B_j^k + T_{2,j}^k + x B_j^k), \\ H_{2,j}^k(t) &= y B_j^{3-k} \alpha^k - T_{1,j}^{3-k} + i(y \beta^k B_j^{3-k} + T_{2,j}^{3-k} + x B_j^{3-k}), \\ B_j^k &= (\beta_j^k \sin \varphi_j^k - \cos \varphi_j^k)^2 + (\alpha_j^k)^2 \sin^2 \varphi_j^k, \\ T_{1,j}^k &= \alpha_j^k (t \sin \varphi_j^k + y_{0,j}^k), \\ T_{2,j}^k &= (-\cos \varphi_j^k + \beta_j^k \sin \varphi_j^k) \times \\ & \quad \times [t + (\cos \varphi_j^k - \beta_j^k \sin \varphi_j^k) x_{0,j}^k + (\sin \varphi_j^k + \beta_j^k \cos \varphi_j^k) y_{0,j}^k] - \\ & \quad - (\alpha_j^k)^2 (x_{0,j}^k \sin \varphi_j^k - y_{0,j}^k \cos \varphi_j^k) \sin \varphi_j^k. \end{aligned}$$

Вирази збурених коригувальних розв'язків для переміщень дає використання узагальненого закону Гюка.

Таким чином, формули (1) з урахуванням (2), (4), (5), (8) описують напружено-деформований стан стосовно функцій стрибків анізотропного кусково-однорідного простору із системою внутрішніх тонких неоднорідностей.

Для окремих типів задач функції стрибків можуть бути відомі. Зокрема, якщо подати їх у вигляді дельта-функцій:

$$f_{5,j}^k = Q_j^k \delta(t), \quad f_{6,j}^k = b_j^k \delta(t), \quad \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0, \end{cases}$$

де

$$Q_j^k, b_j^k \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, N_k, \quad k = 1, 2,$$

то (1) з урахуванням (2), (4), (5), (8) дає нам вираз для напружено-деформованого стану кусково-однорідного анізотропного простору із системою зосереджених сил величин  $Q_j^k$  і дислокацій зі складовою вектора Бюргерса  $b_j^k$ , що діють у точках  $z_{0,j}^k$ ,  $j = 1, \dots, N_k$ ,  $k = 1, 2$ , анізотропного біматеріалу.

Функції стрибків у досліджуваному випадку системи тонких пружних включень є невідомими. Для їхнього визначення скористаємося умовами взаємодії матриці тіла з навантаженим пружним включенням  $L_{\ell,k}$  [4], які задають зв'язок між напруженнями і похідними від переміщень на верхньому і нижньому берегах неоднорідності:

$$\begin{aligned} & \sigma_{nz,\ell}^{k+} + \sigma_{nz,\ell}^{k-} + (\tau_\ell^{\text{in},k+} + \tau_\ell^{\text{in},k-}) + \\ & + \frac{1}{h_\ell^k a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \int_{-a_\ell^k}^{s_\ell^k} a_{45,\ell}^{\text{in},k} [\sigma_{nz,\ell}^{k-}(t) - \sigma_{nz,\ell}^{k+}(t) + \tau_\ell^{\text{in},k-} - \tau_\ell^{\text{in},k+}] dt + \\ & + \frac{1}{h_\ell^k a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \int_{-a_\ell^k}^{s_\ell^k} \left[ \frac{\partial w_\ell^{k-}(t)}{\partial t} - \frac{\partial w_\ell^{k+}(t)}{\partial t} \right] dt = \\ & = -2 \frac{a_{45,\ell}^{\text{in},k}}{a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \sigma_{sz,\ell}^{\text{in},k,\text{av}}(-a_\ell^k) + \frac{w_\ell^{k,*}}{h_\ell^k a_{44,\ell}^{\text{in},k}}, \\ & \frac{\partial w_\ell^{k+}}{\partial s_\ell^k} + \frac{\partial w_\ell^{k-}}{\partial s_\ell^k} - \frac{1}{h_\ell^k a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \int_{-a_\ell^k}^{s_\ell^k} |r_\ell^k|^2 [\sigma_{nz,\ell}^{k-}(t) - \sigma_{nz,\ell}^{k+}(t) + \tau_\ell^{\text{in},k-} - \tau_\ell^{\text{in},k+}] dt + \\ & + \frac{1}{h_\ell^k a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \int_{-a_\ell^k}^{s_\ell^k} a_{45,\ell}^{\text{in},k} \left[ \frac{\partial w_\ell^{k-}(t)}{\partial t} - \frac{\partial w_\ell^{k+}(t)}{\partial t} \right] dt = \\ & = 2 \frac{|r_\ell^k|^2}{a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \sigma_{sz,\ell}^{\text{in},k,\text{av}}(-a_\ell^k) + \frac{a_{45,\ell}^{\text{in},k}}{a_{44,\ell}^{\text{in},k}} \frac{w_\ell^{k,*}}{h_\ell^k}, \quad \ell = 1, \dots, N_k, \quad k = 1, 2, \quad (9) \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \sigma_{sz,\ell}^{\text{in},k,\text{av}}(-a_\ell^k) &= \sigma_{sz,\ell}^{0,k}(-a_\ell^k, 0) \frac{a_{44}^{\ell,k}}{\max\{a_{44}^{\ell,k}, a_{44,\ell}^{\text{in},k}\}}, \\ w_\ell^{k,*} &= 2h_\ell^k \left( a_{44}^{\ell,k} \left[ \sigma_{nz,\ell}^{0,k}(-a_\ell^k, 0) + \frac{1}{2} (\tau_\ell^{\text{in},k+} + \tau_\ell^{\text{in},k-}) \right] + \right. \\ & \quad \left. + a_{45}^{\ell,k} \sigma_{sz,\ell}^{\text{in},k,\text{av}}(-a_\ell^k) \right) \frac{\min\{a_{44}^{\ell,k}, a_{44,\ell}^{\text{in},k}\}}{a_{44}^{\ell,k}}, \\ \sigma_{nz,\ell}^{0,k} + i\sigma_{sz,\ell}^{0,k} &= (\sigma_{yz}^{0,k} + i\sigma_{xz}^{0,k}) \exp(i\varphi_\ell^k), \quad |r_\ell^k| = \sqrt{a_{44,\ell}^{\text{in},k} a_{55,\ell}^{\text{in},k} - (a_{45,\ell}^{\text{in},k})^2}. \end{aligned}$$

Перейдемо в (1) до локальної системи координат неоднорідності  $L_{\ell,k}$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{nz,\ell}^k + i\sigma_{sz,\ell}^k &= (\sigma_{yz}^k + i\sigma_{xz}^k) \exp(i\varphi_\ell^k), \\ x + iy &= (s_\ell^k + in_\ell^k) \exp(i\varphi_\ell^k) + z_{0,\ell}^k, \end{aligned}$$

та знайдемо граничні значення напружень  $\sigma_{nz,\ell}^{k\pm}$  та похідних від переміщень  $\partial w_\ell^{k\pm} / \partial s_\ell^k$  на її берегах згідно з формулою Сохоцького – Племеля ( $n_\ell^k = 0$ ) [7]:

$$\sigma_{nz,\ell}^{k\pm} = \mp \frac{1}{2} f_{5,\ell}^k(s_\ell^k) - \frac{1}{2\pi\alpha_\ell^k a_{55}^{\ell,k}} \int_{L_{\ell,k}} \frac{f_{6,\ell}^k(t) dt}{t - s_\ell^k} + \sigma_{nz,\ell}^{k,\ell},$$

$$\frac{\partial w_\ell^{k\pm}}{\partial s_\ell^k} = \mp \frac{1}{2} f_{6,\ell}^k(s_\ell^k) + \frac{a_{55}^{\ell,k} \alpha_\ell^k}{2\pi} \int_{L_{\ell,k}} \frac{f_{5,\ell}^k(t) dt}{t - s_\ell^k} + a_{45}^{\ell,k} \sigma_{nz,\ell}^{k,\ell} + a_{55}^{\ell,k} \sigma_{sz,\ell}^{k,\ell}, \quad (10)$$

де

$$\sigma_{nz,\ell}^{k,j} + i\sigma_{sz,\ell}^{k,j} = \sigma_{nz,\ell}^{0,k} + i\sigma_{sz,\ell}^{0,k} + \sum_{q=1, q \neq j}^{N_k} (\bar{\sigma}_{nz,q}^{0,k} + i\bar{\sigma}_{sz,q}^{0,k}) \exp(i(\varphi_\ell^k - \varphi_q^k)) +$$

$$+ (\bar{\sigma}_{yz}^{1,k} + i\bar{\sigma}_{xz}^{1,k}) \exp(i\varphi_\ell^k),$$

$$s_q^k + in_q^k = [s_\ell^k \exp(i\varphi_\ell^k) + z_{0,\ell}^k - z_{0,q}^k] \exp(-i\varphi_q^k),$$

$$x + iy = s_\ell^k \exp(i\varphi_\ell^k) + z_{0,\ell}^k.$$

Підстановка (10) в умови взаємодії (9) для кожного включення  $L_{\ell,k}$   $\ell = 1, \dots, N_k$ ,  $k = 1, 2$ , дає систему сингулярних інтегральних рівнянь  $2(N_1 + N_2)$ -го порядку стосовно невідомих функцій стрибків. Додаткові  $2(N_1 + N_2)$  умови рівноваги кожного включення і однозначності переміщень при обході навколо нього:

$$\int_{-a_\ell^k}^{a_\ell^k} f_{5,\ell}^k(t) dt = 2a_\ell^k (\tau_\ell^{\text{in},k+} - \tau_\ell^{\text{in},k-}), \quad \int_{-a_\ell^k}^{a_\ell^k} f_{6,\ell}^k(t) dt = 0,$$

$$\ell = 1, \dots, N_k, \quad k = 1, 2,$$

дають змогу розв'язати результуючу систему сингулярних інтегральних рівнянь методом колокацій з розвиненням функцій стрибків у скінченні суми рядів з виділеною кореневою особливістю [8], а отже, відповідно до (1), (2), (4), (5), (8), можна знайти шуканий напружено-деформований стан. Для числового аналізу розглянутих нижче прикладів використовуємо вісімдесят перших членів розвинення функцій стрибків у ряди за поліномами Чебишова першого роду з виділеною кореневою особливістю. Це забезпечило похибку обчислень узагальнених коефіцієнтів інтенсивності напружень, меншу ніж 1%.

Однією з важливих інтегральних характеристик полів напружень біля вершини неоднорідності є узагальнені коефіцієнти інтенсивності напружень (УКІН) [8]. Для пружних включень в анізотропному матеріалі УКІН у вершинах включення  $A$  чи  $B$  обчислюємо за формулами [8]

$$K_{3,2,\ell}^{k,A,B} - iK_{3,1,\ell}^{k,A,B} = \mp \left( p_{5,\ell}^{k\pm} + \frac{i}{a_{55}^{\ell,k} \alpha_\ell^k} p_{6,\ell}^{k\pm} \right) \sqrt{\pi/2},$$

$$p_{r,\ell}^{k\pm} = \lim_{t \rightarrow \pm a_\ell^k} \left[ \sqrt{|a_\ell^k \mp t|} f_{r,\ell}^k(\pm a_\ell^k) \right], \quad r = 5, 6, \quad \ell = 1, \dots, N_k, \quad k = 1, 2.$$

Тут верхні знаки відповідають вершині  $B$  включення, а нижні – вершині  $A$ .



**3. Достовірність і граничні випадки.** Розглянемо випадок ізотропного біматеріалу:

$$a_{44}^1 = a_{55}^1 = \frac{1}{G_1}, \quad a_{44}^2 = a_{55}^2 = \frac{1}{G_2}, \quad a_{45}^1 = a_{45}^2 = 0,$$

де  $G_1, G_2$  – модулі пружності відповідно півпросторів  $S_1$  та  $S_2$ . Тоді збурені коригувальні розв'язки (8) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{yz}^{1,k} + i\bar{\sigma}_{xz}^{1,k} &= \frac{i}{2\pi} \frac{G_k - G_{3-k}}{G_k + G_{3-k}} \sum_{j=1}^{N_k} \int_{L'_{j,k}} \frac{f_{5,j}^k(t) - iG_k f_{6,j}^k(t)}{t \exp(-i\varphi_j^k) - (z - \bar{z}_{0,j}^k)} dt + \\ &+ \frac{i}{\pi} \frac{G_k}{G_k + G_{3-k}} \sum_{j=1}^{N_{3-k}} \int_{L'_{j,3-k}} \frac{f_{5,j}^{3-k}(t) + iG_{3-k} f_{6,j}^{3-k}(t)}{t \exp(i\varphi_j^{3-k}) - (z - z_{0,j}^{3-k})} dt, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

де  $z = x + iy$ . Цей вираз збігається з отриманим раніше [2, 5] для ізотропного кусково-однорідного простору з тонкими неоднорідностями, що є додатковим підтвердженням правильності формули (8).

Тепер розглянемо випадок, коли верхній і нижній півпростори мають однакові пружні характеристики (однорідний анізотропний простір):

$$a_{44}^1 = a_{44}^2 = a_{44}, \quad a_{45}^1 = a_{45}^2 = a_{45}, \quad a_{55}^1 = a_{55}^2 = a_{55}, \quad (11)$$

і для спрощення математичних перетворень прийmemo  $\varphi_j^k = 0, j = 1, \dots, N_k, k = 1, 2$ , вважаючи, що всі неоднорідності паралельні до осі абсцис. Тоді збурені коригувальні розв'язки (8) після підстановки (11) набудуть вигляду (3) з урахуванням перенесення системи координат:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{yz}^{1,k} + i\bar{\sigma}_{xz}^{1,k} &= \sum_{j=1}^{N_{3-k}} \frac{1}{4} [g_p t_5 (z_j^{3-k}) - g_m t_5 (\bar{z}_j^{3-k})] + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_{3-k}} \frac{i}{4\alpha a_{55}} [g_p t_6 (z_j^{3-k}) + g_m t_6 (\bar{z}_j^{3-k})], \\ t_r(z_j^{3-k}) &= \frac{1}{\pi} \int_{L'_{j,3-k}} \frac{f_{r,j}^{3-k}(t) dt}{t - z_j^{3-k}}, \quad r = 5, 6, \quad k = 1, 2, \\ g_p &= \beta + i(1 + \alpha), \quad g_m = \beta + i(1 - \alpha), \quad i^2 = -1, \\ \alpha &= \frac{\sqrt{a_{44} a_{55} - (a_{45})^2}}{a_{55}}, \quad \beta = \frac{a_{45}}{a_{55}}, \\ z_j^{3-k} &= (x - x_{0j}^{3-k}) + (\beta + i\alpha)(y - y_{0j}^{3-k}). \end{aligned}$$

Дійсно, для системи неоднорідностей у  $S_k$ -му півпросторі основним збуреним розв'язком згідно з означенням є напружено-деформований стан від  $N_k$  включень  $L_{j,k}, j = 1, \dots, N_k$ , у нескінченному просторі з фізичними характеристиками  $k$ -го півпростору. Отриманий збурений коригувальний розв'язок у цьому випадку є таким самим, як і основний збурений, проте відповідає за решту  $N_{3-k}$  неоднорідностей  $L_{j,3-k}, j = 1, \dots, N_{3-k}$ . Сума основного збуреного і збуреного коригувального розв'язків очікувано дає розв'язок для однорідного анізотропного простору з  $N_1 + N_2$  неоднорідностями стосовно функцій стрибків. Це є ще одним підтвердженням достовірності отриманих результатів.

**4. Числові результати і обговорення.** Без зменшення загальності розглянемо анізотропний біматеріал з неоднорідностями лише у верхньому півпросторі  $S_1$ , тобто функції стрибків у півпросторі  $S_2$  є нульовими,  $f_{5,j}^2 = f_{6,j}^2 = 0$ ,  $j = 1, \dots, N_2$ . Проаналізуємо вплив пружних сталей другого півпростору,  $S_2$ , на напружений стан біля неоднорідностей  $L_{j,1}$ ,  $j = 1, \dots, N_1$ , у півпросторі  $S_1$ . З формули (8) для збурених коригувальних розв'язків  $\hat{\sigma}_{yz}^{1,k}$ ,  $\hat{\sigma}_{xz}^{1,k}$ ,  $k = 1$ , легко бачити, що вплив пружних сталей нижнього півпростору  $S_2$  описується лише залежністю

$$a_{55}^2 \alpha^2 = |r^2| = \sqrt{a_{44}^2 a_{55}^2 - (a_{45}^2)^2}. \quad (12)$$

Припустимо, що однорідний розв'язок є нульовим:  $\sigma_{yz}^{0,k} = \sigma_{xz}^{0,k} = 0$ , а зовнішнє навантаження прикладене безпосередньо до берегів неоднорідностей. Оскільки основний збурений розв'язок не залежить від пружних сталей  $S_2$ , то можна стверджувати, що напружений стан в околі вершин неоднорідностей залежатиме не від окремих пружних сталей півпростору  $S_2$ , а від їхньої комбінації (12). Отже, для всіх комбінацій значень пружних сталей матриці  $a_{44}^2$ ,  $a_{45}^2$ ,  $a_{55}^2$ , для яких значення  $|r^2|$  у виразі (12) є фіксованим, УКІН для кожного включення у півпросторі  $S_1$  буде незмінним.

**Приклад 1.** Дослідимо кусково-однорідний анізотропний простір із симетрично навантаженою зусиллями  $\tau_1^{\text{in},1}$  тріщиною  $L_{1,1}$ . Тріщини тут і далі моделюватимемо дуже податливим ізотропним пружним включенням з характеристиками  $h_1^1 = 0.01a_1^1$ ,  $a_{44,1}^{\text{in},1} = a_{55,1}^{\text{in},1} = 10^6 a_{55}^1$ ,  $a_{45,1}^{\text{in},1} = 0$ . Тріщина паралельна до лінії поділу матеріалів,  $\phi_1^1 = 0$ , і розміщена на відносній віддалі  $d = y_{01}^1/a_1^1 = 1$  від неї. Пружні сталі матеріалів півпросторів  $S_1$  та  $S_2$  нормуємо значенням  $a_{55}^1$ . На рис. 2 подано графіки залежностей нормованих УКІН  $K_{3,1}^0 = K_{3,1}^{1,A,B} / (\tau_1^{\text{in},1} \sqrt{\pi a_1^1})$  від логарифма відносного значення  $r_0 = |r^2|/a_{55}^1$  стосовно п'яти відносних значень  $k = 1/2, 2/3, 1.0, 3/2, 2.0$  пружних сталей  $k = a_{44}^1/a_{55}^1$  ( $a_{45}^1/a_{55}^1 = 0$ ) матеріалу верхнього півпростору  $S_1$ . Суцільною лінією подано графік для ізотропного матеріалу, пунктирними і штриховими – для ортотропних.

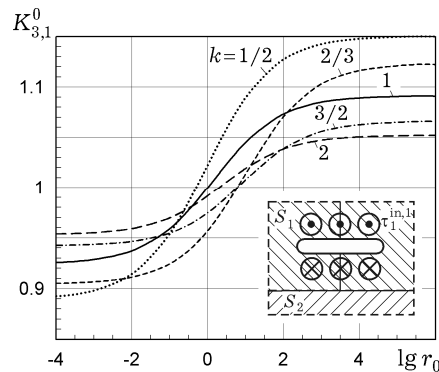


Рис. 2

Зі збільшенням  $r_0$  нормовані УКІН  $K_{3,1}^0$  зростають для всіх розглянутих випадків. Мінімуму значенню  $r_0$  для ізотропного матеріалу відповідає нормований УКІН  $K_{3,1}^0 = 0.924$ , який збігається зі значенням коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) задачі поздовжнього зсуву півпростору з жорстко защемленою межею і так само розміщеною навантаженою тріщиною [8, с. 199]. Максимальному значенню  $r_0$  для ізотропного матеріалу відповідає УКІН 1.091, що збігається з КІН навантаженої тріщини у півпросторі з вільною від навантаження межею [8, с. 199]. Для ортотропних матеріалів можна зробити подібні спостереження. Зокрема, при  $k = 2/3, 3/2$  для мінімальних значеннях  $r_0$  обчислені УКІН (0.905 і 0.942 відповідно) збігаються зі значеннями УКІН, отриманими у [4] з використанням методу прямого вирізування для тріщини у півпросторі з жорстко защемленою межею. При тих самих  $k = 2/3, 3/2$ , але вже для максимальних значень  $r_0$  УКІН для тріщини  $L_{1,1}$  (1.122 і 1.066 відповідно) збігаються з меншою ніж 1% похибкою з результатами [3], де метод прямого вирізування застосовано до задачі поздовжнього зсуву навантаженої тріщини в ортотропному півпросторі з вільною від навантаження межею. На рис. 2 також простежуємо виражений вплив ортотропії матеріалу півплощини  $S_1$ , коли УКІН тріщини для менших значень  $k$  більше залежить від відносної характеристики  $r_0$  матеріалу  $S_2$ .

Апробуємо раніше розроблений метод прямого вирізування на задачах кусково-однорідних анізотропних тіл з тонкими неоднорідностями структури. Зазначимо, що вплив модельованої абсолютно жорстким включенням чи тріщиною межі однорідного анізотропного тіла на збіжність методу прямого вирізування і його достовірність було проаналізовано у [3, 4]. Тому тут без зменшення загальності вивчатимемо вплив модельованої абсолютно жорстким включенням чи тріщиною межі тіла у нижньому півпросторі на напружений стан верхнього тіла.

**Приклад 2.** Дослідимо анізотропний півпростір  $S_1$  із симетрично навантаженою зусиллями  $\tau_1^{\text{in},1}$  тріщиною  $L_{1,1}$  довжини  $2a_1^1$ , що підкріплений жорстко закріпленим на протилежній межі шаром  $S_2$  висоти  $H = 0.5a_1^1$ . Тріщина паралельна до межі поділу матеріалів ( $\varphi_1^1 = 0$ ) і розміщена на відносній віддалі  $d = y_{01}^1/a_1^1 = 0.5$  від неї (ліва частина рис. 3).

Застосуємо метод прямого вирізування для дослідження цієї задачі. Розглянемо анізотропний кусково-однорідний простір із так само розміщеною і навантаженою тріщиною  $L_{1,1}$  у півпросторі  $S_1$ , яку моделюємо податливим включенням з фізико-механічними характеристиками з *прикладу 1*. Додатково розмістимо у нижньому півпросторі  $S_2$  довге абсолютно жорстке включення  $L_{1,2}$  (права частина рис. 3). Його моделюватимемо ізотропним дуже жорстким пружним включенням з координатами центру  $(0, -H)$ , кутом нахилу  $\varphi_1^2 = 0$  та такими характеристиками: відносною довжиною  $a_1^2/a_1^1 = a$ , товщиною  $h_1^2 = 0.01a_1^1$  і пружними сталими  $a_{44,1}^{\text{in},2} = a_{55,1}^{\text{in},2} = 10^{-6}a_{55}^1$ ,  $a_{45,1}^{\text{in},2} = 0$ . Пружні сталі матеріалів  $S_1$  та  $S_2$ , як і в попередньому прикладі, нормуємо значенням  $a_{55}^1$ .

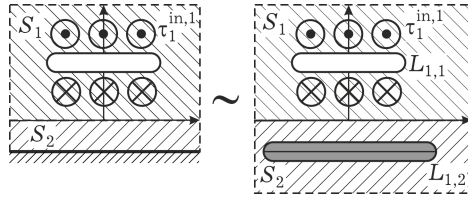


Рис. 3

Дослідимо залежність УКІН від пружних сталих матеріалів, коли  $S_1$  – ортотропний півпростір, а  $S_2$  – ізотропний шар. Компоненти пружних сталей для  $S_2$  мають такі відносні значення:  $a_{44}^2/a_{55}^1 = 1$ ,  $a_{45}^2/a_{55}^1 = 0$ ,  $a_{55}^2/a_{55}^1 = 1$ . Розглянемо ізотропний матеріал

$$(I) \quad a_{44}^1/a_{55}^1 = 1, \quad a_{45}^1/a_{55}^1 = 0$$

і два ортотропні випадки матеріалу півпростору  $S_1$ :

$$(II) \quad a_{44}^1/a_{55}^1 = 0.5, \quad a_{45}^1/a_{55}^1 = 0;$$

$$(III) \quad a_{44}^1/a_{55}^1 = 2, \quad a_{45}^1/a_{55}^1 = 0.$$

Також дослідимо випадки, коли  $S_1$  – ізотропний півпростір, а  $S_2$  – ортотропний шар. У цьому разі компоненти пружних сталей  $S_1$  мають такі значення:  $a_{44}^1/a_{55}^1 = 1$ ,  $a_{45}^1/a_{55}^1 = 0$ . Для шару  $S_2$  дослідимо випадки чотирьох ортотропних матеріалів з такими характеристиками:

$$(IV) \quad a_{44}^2/a_{55}^1 = 0.5, \quad a_{55}^2/a_{55}^1 = 1, \quad a_{45}^2/a_{55}^1 = 0;$$

$$(V) \quad a_{44}^2/a_{55}^1 = 2, \quad a_{55}^2/a_{55}^1 = 1, \quad a_{45}^2/a_{55}^1 = 0;$$

$$(VI) \quad a_{44}^2/a_{55}^1 = 1, \quad a_{55}^2/a_{55}^1 = 0.5, \quad a_{45}^2/a_{55}^1 = 0;$$

$$(VII) \quad a_{44}^2/a_{55}^1 = 1, \quad a_{55}^2/a_{55}^1 = 2, \quad a_{45}^2/a_{55}^1 = 0.$$

У табл. 1 подано розраховані значення УКІН  $K_{3,1}^0$  тріщини для семи наведених вище співвідношень матеріалів півпростору і шару та шести подвоєваних значень в діапазоні  $[0.5, 16]$  відносної довжини  $a$  жорсткого включення  $L_{1,2}$ , що моделює жорстко защемлену межу підкріплювального шару.

Таблиця 1

$a$	0.5	1	2	4	8	16
(I)	0.999	0.994	0.965	0.936	0.927	0.925
(II)	1.041	1.034	0.988	0.951	0.939	0.936
(III)	0.978	0.976	0.959	0.939	0.931	0.929
(IV)	0.970	0.965	0.930	0.905	0.898	0.896
(V)	1.032	1.029	1.008	0.981	0.969	0.966
(VI)	0.970	0.968	0.951	0.931	0.923	0.921
(VII)	1.032	1.025	0.979	0.942	0.930	0.927

Спостерігаємо, що для всіх розглянутих матеріалів УКІН  $K_{3,1}^0$  зі збільшенням відносної довжини  $a$  збігаються до конкретних значень з похибкою, меншою від 1%.

Для ізотропного випадку (матеріал (I)) УКІН для  $a = 16$  збігається з отриманими значеннями КІН для навантаженої тріщини в ізотропному півпросторі з жорстко защемленою межею  $[2, 5, 8]$ .

У випадку дослідження системи ізотропний півпростір – ортотропний шар (матеріали **(IV)**–**(VII)**) спостерігаємо практичний збіг УКІН тріщини  $L_{1,1}$  для матеріалів **(IV)** і **(VI)** та **(V)** і **(VII)** у випадку  $a = 0.5$ , оскільки жорстке включення малої довжини за такої відстані дає незначний внесок у напружений стан верхнього півпростору. Тому фактично розглядаємо поздовжній зсув тріщини  $L_{1,1}$  в кусково-однорідному просторі, де, у свою чергу,  $(r_0)^2 = 0.5$  для матеріалів **(IV)** і **(VI)**, а для матеріалів **(V)** і **(VII)** –  $(r_0)^2 = 2$ , а отже, й напружений стан в околі вершини тріщини  $L_{1,1}$  однаковий. Зі збільшенням довжини включення  $L_{1,2}$  його внесок у напружений стан верхнього півпростору збільшується.

**Висновки.** Досліджено задачу поздовжнього зсуву анізотропного біматеріалу з тонкими стрічковими анізотропними включеннями у кожному з півпросторів. У явному вигляді записано формули залежності його напружено-деформованого стану стосовно функцій стрибків. Задачу зведено до системи сингулярних інтегральних рівнянь, яку для окремих прикладів розв'язано методом колокацій. Для випадку наявності неоднорідностей лише в одній із півплощин підтверджено залежність їхніх УКІН лише від конкретної лінійної комбінації пружних сталей другого півпростору.

Раніше розроблений метод прямого вирізування задачі антиплоского зсуву для ізотропних матеріалів поширено на випадок дослідження напружено-деформованого стану кусково-однорідних анізотропних тіл із тонкими внутрішніми включеннями. Його апробацію здійснено на прикладі дослідження поздовжнього зсуву ортотропного півпростору з навантаженою тріщиною (півпростір підкріплений жорстко зацмеленим на протилежній межі ортотропним шаром). Результати обчислення УКІН у граничних випадках з похибкою, меншою ніж 1%, збігаються з відомими з літератури.

Вихідні коди застосованих у роботі програм можна знайти за адресою

<https://github.com/kyryl-vasiliev/modeiii-bimaterial-inclusions>.

1. Аюбян В. Н. Смешанные граничные задачи о взаимодействии сплошных деформируемых тел с концентраторами напряжений различных типов. – Ереван: Гитутюн НАН РА, 2014. – 322 с.
2. Васильев К. В., Сулим Г. Т. Метод прямого вирізування у задачах кусково-однорідних тіл з міжфазними тріщинами за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2016. – **59**, № 4. – С. 44–57.  
Te same: Vasil'ev K. V., Sulym H. T. Method of direct cutting-out in the problems of piecewise homogeneous bodies with interface cracks under longitudinal shear // *J. Math. Sci.* – 2019. – **238**, No. 1. – P. 46–62.  
<https://doi.org/10.1007/s10958-019-04217-w>.
3. Васильев К. В., Сулим Г. Т. Метод прямого вирізування у задачах пружної рівноваги анізотропних тіл з тріщинами за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2018. – **61**, № 3. – С. 89–100.  
Te same: Vasil'ev K. V., Sulym H. T. Method of direct cutting-out in the problems of elastic equilibrium of anisotropic bodies with cracks under longitudinal shear // *J. Math. Sci.* – 2021. – **254**, No. 1. – P. 103–116.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05291-9>.
4. Васильев К. В., Сулим Г. Т. Метод прямого вирізування у моделюванні ортотропних тіл з тонкими пружними включеннями за поздовжнього зсуву // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 3. – С. 55–68.
5. Васильев К. В., Сулим Г. Т. Прямий метод вирізування для моделювання напружено-деформованого стану ізотропних шаруватих середовищ з тонкими неоднорідностями за антиплоского деформування // *Машинознавство.* – 2006. – № 11–12. – С. 10–17.
6. Лехницький С. Г. Анизотропные пластинки. – Москва: Гостехиздат, 1957. – 464 с.  
Te same: Lekhnitskii S. G. Anisotropic plates. – New York etc.: Gordon and Breach Sci. Pub., 1968. – xvi+534 p.

7. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.  
Te same: *Muskhelishvili N. I.* Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1977. – xxxi+732 p.
8. *Сулъм Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
9. *Сулъм Г. Т., Шевчук С. П.* Поздовжній зсув шаруватих анізотропних середовищ зі стрічковими неоднорідностями // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 1998. – **41**, № 3. – С. 90–97.  
Te same: *Sulym H. T., Shevchuk S. P.* Longitudinal shear of layered anisotropic media with band-type inhomogeneities // *J. Math. Sci.* – 2001. – **104**, No. 5. – P. 1506–1514. – <https://doi.org/10.1023/A:1011383619315>.
10. *Kondo T., Kobayashi M., Sekine H.* The flat inclusion problem in bonded dissimilar anisotropic elastic media under longitudinal shear loading // *Acta Mechanica.* – 1997. – **121**, No. 1-4. – P. 131–142. – <https://doi.org/10.1007/BF01262527>.
11. *Kozinov S., Loboda V.* Literature review on cracks located at the interface of dissimilar materials (Interface cracks) // *Kozinov S., Loboda V.* Fracture mechanics of electrically passive and active composites with periodic cracking along the interface. – Cham: Springer, 2020. – Ser.: Springer Tracts in Mechanical Engineering. – P. 1–11. – [https://doi.org/10.1007/978-3-030-43138-9\\_1](https://doi.org/10.1007/978-3-030-43138-9_1).
12. *Liu Y. W.* Antiplane problems of periodical rigid line inclusions between dissimilar anisotropic materials // *Appl. Math. Mech.* – 2001. – **22**, No. 10. – P. 1149–1154. – <https://doi.org/10.1023/A:1016341132522>.
13. *Sulym G., Shevchuk S.* Antiplane problem for anisotropic layered media with thin elastic inclusions under concentrated forces and screw dislocations // *J. Theor. Appl. Mech.* – 1999. – **37**, No. 1. – P. 47–63.
14. *Suo Z.* Singularities, interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media // *Proc. Roy. Soc. London. A.* – 1990. – **427**. – P. 331–358. – <http://doi.org/10.1098/rspa.1990.0016>.
15. *Ting T. C. T.* Anisotropic elasticity: theory and applications. – New York: Oxford Univ. Press, 1996. – xvii+570 p. – <https://doi.org/10.1093/oso/9780195074475.001.0001>.

#### ELASTIC EQUILIBRIUM OF ANISOTROPIC BIMATERIAL BODIES WITH THIN ELASTIC ANISOTROPIC INCLUSIONS UNDER LONGITUDINAL SHEAR

*The solution of the basic problem of longitudinal shear of anisotropic bimaterial with a system of thin internal ribbon anisotropic inhomogeneities in each of the half-spaces is constructed using the method of integral Fourier transforms, the method of jump functions and the method of conjugation of continua of different dimensions. On the example of reduction of the problem of longitudinal shear of an anisotropic two-layer structure with thin inhomogeneities to the basic problem, the previously developed method of direct cutting-out is tested. The influence of moduli of elasticity and particular geometrical parameters of problem on the generalized stress intensity factors is investigated.*

**Key words:** *anisotropy, orthotropy, bimaterial, antiplane deformation, thin inclusion, crack, two-layered structure, direct cutting-out method.*

Ин-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
11.06.21