

**ПРУЖНА РІВНОВАГА ПОРОЖНИСТОГО ЦИЛІНДРА СКІНЧЕНОЇ  
ДОВЖИНИ ЗА ОСЕСИМЕТРИЧНОГО СИЛОВОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

*Розвинуто методикою розв'язування осесиметричної задачі теорії пружності для порожнистого циліндра скінченної довжини за силового навантаження торців та внутрішньої і зовнішньої циліндричних поверхонь. З використанням безпосереднього інтегрування рівнянь рівноваги сформульовано допоміжні задачі для визначення компонент тензора напружень через єдину функцію, названу функцією Вігака. З використанням отриманих виразів рівняння суцільності зведено до ключового рівняння для визначальної функції, а систему вихідних крайових умов еквівалентно замінено інтегральними умовами. Побудовано повні системи власних та приєднаних функцій для подання розв'язку задачі у вигляді суперпозиції елементарної та самозрівноваженої складових. Розроблено методикою розв'язування ключового рівняння з відповідними інтегральними умовами для кожної зі складових. Для визначення самозрівноваженого розв'язку розроблено рекурентний алгоритм, який забезпечує повне відокремлення змінних у ключовому рівнянні. Побудований у такий спосіб розв'язок дає змогу точного аналізу напружень у пружних циліндрах з різними відношеннями довжини твірної до радіусу.*

**Ключові слова:** порожнистий циліндр скінченної довжини, метод безпосереднього інтегрування, аналітичний розв'язок, осесиметрична задача, функція Вігака.

**Вступ.** Осесиметрична задача про пружну рівновагу циліндрів скінченної довжини є класичною задачею механіки, яка понад століття привертає увагу дослідників як у контексті загального розвитку методів теорії пружності, так і щодо розв'язків конкретних інженерно-прикладних задач [4, 10, 14]. Огляди піонерських та сучасних досліджень стосовно побудови аналітичних та аналітично-числових розв'язків такого класу задач наведено в [3, 9, 14–17, 21 та ін.].

Загалом підходи до розв'язування осесиметричних задач теорії пружності та термопружності для скінчених суцільних та порожнистих циліндрів відповідають загальній схемі методів дослідження напружено-деформованого стану тіл із кутовими точками [4]. Особливістю такого класу задач є ускладнене задоволення повного набору крайових умов, заданих на різних гранях (частинах поверхні, відокремлених кутовими точками у двовимірному формулюванні чи ребрами – у тривимірному) поверхні тіл, що пов'язано з проблемами побудови ортогональних систем власних функцій та відокремлення змінних у ключових рівняннях [13]. Ці ускладнення вдається значною мірою подолати шляхом реалізації однієї з таких стратегій. Перша стратегія полягає у побудові (здебільшого з використанням потенціальних гармонічних чи бігармонічних функцій) загальних розв'язків ключових рівнянь відповідних задач, які володіють достатньою кількістю ступенів вільності для задоволення з потрібною точністю крайових умов, заданих на різних гранях обмежених тіл із кутовими точками. Таку стратегію реалізовано, зокрема, у методах перехресної суперпозиції [4, 14–16] та однорідних розв'язків [13]. Інша стратегія передбачає побудову розв'язків задач, які точно задовольняють повні набори крайових умов на всіх гранях розглянутого тіла та забезпечують задоволення ключових рівнянь із наперед заданою точністю. Така стратегія має свої переваги, зокрема, при використанні отриманих розв'язків з метою розв'язання обернених та оптимізаційних задач для тіл із кутовими точками [1, 8]. Цю стратегію реалізовано, зокрема, у методі безпосереднього інтегрування, запропонованому В. М. Вігаком [2, 5]. У статті [21] цей метод використано стосовно побудови аналітично-

✉ yuzvyaky@ukr.net

числового розв'язку осесиметричної задачі термопружності для скінченного порожнистого циліндра з вільною поверхнею. З використанням інтегрування рівнянь рівноваги сформульовану задачу було зведено до ключового рівняння з відповідними інтегральними умовами для єдиної визначальної функції, названої функцією Вігака [11, 12].

У цій статті методику [21] поширено на випадок задачі про пружну рівновагу порожнистого циліндра скінченної довжини, торці та циліндричні поверхні якого зазнають силового навантаження. Рівняння рівноваги вихідної осесиметричної задачі використано для формулювання допоміжних задач, метою яких є визначення

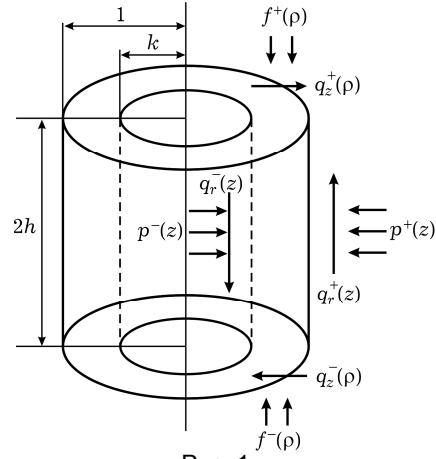


Рис. 1

шуканих компонент тензора напружень через функцію Вігака з урахуванням неоднорідних крайових умов. Функцію Вігака подано у вигляді розвинень у ряди за повними системами власних та приєднаних функцій за радіальною та осьювою координатами, які виділяють складові, що відповідають самозрівноваженим та несамозрівноваженим складовим силовим навантаженням, заданих на поверхні циліндра. Розроблено методику побудови елементарних розв'язків задачі, що відповідають головному вектору та моменту заданих силових навантажень. Для визначення самозрівноважених напружень запропоновано послідовний алгоритм, що дає змогу повного відокремлення змінних у ключових рівняннях. Показано ефективність використання такого підходу при дослідженні напруженого стану порожнистого циліндра, зокрема, в околі кутових точок.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо осесиметричну задачу теорії пружності для порожнистого циліндра довжини  $2L$  та внутрішнього і зовнішнього радіусів  $R_1$  і  $R_2$  відповідно. У циліндричній системі координат  $(\rho, \theta, z)$  циліндр займає область з осьовим перерізом  $C = \{(\rho, z) \in [k, 1] \times [-h, h]\}$  (рис. 1). Тут  $\{\rho, z, h, k\} = \{r, \zeta, L, R_1\} / R_2$ ,  $r \in [R_1, R_2]$ ,  $\zeta \in [-L, L]$  – розмірні радіальна та осьова координати. В рамках цієї задачі за відсутності масових сил чотири компоненти тензора напружень  $\sigma_j$ ,  $j = \{r, \theta, z\}$ ,  $\sigma_{rz}$  в області  $C$  задовольняють рівняння рівноваги [6, 7]

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r(\rho, z)) + \rho \frac{\partial \sigma_{rz}(\rho, z)}{\partial z} = \sigma(\rho, z), \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho \sigma_{rz}(\rho, z)) + \rho \frac{\partial \sigma_z(\rho, z)}{\partial z} = 0, \quad (\rho, z) \in C, \quad (2)$$

та рівняння суцільності в напруженнях

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma_\theta(\rho, z) - \nu(\sigma_r(\rho, z) + \sigma_z(\rho, z))) + (1 + \nu)(\sigma_\theta(\rho, z) - \sigma_r(\rho, z)) = 0, \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\sigma_\theta(\rho, z) - \nu(\sigma_r(\rho, z) + \sigma_z(\rho, z))) - 2(1 + \nu) \frac{\partial \sigma_{rz}(\rho, z)}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma_z(\rho, z) - \nu \sigma(\rho, z)) = 0, \quad (\rho, z) \in C. \quad (4)$$

Тут  $\sigma = \sigma_r + \sigma_\theta$  – сумарні напруження. На внутрішній та зовнішній циліндричних поверхнях (сторонах  $\rho = k, 1$ ,  $z \in [-h, h]$  області  $C$ ) задано силові навантаження, описані такими крайовими умовами:

$$\sigma_r(k, z) = -p^-(z), \quad \sigma_r(1, z) = -p^+(z), \quad (5)$$

$$\sigma_{rz}(k, z) = q_r^-(z), \quad \sigma_{rz}(1, z) = q_r^+(z). \quad (6)$$

На торцях циліндра (сторонах  $z = \pm h$ ,  $\rho \in [k, 1]$  області  $\mathcal{C}$ ) задано умови

$$\sigma_z(\rho, \pm h) = -f^\pm(\rho), \quad (7)$$

$$\sigma_{rz}(\rho, \pm h) = q_z^\pm(\rho). \quad (8)$$

Тут  $p^\pm(z)$ ,  $q_r^\pm(z)$ ,  $f^\pm(\rho)$  та  $q_z^\pm(\rho)$  – задані функції своїх аргументів, які повинні задовольняти умови рівноваги [3], необхідні для існування розв'язку задачі [3]. Ці умови будуть отримані та обґрунтовані нижче шляхом коректного інтегрування рівнянь рівноваги (1), (2) з урахуванням локальних крайових умов (5)–(8).

Із використанням рівняння рівноваги (1) та крайових умов (6) на внутрішній та зовнішній циліндричних поверхнях циліндра отримаємо умови

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r(\rho, z)) \Big|_{\rho=\rho_0} - \frac{1}{\rho_0} \sigma(\rho_0, z) = -\frac{dq_r^\omega(z)}{dz}, \quad (\rho_0, \omega) = \left\{ \begin{array}{l} (k, -) \\ (k, +) \end{array} \right\}. \quad (9)$$

З рівняння (2) та умов (8) на торцях циліндра отримаємо

$$\frac{\partial \sigma_z(\rho, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm h} = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^\pm(\rho)). \quad (10)$$

Умови (9), (10) пов'язують нормальні компоненти тензора напружень на плоских та циліндричних поверхнях циліндра та задані дотичні навантаження з виконанням умов рівноваги у сенсі рівнянь (1), (2).

Побудуємо розв'язок поставленої задачі (1)–(8) з використанням методики [21]. Процес розв'язання задачі включатиме такі етапи: сформулюємо допоміжні задачі для визначення компонент тензора напружень через єдину функцію; зведемо систему локальних крайових умов до інтегральних умов на визначальну функцію; встановимо на основі рівнянь суцільності ключові рівняння для визначальної функції; розробимо методику розв'язання ключового рівняння з відповідними інтегральними умовами.

## 2. Визначення напружень через функцію Вігака.

**2.1. Формулювання допоміжних задач для визначення компонент тензора напружень через функцію Вігака.** Розглянемо умови розв'язності рівнянь рівноваги (1), (2). Продиференціювавши рівняння (1) та (2) за радіальною та осью координатами відповідно, визначимо з них змішану похідну від дотичних напружень. У результаті одержимо рівності

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\rho, z) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r(\rho, z)) - \sigma(\rho, z) \right) = \\ &= \frac{\partial^2 \sigma_z(\rho, z)}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} (\rho \sigma_{rz}(\rho, z)), \end{aligned} \quad (11)$$

виконання яких забезпечує задоволення рівнянь рівноваги (1), (2). Введена в такий спосіб функція  $\mathcal{V}(\rho, z)$  є функцією Вігака [11, 12] розглянутої осесиметричної задачі (1)–(8).

На основі рівностей (11) з урахуванням відповідних крайових умов (5)–(10) сформулюємо три окремі допоміжні задачі.

**Задача 1** полягає у визначенні осьових напружень через функцію Вігака шляхом розв'язання рівняння

$$\frac{\partial^2 \sigma_z(\rho, z)}{\partial z^2} = \mathcal{V}(\rho, z) \quad (12)$$

з урахуванням крайових умов (7), (10).

**Задача 2** полягає у визначенні дотичних напружень  $\sigma_{rz}(\rho, z)$  через функцію  $\mathcal{V}(\rho, z)$  на основі рівняння

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho \partial z} (\rho \sigma_{rz}(\rho, z)) = -\rho \mathcal{V}(\rho, z) \quad (13)$$

з умовами (6), (8).

**Задача 3** стосується розв'язання рівняння

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r(\rho, z)) - \sigma(\rho, z) \right) = \rho \mathcal{V}(\rho, z) \quad (14)$$

відносно радіальних напружень за виконання умов (5), (9).

Розв'язання **задач 1–3** забезпечить визначення компонент тензора напружень через функцію Вігака, яку, у свою чергу, буде знайдено з використанням рівнянь суцільності (3), (4) та рівностей (11).

**2.2. Розв'язання допоміжної задачі 1.** Інтегрування рівняння (12) по  $z$  від  $-h$  до  $h$  з урахуванням умов (10) приводить до рівності

$$2 \frac{\partial \sigma_z(\rho, z)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho(q_z^+(\rho) + q_z^-(\rho))) + \int_{-h}^h \mathcal{V}(\rho, \zeta) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta, \quad (15)$$

з якої при  $z = \pm h$  випливає інтегральна умова для функції Вігака

$$\int_{-h}^h \mathcal{V}(\rho, z) dz = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho(q_z^-(\rho) - q_z^+(\rho))). \quad (16)$$

Інтегрування цієї умови за радіальною координатою приводить до рівності

$$\begin{aligned} \iint_C \eta \mathcal{V}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta dz &= 2\rho(q_z^-(\rho) - q_z^+(\rho)) + \\ &+ q_z^+(1) - q_z^-(1) + k(q_z^+(k) - q_z^-(k)), \end{aligned} \quad (17)$$

з якої при  $\rho = k, 1$  випливає інтегральна умова

$$\iint_C \rho \mathcal{V}(\rho, z) d\rho dz = k(q_z^+(k) - q_z^-(k)) - q_z^+(1) + q_z^-(1). \quad (18)$$

Проінтегруємо рівність (15) за осьовою координатою з урахуванням умов (7), звідки отримаємо вираз

$$\begin{aligned} 2\sigma_z(\rho, z) &= -f^+(\rho) - f^-(\rho) - \frac{z}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho(q_z^+(\rho) + q_z^-(\rho))) + \\ &+ \frac{h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho(q_z^+(\rho) - q_z^-(\rho))) + \int_{-h}^h \mathcal{V}(\rho, \zeta) |z - \zeta| d\zeta. \end{aligned} \quad (19)$$

При  $z = \pm h$  з (19) знаходимо другу інтегральну умову для функції Вігака

$$\int_{-h}^h z \mathcal{V}(\rho, z) dz = f^+(\rho) - f^-(\rho) - \frac{h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho(q_z^+(\rho) + q_z^-(\rho))). \quad (20)$$

Якщо проінтегрувати від  $k$  до 1 помножену на  $\rho$  рівність (20), нескладно отримати формулу

$$\begin{aligned} \iint_C \eta z \mathcal{V}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta dz &= \int_k^1 \eta (f^+(\eta) - f^-(\eta)) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \\ &- 2h\rho(q_z^+(\rho) + q_z^-(\rho)) + h(q_z^+(1) + q_z^-(1) + k(q_z^+(k) + q_z^-(k))), \end{aligned}$$

з якої при  $\rho = k, 1$  знаходимо інтегральну умову

$$\iint_C \rho z \mathcal{V}(\rho, z) d\rho dz = \int_k^1 \rho (f^+(\rho) - f^-(\rho)) d\rho - h(q_z^+(1) - kq_z^+(k) + q_z^-(1) - kq_z^-(k)). \quad (21)$$

У такий спосіб шляхом розв'язання **Задачі 1** отримано вираз (19) для осьових напружень через функцію Вігака. При цьому знайдено інтегральні умови (16), (18), (20), (21), які пов'язують визначальну функцію із заданими на поверхні циліндра силовими навантаженнями.

**2.3. Розв'язання допоміжної задачі 2.** У результаті інтегрування рівняння (13) по  $\rho$  від  $k$  до 1 з урахуванням умов (6) отримаємо вираз

$$2 \frac{\partial}{\partial z} (\rho \sigma_{rz}(\rho, z)) = \frac{d}{dz} (q_r^+(z) + kq_r^-(z)) - \int_k^1 \eta \mathcal{V}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta, \quad (22)$$

з якого при  $\rho = k, 1$  впливає інтегральна умова

$$\int_k^1 \rho \mathcal{V}(\rho, z) d\rho = k \frac{dq_r^-(z)}{dz} - \frac{dq_r^+(z)}{dz}. \quad (23)$$

Проінтегрувавши (23) за осьовою координатою, отримаємо рівність

$$\iint_C \rho \mathcal{V}(\rho, \zeta) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\rho d\zeta = 2(kq_r^-(z) - q_r^+(z)) + q_r^+(h) + q_r^+(-h) - k(q_r^-(h) + q_r^-(-h)),$$

з якої при  $z = \pm h$  впливає інтегральна умова

$$\iint_C \rho \mathcal{V}(\rho, z) d\rho dz = k(q_r^-(h) - q_r^-(-h)) - q_r^+(h) + q_r^+(-h) \quad (24)$$

Порівнявши (18) та (24), отримаємо умову погодження дотичних силових навантажень на ребрах циліндра

$$\begin{aligned} k(q_r^-(h) - q_r^-(-h)) - q_r^+(h) + q_r^+(-h) &= \\ &= k(q_z^+(k) - q_z^-(k)) + q_z^-(1) - q_z^+(1). \end{aligned} \quad (25)$$

У результаті інтегрування рівності (22) за змінною  $z$  з урахуванням умов (8), отримаємо вираз дотичних напружень через функцію Вігака:

$$\begin{aligned} 4\rho \sigma_{rz}(\rho, z) &= 2\rho(q_z^+(\rho) + q_z^-(\rho)) + 2(q_r^+(z) + kq_r^-(z)) - \\ &- q_r^+(h) - q_r^+(-h) - k(q_r^-(h) + q_r^-(-h)) - \\ &- \iint_C \eta \mathcal{V}(\eta, \zeta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (26)$$

звідки при  $z = \pm h$  впливає рівність

$$\begin{aligned} \iint_C \eta \mathcal{V}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta dz &= 2\rho(q_z^-(\rho) - q_z^+(\rho)) + \\ &+ q_r^+(h) - q_r^+(-h) + k(q_r^-(h) - q_r^-(-h)). \end{aligned} \quad (27)$$

Зіставлення (17) та (27) дає змогу записати таку умову погодження:

$$\begin{aligned} q_z^+(1) - q_z^-(1) + k(q_z^+(k) - q_z^-(k)) &= \\ &= q_r^+(h) - q_r^+(-h) + k(q_r^-(h) - q_r^-(-h)). \end{aligned} \quad (28)$$

Із формули (26) при  $\rho = 1$  та  $\rho = k$  впливають відповідно рівності

$$\iint_C \rho \mathcal{V}(\rho, \zeta) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\rho d\zeta = 2(kq_r^-(z) - q_r^+(z) + q_z^+(1) + q_z^-(1)) -$$

$$\begin{aligned}
& -q_r^+(h) - q_r^+(-h) - k(q_r^-(h) + q_r^-(-h)), \\
\iint_C \rho \mathcal{V}(\rho, \zeta) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\rho d\zeta &= 2(kq_r^-(z) - q_r^+(z)) + q_r^+(h) + q_r^+(-h) - \\
& - 2k(q_z^+(k) + q_z^-(k)) + k(q_r^-(h) + q_r^-(-h)),
\end{aligned}$$

одночасне виконання яких є можливим при умові

$$\begin{aligned}
q_r^+(h) + q_r^+(-h) + k(q_r^-(h) + q_r^-(-h)) &= \\
&= q_z^+(1) + q_z^-(1) + k(q_z^+(k) + q_z^-(k)). \tag{29}
\end{aligned}$$

Виконання умов (25), (28) та (29) забезпечується, якщо дотичні навантаження задовольняють умови погодження в кутових точках області  $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned}
q_z^+(1) = q_r^+(h) = \tau_{1,h}, \quad q_z^+(k) = q_r^-(h) = \tau_{k,h}, \\
q_z^-(k) = q_r^+(-h) = \tau_{k,-h}, \quad q_z^-(1) = q_r^+(-h) = \tau_{1,-h}, \tag{30}
\end{aligned}$$

де  $\tau_{1,\pm h}$ ,  $\tau_{k,\pm h}$  – деякі сталі значення у розмірності напружень.

Помноживши (23) на  $z$  та проінтегрувавши від  $-h$  до  $h$ , отримаємо рівність

$$\begin{aligned}
\iint_C \rho \zeta \mathcal{V}(\rho, \zeta) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\rho d\zeta &= \int_{-h}^h (q_r^+(\zeta) - kq_r^-(\zeta)) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta + \\
&+ h(q_r^+(h) - q_r^+(-h) - kq_r^-(h) + kq_r^-(-h)) - \\
&- 2z(q_r^+(z) - kq_r^-(z)),
\end{aligned}$$

з якої при  $z = \pm h$  випливає умова

$$\begin{aligned}
\iint_C \rho z \mathcal{V}(\rho, z) d\rho dz &= \int_{-h}^h (q_r^+(z) - kq_r^-(z)) dz + \\
&+ h(k(q_r^-(h) + q_r^-(-h)) - q_r^+(h) - q_r^+(-h)). \tag{31}
\end{aligned}$$

Зіставлення (21) з (31) приводить до умови для зовнішніх зусиль

$$\int_k^1 \rho (f^+(\rho) - f^-(\rho)) d\rho = \int_{-h}^h (q_r^+(z) - kq_r^-(z)) dz \tag{32}$$

та умови (30) погодження дотичних навантажень на ребрах циліндра.

У такий спосіб розв'язання допоміжної **задачі 2** дає змогу визначити дотичні напруження через функцію Вігака у вигляді (26) і встановити інтегральні умови (23), (24), (31), а також умови рівноваги для навантажень (32) та погодження дотичних навантажень у кутових точках області (30).

**2.4. Розв'язання допоміжної задачі 3.** У результаті інтегрування рівняння (14) з крайовими умовами (9) отримаємо рівність

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 \sigma_r(\rho, z)) &= \rho \sigma(\rho, z) - \frac{\rho}{2} \left( \frac{dq_r^+(z)}{dz} + k \frac{dq_r^-(z)}{dz} \right) + \\
&+ \frac{\rho}{2} \int_k^1 \eta \mathcal{V}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta, \tag{33}
\end{aligned}$$

з якої при  $\rho = k, 1$  випливає умова (16). Проінтегрувавши (33) за радіальною координатою з урахуванням умов (5), отримаємо вираз

$$2\rho^2 \sigma_r(\rho, z) = -p^+(z) - k^2 p^-(z) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1 - \rho^2}{2} \frac{dq_r^+(z)}{dz} + k \frac{k^2 - \rho^2}{2} \frac{dq_r^-(z)}{dz} + \\
& + \int_k^1 \eta \left( \sigma(\eta, z) + \frac{\rho^2 - \eta^2}{2} \mathcal{V}(\eta, z) \right) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta. \quad (34)
\end{aligned}$$

Підпорядкування виразу (34) умовам (5) означає виконання інтегральної умови для сумарних напружень

$$\begin{aligned}
\int_k^1 \rho \sigma(\rho, z) d\rho & = -p^+(z) + k^2 p^-(z) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{dq_r^+(z)}{dz} - \frac{k^3}{2} \frac{dq_r^-(z)}{dz} + \frac{1}{2} \int_k^1 \rho^3 \mathcal{V}(\rho, z) d\rho. \quad (35)
\end{aligned}$$

Для визначення окремо радіальних напружень через функцію Віака використаємо рівняння суцільності (3), яке з урахуванням рівняння рівноваги (1) запишемо у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \rho} (\sigma(\rho, z) - \nu \sigma_z(\rho, z)) + (1 + \nu) \frac{\partial \sigma_{rz}(\rho, z)}{\partial z} = 0.$$

Звідси за допомогою інтегрування за радіальною координатою отримаємо

$$\sigma(\rho, z) = \nu \sigma_z(\rho, z) - \frac{1 + \nu}{2} \int_k^1 \frac{\partial \sigma_{rz}(\rho, z)}{\partial z} \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \varphi(z), \quad (36)$$

де  $\varphi(z)$  – довільна функція змінної  $z$ . З урахуванням виразів для осьових та дотичних напружень (19), (26) формула (36) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
\sigma(\rho, z) & = -\frac{1 + \nu}{2} \left( \ln \rho \frac{dq_r^+(z)}{dz} + k \ln \frac{\rho}{k} \frac{dq_r^-(z)}{dz} \right) - \\
& - \frac{\nu}{2} \left( f^+(\rho) + f^-(\rho) + \frac{z - h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^+(\rho)) + \right. \\
& \left. + \frac{z + h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^-(\rho)) \right) + \frac{\nu}{2} \int_{-h}^h \mathcal{V}(\rho, \zeta) |z - \zeta| d\zeta + \\
& + \frac{1 + \nu}{2} \int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} \mathcal{V}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \varphi(z). \quad (37)
\end{aligned}$$

Невідому функцію інтегрування  $\varphi(z)$  знайдемо з інтегральної умови (35). У результаті вираз (37) набуде вигляду

$$\begin{aligned}
\sigma(\rho, z) & = -\frac{2}{1 - k^2} (p^+(z) - k^2 p^-(z)) + \\
& + \frac{\nu}{1 - k^2} \int_{-h}^h (q_r^+(\zeta) - k q_r^-(\zeta)) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta - \\
& - \frac{\nu}{2} \left( f^+(\rho) + f^-(\rho) - \frac{\nu}{1 - k^2} \int_k^1 \rho (f^+(\rho) + f^-(\rho)) d\rho \right) - \\
& - \frac{\nu}{2} \frac{z - h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^+(\rho)) - \frac{\nu}{2} \frac{z + h}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho q_z^-(\rho)) + \\
& + \frac{1}{2} \frac{dq_r^+(z)}{dz} \left( \frac{1 - \nu}{1 - k^2} - (1 + \nu) \ln \rho \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{k}{2} \frac{dq_r^-(z)}{dz} \left( \frac{(1-\nu)k^2}{1-k^2} + (1+\nu) \left( \ln \rho + \frac{2k^2}{1-k^2} \ln k \right) \right) + \\
& + \frac{\nu}{2} \int_{-h}^h \mathcal{V}(\rho, \zeta) |z - \zeta| d\zeta + \frac{1-\nu}{2(1-k^2)} \int_k^1 \rho^3 \mathcal{V}(\rho, z) d\rho + \\
& + \frac{1+\nu}{2} \left( \int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} \mathcal{V}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \right. \\
& \left. + \frac{1+k^2}{1-k^2} \int_k^1 \rho \ln \rho \mathcal{V}(\rho, z) d\rho \right). \tag{38}
\end{aligned}$$

З урахуванням (34), (38) радіальні напруження остаточно визначатимуться за формулою

$$\begin{aligned}
2\rho^2 \sigma_r(\rho, z) = & -2 \frac{\rho^2 - k^2}{1-k^2} p^+(z) - 2k^2 \frac{1-\rho^2}{1-k^2} p^-(z) + \\
& + \frac{dq_r^+(z)}{dz} \left( \frac{1-\nu}{4} \frac{\rho^2(1+k^2) - 2k^2}{1-k^2} - \frac{1+\nu}{2} \rho^2 \ln \rho \right) - \\
& - k \frac{dq_r^-(z)}{dz} \left( \frac{1-\nu}{4} \frac{\rho^2(1+k^2) - 2k^2}{1-k^2} + \right. \\
& \left. + \frac{1+\nu}{2} \left( \rho^2 \ln \rho - \ln k \frac{2k^2(1-\rho^2)}{1-k^2} \right) \right) + \\
& + \frac{\nu}{2} \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1-k^2} \int_{-h}^h (q_r^+(\zeta) - kq_r^-(\zeta)) \operatorname{sgn}(z - \zeta) d\zeta - \\
& - \frac{\nu}{2} \left( \int_k^1 \eta (f^+(\eta) + f^-(\eta)) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \right. \\
& \left. - \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1-k^2} \int_k^1 \rho (f^+(\rho) + f^-(\rho)) d\rho \right) - \\
& - \nu(z-h)\rho q_z^+(\rho) - \nu(z+h)\rho q_z^-(\rho) + \\
& + \frac{\nu}{2} ((z-h)q_z^+(1) + (z+h)q_z^-(1)) + \\
& + k \frac{\nu}{2} ((z-h)q_z^+(k) + (z+h)q_z^-(k)) + \\
& + \frac{\nu}{2} \iint_c \eta \mathcal{V}(\eta, \zeta) |z - \zeta| \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta d\zeta + \\
& + \frac{1+\nu}{2} \left( \rho^2 \int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} \mathcal{V}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \right. \\
& \left. + \frac{\rho^2(1+k^2) - 2k^2}{1-k^2} \int_k^1 \rho \ln \rho \mathcal{V}(\rho, z) d\rho \right) + \\
& + \frac{1-\nu}{4} \left( \int_k^1 \eta (\rho^2 - \eta^2) \mathcal{V}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \right.
\end{aligned}$$



$$\left. + \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1 - k^2} \int_k^1 \rho^3 \mathcal{V}(\rho, z) d\rho \right). \quad (39)$$

Вираз (39) визначає радіальні напруження через функцію  $\mathcal{V}(\rho, z)$ . З урахуванням формули  $\sigma_\theta = \sigma - \sigma_r$  та (38), (39) отримуємо вираз колових напружень через функцію Вігака.

**3. Ключове рівняння для функції Вігака.** Для визначення невідомої функції  $\mathcal{V}(\rho, z)$  підставимо вирази (19), (26), (38), (39) в рівняння суцільності (4). У результаті отримуємо ключове інтегро-диференціальне рівняння

$$\begin{aligned} & \int_k^1 \frac{\eta}{4} \left( \rho^2 \ln \frac{\rho}{\eta} - \frac{\rho^2 - \eta^2}{2} \right) \frac{\partial^2 \mathcal{V}(\eta, z)}{\partial z^2} \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \\ & + \int_k^1 \eta \mathcal{V}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-h}^h \mathcal{V}(\rho, \zeta) |z - \zeta| d\zeta + \\ & + \frac{1}{4(1 - k^2)} \left( \frac{1 - \nu}{1 + \nu} \rho^2 + \frac{1 + k^2}{2} \right) \int_k^1 \rho^3 \frac{\partial^2 \mathcal{V}(\rho, z)}{\partial z^2} d\rho + \\ & + \frac{1}{2(1 - k^2)} \left( \frac{1 + k^2}{2} \rho^2 + \frac{1 + \nu}{1 - \nu} k^2 \right) \int_k^1 \rho \ln \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}(\rho, z)}{\partial z^2} d\rho - \\ & - \frac{(1 - \nu)\rho^2 + (1 + \nu)k^2}{(1 - \nu^2)(1 - k^2)} \frac{d^2 p^+(z)}{dz^2} + \\ & + k^2 \frac{(1 - \nu)\rho^2 + 1 + \nu^2}{(1 - \nu^2)(1 - k^2)} \frac{d^2 p^-(z)}{dz^2} - \\ & - \left( 2 \ln \rho - \frac{3 - \nu - (1 + \nu)k^2 + 2(1 + \nu)k^2}{(1 + \nu)(1 - k^2)} \right) \frac{\rho^2}{8} \frac{d^3 q_r^+(z)}{dz^3} - \\ & - \left( \frac{\rho^2 \ln \rho}{2} + \frac{(1 - \nu)\rho^2 + 1 + \nu}{(1 - \nu^2)(1 - k^2)} k^2 \ln k - \right. \\ & \left. - \frac{\rho^2(1 + \nu - (3 - \nu)k^2) - 2(1 + \nu)k^2}{4(1 + \nu)(1 - k^2)} \right) \frac{k}{2} \frac{d^3 q_r^-(z)}{dz^3} + \\ & + \frac{\nu(1 - \nu)\rho^2 - 1 + \nu^2 + (1 + \nu)k^2}{2(1 - \nu^2)(1 - k^2)} \frac{dq_r^+(z)}{dz} - \\ & - k \frac{\nu(1 - \nu)\rho^2 + 1 + \nu - (1 - \nu^2)k^2}{2(1 - \nu^2)(1 - k^2)} \frac{dq_r^-(z)}{dz} - \\ & - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{z - h}{2} \rho q_z^+(\rho) + \frac{z + h}{2} \rho q_z^-(\rho) \right) \right) - \\ & - \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} (f^+(\rho) + f^-(\rho)) = 0. \quad (40) \end{aligned}$$

Для знаходження розв'язку рівняння (40) потрібно застосувати адекватний спосіб відокремлення змінних, що передбачає використання відповідних повних систем функцій за радіальною та осьювою координатою.

**4. Розвинення функції Вігака за повними системами власних та приєднаних функцій.** Для відокремлення змінних у рівнянні (40) використовуємо повну ортогональну систему функцій за осьювою координатою  $\{1, z, \cos \gamma_n z, \sin \lambda_n z\}$ , де  $\gamma_n = n\pi / h$ ,  $\lambda_n > 0$  – корені трансцендентного рівняння

$\operatorname{tg} \lambda h = \lambda h$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Таку систему було використано при розв'язанні методом безпосереднього інтегрування плоских задач теорії пружності та термопружності для прямокутної області [19, 20]. У цій системі можна виокремити підсистеми власних  $\{\cos \gamma_n z, \sin \lambda_n z, n = 1, 2, \dots\}$  та приєднаних  $\{1, z\}$  функцій, які відповідають само- та несамозрівноваженим складовим сило-вих навантажень. Самозрівноважені складові мають нульові головний вектор та момент і згасають із віддаленням від навантаженої межі, а несамозрівноважені (так звані елементарні розв'язки) відповідають головному вектору та моменту прикладених навантажень. Таким чином, розвинення шуканих функцій за цією системою є узгодженим з принципом Сен-Венана.

Для розвинення розв'язку рівняння (40) у ряд за радіальною координатою використаємо систему [9, 16]  $\{1, U_0(s_m \rho)\}$ , де  $s_m > 0$  – корені рівняння  $U_1(sk) = 0$ ,  $U_j(sp) = Y_1(s)J_j(sp) - J_1(s)Y_j(sp)$ , а  $J_j(sp)$ ,  $Y_j(sp)$  – функції Бесселя першого і другого роду порядку  $j = 0, 1$ .

З урахуванням структури використовуваних повних систем подамо зовнішні навантаження у вигляді

$$\begin{aligned} p^\pm(z) &= p_0^\pm(z) + \tilde{p}^\pm(z), & q_r^\pm(z) &= q_{r,0}^\pm(z) + \tilde{q}_r^\pm(z), \\ f^\pm(\rho) &= f_0^\pm + \tilde{f}^\pm(\rho), & q_z^\pm(\rho) &= q_{z,0}^\pm(\rho) + \tilde{q}_z^\pm(\rho). \end{aligned} \quad (41)$$

Тут складові з нижнім індексом «0» відповідають головному вектору та моменту кожного з навантажень, а компоненти, позначені тильдами, – самозрівноваженим частинам навантажень, що задовольняють умови

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h \tilde{p}^\pm(z) dz &= \int_{-h}^h z \tilde{p}^\pm(z) dz = \int_k^1 \rho \tilde{f}^\pm(\rho) d\rho = 0, \\ \int_{-h}^h \tilde{q}_r^\pm(z) dz &= \tilde{q}_r^\pm(h) = \tilde{q}_r^\pm(-h) = \tilde{q}_z^\pm(k) = \tilde{q}_z^\pm(1) = 0. \end{aligned}$$

Вирази для складових виразів (41) наведено в **Додатку А**.

Із використанням уведених систем подамо функцію Вігака у вигляді

$$\mathcal{V}(\rho, z) = \mathcal{V}^0(\rho, z) + \mathcal{V}^e(\rho, z) + \tilde{\mathcal{V}}(\rho, z), \quad (42)$$

де

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^0(\rho, z) &= -\frac{1}{(1-k^2)h} (\tau_{1,h} - \tau_{1,-h} + k(\tau_{k,h} - \tau_{k,-h})) + \frac{3z}{2h^3} (f_0^+ - f_0^-) - \\ &\quad - \frac{3z}{(1-k^2)h^2} (\tau_{1,h} + \tau_{1,-h} - k(\tau_{k,h} + \tau_{k,-h})), \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^e(\rho, z) &= \frac{2}{1-k^2} \left( k \frac{d\tilde{q}_r^-(z)}{dz} - \frac{d\tilde{q}_r^+(z)}{dz} \right) + \\ &\quad + \frac{3z}{2h^3} \left( \tilde{f}^+(\rho) - \tilde{f}^-(\rho) - \frac{h}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho(\tilde{q}_z^+(\rho) + \tilde{q}_z^-(\rho)) \right) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2h\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho(\tilde{q}_z^+(\rho) - \tilde{q}_z^-(\rho)) \right), \end{aligned} \quad (44)$$

а складова  $\tilde{\mathcal{V}}(\rho, z)$  задовольняє однорідні інтегральні умови

$$\int_{-h}^h \tilde{\mathcal{V}}(\rho, z) dz = \int_{-h}^h z \tilde{\mathcal{V}}(\rho, z) dz = \int_k^1 \rho \tilde{\mathcal{V}}(\rho, z) d\rho = 0. \quad (45)$$

Складова (43) функції Вігака відповідає несамозрівноваженим частинам

зовнішніх навантажень (A.1), (A.3) зовнішніх силових навантажень (41).

Компоненти тензора напружень, розраховані за формулами (19), (26), (38), (39) за складовою визначальною функцією (44), наведено у *Додатку Б*. Розглянемо окремо побудову напружень, розрахованих за формулами (19), (26), (38), (39), що відповідають складовим  $\mathcal{V}^0(\rho, z)$  та  $\tilde{\mathcal{V}}(\rho, z)$ .

**5. Елементарні розв'язки.** Розглянемо побудову елементарних складових компонент тензора напружень, які позначені індексом «0» та відповідають функції (43). Після підстановки (43) в рівняння (40) з подальшим використанням (19), (26), (38), (39) отримаємо додаткові умови на зовнішні навантаження, а саме:

$$\begin{aligned}\tau_{k,h} - \tau_{k,-h} - k(\tau_{1,h} - \tau_{1,-h}) &= 0, \\ \tau_{k,h} + \tau_{k,-h} - k(\tau_{1,h} + \tau_{1,-h}) &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h (q_r^-(z) - kq_r^+(z)) dz, \\ \tau_{1,h} - \tau_{1,-h} - k(\tau_{k,h} - \tau_{k,-h}) &= 0, \\ \tau_{1,h} + \tau_{1,-h} - k(\tau_{k,h} + \tau_{k,-h}) &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h (q_r^+(z) - kq_r^-(z)) dz.\end{aligned}$$

Ці умови виконуються, якщо

$$\tau_{k,h} = \tau_{k,-h} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h q_r^-(z) dz = \tau_k, \quad \tau_{1,h} = \tau_{1,-h} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h q_r^+(z) dz = \tau_1. \quad (46)$$

З урахуванням умов (46) та формули (43) нескладно показати, що  $\mathcal{V}^0(\rho, z) \equiv 0$ . Тоді згідно з (19), (26), (38), (39) отримуємо такі елементарні розв'язки поставленої задачі:

$$\begin{aligned}\sigma_r^0(\rho, z) &= -\frac{1}{\rho^2} \frac{\rho^2 - k^2}{1 - k^2} p_0^+(z) - \frac{k^2}{\rho^2} \frac{1 - \rho^2}{1 - k^2} p_0^-(z), \\ \sigma_\theta^0(\rho, z) &= -\frac{1}{\rho^2} \frac{\rho^2 + k^2}{1 - k^2} p_0^+(z) + \frac{k^2}{\rho^2} \frac{1 + \rho^2}{1 - k^2} p_0^-(z), \\ \sigma_z^0(\rho, z) &= \sigma_z^0(z) = -\frac{1}{2h} ((h+z)f_0^+ + (h-z)f_0^-), \\ \sigma_{rz}^0(\rho, z) &= \sigma_{rz}^0(\rho) = \frac{k}{\rho} \frac{1 - \rho^2}{1 - k^2} \tau_k + \frac{1}{\rho} \frac{\rho^2 - k^2}{1 - k^2} \tau_1.\end{aligned} \quad (47)$$

Зауважимо, що вирази для елементарних частин радіальних та коло-вих напружень (47) збігаються з виразами для нульової гармоніки розвинень відповідних напружень у розв'язку плоскої задачі теорії пружності у кільцевій області (див. формули (21), (22) з [18]).

**6. Самозрівноважені розв'язки.** Для побудови напружень (19), (26), (38), (39), які відповідають складовій  $\tilde{\mathcal{V}}(\rho, z)$  виразу (42), що задовольняє умови самозрівноваженості (45), використаємо методику [21]. Невідому функцію  $\tilde{\mathcal{V}}(\rho, z)$  шукатимемо у вигляді функціонального ряду

$$\tilde{\mathcal{V}}(\rho, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{V}}^{(i)}(\rho, z), \quad (48)$$

члени якого для парних та непарних індексів визначимо різними виразами:

$$\tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)}(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) \cos \gamma_n z + R_{s,n}^{(2i-1)}(\rho) \sin \lambda_n z),$$

$$\tilde{\mathcal{V}}^{(2i)}(\rho, z) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(2i)}(z) U_0(s_m \rho). \quad (49)$$

При цьому складові  $\tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)}(\rho, z)$  є розв'язками рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \int_k^1 \eta \left( \left( 2 \ln \frac{\rho}{\eta} - 1 \right) \rho^2 + \eta^2 \right) \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)}(\eta, z)}{\partial z^2} \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \\ & + \int_k^1 \eta \tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \\ & + \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-h}^h \tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)}(\rho, \zeta) |z - \zeta| d\zeta + \\ & + \frac{1}{4(1-k^2)} \left( \frac{1-v}{1+v} \rho^2 + \frac{1+k^2}{2} \right) \int_k^1 \rho^3 \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)}(\rho, z)}{\partial z^2} d\rho + \\ & + \frac{1}{2(1-k^2)} \left( \frac{1+k^2}{2} \rho^2 + \frac{1+v}{1-v} k^2 \right) \int_k^1 \rho \ln \rho \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}^{(2i-1)}(\rho, z)}{\partial z^2} d\rho = \\ & = \rho \frac{\partial g^{(2i-1)}(\rho, z)}{\partial \rho} - \frac{\partial^2 g^{(2i-2)}(\rho, z)}{\partial z^2} + \\ & + \left[ \frac{(1-v^2)\rho^4 - \rho^2(1-v)(3+v - (1-v)k^2) - (3+v)(1+v)k^2}{8(1-v^2)(1-k^2)} \frac{d^3 \tilde{q}_r^+(z)}{dz^3} - \right. \\ & - k \frac{(1-v^2)\rho^4 - \rho^2(1-v)((3+v)k^2 - 1 + v) - (3+v)(1+v)k^2}{8(1-v^2)(1-k^2)} \frac{d^3 \tilde{q}_r^-(z)}{dz^3} \\ & - \frac{k}{2(1-k^2)} \left( \rho^2 \ln \rho + \frac{\rho^2(1-v) + 1+v}{(1-v)(1-k^2)} k^2 \ln k \right) \left( k \frac{d^3 \tilde{q}_r^+(z)}{dz^3} - \frac{d^3 \tilde{q}_r^-(z)}{dz^3} \right) + \\ & + \frac{(1-v)\rho^2 + (1+v)k^2}{(1-v^2)(1-k^2)} \frac{d^2 p^+(z)}{dz^2} - \frac{(1-v)\rho^2 + 1+v}{(1-v^2)(1-k^2)} k^2 \frac{d^2 p^-(z)}{dz^2} + \\ & + \frac{(1-v)(2+v)\rho^2 - (1+v)(2-v)k^2}{(1-v^2)(1-k^2)} \frac{d\tilde{q}_r^+(z)}{dz} - \\ & \left. - \frac{(1-v)(2+v)\rho^2 - (1+v)(2-v)k^2}{(1-v^2)(1-k^2)} k \frac{d\tilde{q}_r^-(z)}{dz} \right] \delta_{2i-1,1}, \quad (50) \end{aligned}$$

а складові  $\tilde{\mathcal{V}}^{(2i)}(\rho, z)$  – рівняння

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \int_k^1 \eta \left( \left( 2 \ln \frac{\rho}{\eta} - 1 \right) \rho^2 + \eta^2 \right) \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}^{(2i)}(\eta, z)}{\partial z^2} \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \\ & + \int_k^1 \eta \tilde{\mathcal{V}}^{(2i)}(\eta, z) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \\ & + \frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-h}^h \tilde{\mathcal{V}}^{(2i)}(\rho, \zeta) |z - \zeta| d\zeta + \\ & + \frac{1}{4(1-k^2)} \left( \frac{1-v}{1+v} \rho^2 + \frac{1+k^2}{2} \right) \int_k^1 \rho^3 \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}^{(2i)}(\rho, z)}{\partial z^2} d\rho + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2(1-k^2)} \left( \frac{1+k^2}{2} \rho^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} k^2 \right) \int_k^1 \rho \ln \rho \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{V}}^{(2i)}(\rho, z)}{\partial z^2} d\rho = \\
& = \frac{\partial^2 g^{(2i)}(\rho, z)}{\partial z^2} - \rho \frac{\partial g^{(2i-1)}(\rho, z)}{\partial \rho} - \\
& - \left( \frac{3z}{2h^3} \int_k^1 \eta (\tilde{f}^+(\eta) - \tilde{f}^-(\eta)) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \right. \\
& - \frac{\rho}{2} \frac{d}{d\rho} (\tilde{f}^+(\rho) + \tilde{f}^-(\rho)) - \frac{3h^2 - z^2}{4h^3} \rho z \frac{d}{d\rho} (\tilde{f}^+(\rho) - \tilde{f}^-(\rho)) - \\
& - \frac{z^2 - h^2}{4h^2} \rho \frac{d}{d\rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} ((z+h)\rho \tilde{q}_z^+(\rho) + (z-h)\rho \tilde{q}_z^-(\rho)) \right) - \\
& \left. - \frac{h+3z}{h^2} \rho \tilde{q}_z^+(\rho) + \frac{h-3z}{h^2} \rho \tilde{q}_z^-(\rho) \right) \delta_{i,1}. \tag{51}
\end{aligned}$$

Тут  $\delta_{k,j}$  – символ Кронекера,

$$\begin{aligned}
g^{(2i-1)}(\rho, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) \frac{\cos \gamma_n h}{\gamma_n^2} + z R_{s,n}^{(2i-1)}(\rho) \frac{\cos \lambda_n h}{\lambda_n} \right), \\
g^{(2i)}(\rho, z) &= \frac{\rho^2}{(1+\nu)(1-k^2)} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(2i)}(z) \frac{U_0(s_m) - k^2 U_0(s_m k)}{s_m^2} + \\
& + \frac{k^2}{(1-\nu)(1-k^2)} \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(2i)}(z) \frac{U_0(s_m) - U_0(s_m k)}{s_m^2}. \tag{52}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що згідно з поданнями (49), члени функціонального ряду (48) з непарними верхніми індексами  $2i-1$  тотожно задовольняють інтегральні умови (45) за осью координатою, а члени з парними індексами  $2i$  – за радіальною координатою. Це означає, що шукані коефіцієнти розвинень (49) повинні задовольняти інтегральні умови

$$\begin{aligned}
\int_k^1 \rho R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) d\rho &= \int_k^1 \rho R_{s,n}^{(2i-1)}(\rho) d\rho = 0, \\
\int_{-h}^h Z_m^{(2i)}(z) dz &= \int_{-h}^h z Z_m^{(2i)}(z) dz = 0. \tag{53}
\end{aligned}$$

Використовуючи повноту відповідних систем функцій та інтегральні умови (53), вирази (52) подамо в еквівалентному вигляді

$$\begin{aligned}
g^{(2i-1)}(\rho, z) &= \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m^{(2i-1)} + z \beta_m^{(2i-1)}) U_0(s_m \rho), \\
g^{(2i)}(\rho, z) &= \frac{k^2}{(1-\nu)(1-k^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{c,n}^{(2i)} \cos \gamma_n z + \alpha_{s,n}^{(2i)} \sin \lambda_n z) + \\
& + \frac{\rho^2}{(1+\nu)(1-k^2)} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{c,n}^{(2i)} \cos \gamma_n z + \beta_{s,n}^{(2i)} \sin \lambda_n z). \tag{54}
\end{aligned}$$

З урахуванням (54) та розвинень (A.2), (A.4) стає можливим відокремлення змінних у рівняннях (50), (51). Тоді для визначення невідомих коефіцієнтів розвинення отримаємо такі інтегро-диференціальні рівняння:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 Z_m^{(2i)}(z)}{dz^2} - 2s_m^2 Z_m^{(2i)}(z) + \frac{s_m^4}{2} \int_{-h}^h Z_m^{(2i)}(\zeta) |z - \zeta| d\zeta = \\
& = \left( -\frac{s_m^4 z^3}{4h^3} (f_m^+ - f_m^- - h(q_{z,m}^+ + q_{z,m}^-)) + \frac{s_m^4 z^2}{4h} (q_{z,m}^+ - q_{z,m}^-) + \right. \\
& + \frac{s_m^2 z}{4h^3} (3(f_m^+ - f_m^-)(s_m^2 h^2 + 4) - h(q_{z,m}^+ + q_{z,m}^-)(s_m^2 h^2 + 12)) + \\
& + \left. \frac{s_m^2}{4h} (2hs_m^2 (f_m^+ + f_m^-) - (q_{z,m}^+ - q_{z,m}^-)(s_m^2 h^2 + 4)) \right) \delta_{2i-1,1} - \\
& - s_m^4 (\alpha_m^{(2i-2)} + z\beta_m^{(2i-2)}), \\
& \frac{\gamma_n^4}{8} \int_k^1 \eta \left( \left( 2 \ln \frac{\rho}{\eta} - 1 \right) \rho^2 + \eta^2 \right) R_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \\
& - \gamma_n^2 \int_k^1 \eta R_{c,n}^{(2i-1)}(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \rho \frac{dR_{c,n}^{(2i-1)}(\rho)}{d\rho} + \\
& + \frac{\gamma_n^4}{4(1-k^2)} \left( \frac{1-v}{1+v} \rho^2 + \frac{1+k^2}{2} \right) \int_k^1 \rho^3 R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) d\rho + \\
& + \frac{\gamma_n^4}{2(1-k^2)} \left( \frac{1+k^2}{2} \rho^2 + \frac{1+v}{1-v} k^2 \right) \int_k^1 \rho \ln \rho R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) d\rho = \\
& = \left[ -\frac{\gamma_n^2 k \rho^2 \ln \rho}{2} (kq_{c,n}^+ - q_{c,n}^-) + \frac{\gamma_n^2 \rho^4}{8} (q_{c,n}^+ - kq_{c,n}^-) + \right. \\
& + \rho^2 \left( \frac{\gamma_n^2}{1+v} (p_{c,n}^+ - k^2 p_{c,n}^-) - \frac{\gamma_n^2 k^3 \ln k}{2(1-k^2)} (kq_{c,n}^+ - q_{c,n}^-) + \right. \\
& + \frac{\gamma_n^2 k^2 (1-v) - 8(2+v) - \gamma_n^2 (3+v)}{8(1+v)} q_{c,n}^+ + \\
& + \left. \frac{\gamma_n^2 k^2 (3+v) + 8(2+v) + \gamma_n^2 (1-v)}{8(1+v)} kq_{c,n}^- \right] - \\
& - \frac{\gamma_n^2 (3+v) - 8(2-v)}{8(1-v)} k^2 q_{c,n}^+ + \frac{\gamma_n^2 k^2 (3+v) - 8(2-v)}{8(1-v)} kq_{c,n}^- + \\
& + \frac{\gamma_n^2 k^2}{1-v} (p_{c,n}^+ - p_{c,n}^-) \left] \frac{\delta_{2i,1}}{1-k^2} - \\
& - \frac{\gamma_n^2 k^2}{(1-v)(1-k^2)} \alpha_{c,n}^{(2i-1)} - \frac{\gamma_n^2 \rho^2}{(1+v)(1-k^2)} \beta_{c,n}^{(2i-1)}. \quad (55)
\end{aligned}$$

Для  $R_{s,n}^{(2i)}(\rho)$  отримуємо рівняння, аналогічне до другого рівняння (55), де нижній індекс «с» потрібно замінити на «s» та  $\gamma$  на  $\lambda$ .

Розв'язок першого рівняння (55) при виконанні відповідних інтегральних умов (53) матиме вигляд

$$Z_m^{(2i)}(z) = \left( \alpha_m^{(2i-1)} - \frac{f_m^+ + f_m^-}{2} \delta_{i,1} \right) s^2 \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{(s_m h \operatorname{ch} s_m h - \operatorname{sh} s_m h) \operatorname{ch} s_m z - s_m z \operatorname{sh} s_m h \operatorname{sh} s_m z}{\Delta_{1m}} + \\
& + \frac{q_{z,m}^+ - q_{z,m}^-}{2} \left( s_m \frac{s_m h \operatorname{sh} s_m h - 2 \operatorname{ch} s_m h}{\Delta_{1m}} \operatorname{ch} s_m z - \right. \\
& \left. - s_m^2 \frac{z \operatorname{ch} s_m h \operatorname{sh} s_m z}{\Delta_{1m}} + \frac{1}{h} \right) \delta_{i,1} + \\
& + \left( h \beta_m^{(2i-1)} - \frac{f_m^+ - f_m^-}{2} \delta_{i,1} \right) \times \\
& \times \left( s_m^2 \frac{s_m h \operatorname{sh} s_m h - \operatorname{ch} s_m h}{\Delta_{2m}} \operatorname{sh} s_m z - \right. \\
& \left. - s_m^3 \frac{z \operatorname{ch} s_m h \operatorname{ch} s_m z}{\Delta_{2m}} + \frac{3z}{h^3} \right) - \\
& - \left( \beta_m^{(2i-1)} - \frac{q_{z,m}^+ + q_{z,m}^-}{2} \delta_{i,1} \right) \times \\
& \times \left( s_m \frac{s_m h \operatorname{ch} s_m h - 2 \operatorname{sh} s_m h}{\Delta_{2m}} \operatorname{sh} s_m z - \right. \\
& \left. - s_m^2 \frac{z \operatorname{sh} s_m h \operatorname{ch} s_m z}{\Delta_{2m}} + \frac{3z}{h^2} \right). \tag{56}
\end{aligned}$$

Тут  $\Delta_{\ell m} = \operatorname{ch} s_m h \operatorname{sh} s_m h + (-1)^{\ell+1} s_m h$ ,  $\ell = 1, 2$ . Формулу (56) можна записати в еквівалентному поданні:

$$Z_m^{(2i)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( Z_{c,n,m}^{(2i)} \cos \gamma_n z + Z_{s,n,m}^{(2i)} \sin \lambda_n z \right), \tag{57}$$

де

$$\begin{aligned}
Z_{c,n,m}^{(2i)} &= - \left[ (2\alpha_m^{(2i-1)} - (f_m^+ + f_m^-) \delta_{i,1}) \frac{2s_m \gamma_n^2 \operatorname{sh}^2 s_m h}{\Delta_{1m}} + \right. \\
& \left. + (q_{z,m}^+ - q_{z,m}^-) \delta_{i,1} \left( s_m^2 + 3\gamma_n^2 - \frac{2s_m \gamma_n^2 h}{\Delta_{1m}} \right) \right] \frac{s_m^2 \cos \gamma_n h}{h(\gamma_n^2 + s_m^2)^2}, \\
Z_{s,n,m}^{(2i)} &= - \left[ (2h\beta_m^{(2i-1)} - (f_m^+ - f_m^-) \delta_{i,1}) \left( 2\lambda_n^2 \frac{s_m h \operatorname{sh}^2 s_m h}{\Delta_{2m}} + s_m^2 - \lambda_n^2 \right) s_m + \right. \\
& \left. + ((q_{z,m}^+ + q_{z,m}^-) \delta_{i,1} - 2\beta_m^{(2i-1)}) \times \right. \\
& \left. \times \left( 2\lambda_n^2 \frac{s_m^2 h^2 - \operatorname{sh}^2 s_m h}{\Delta_{2m}} + (s_m^2 + 3\lambda_n^2) h s_m \right) \right] \times \\
& \times \frac{s_m}{h^2 (\lambda_n^2 + s_m^2)^2 \sin \lambda_n h}.
\end{aligned}$$

Тоді згідно з формулами (52), (54) та (57) знаходимо

$$\begin{aligned}\alpha_{c,n}^{(2i)} &= \sum_{m=1}^{\infty} Z_{c,n,m}^{(2i)} \frac{U_0(s_m) - U_0(s_m k)}{s_m^2}, \\ \beta_{c,n}^{(2i)} &= \sum_{m=1}^{\infty} Z_{c,n,m}^{(2i)} \frac{U_0(s_m) - k^2 U_0(s_m k)}{s_m^2}, \\ \alpha_{s,n}^{(2i)} &= \sum_{m=1}^{\infty} Z_{s,n,m}^{(2i)} \frac{U_0(s_m) - U_0(s_m k)}{s_m^2}, \\ \beta_{s,n}^{(2i)} &= \sum_{m=1}^{\infty} Z_{s,n,m}^{(2i)} \frac{U_0(s_m) - k^2 U_0(s_m k)}{s_m^2}.\end{aligned}$$

Розв'язок другого рівняння (55) шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned}R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) &= A_{c,n,1}^{(2i-1)} I_0(\gamma_n \rho) + A_{c,n,2}^{(2i-1)} \rho I_1(\gamma_n \rho) + A_{c,n,3}^{(2i-1)} K_0(\gamma_n \rho) + \\ &+ A_{c,n,4}^{(2i-1)} \rho K_1(\gamma_n \rho) + \frac{2}{1-k^2} (q_{c,n}^+ - k q_{c,n}^-) \delta_{2i-1,1}.\end{aligned}\quad (58)$$

Тут  $I_\ell(\gamma_n \rho)$ ,  $K_\ell(\gamma_n \rho)$  – модифіковані функції Бесселя першого та другого роду порядку  $\ell = 0, 1$ ,  $A_{c,n,j}$  – сталі,  $j = 1, \dots, 4$ , які визначимо з системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^4 a_{\ell j}^c A_{c,n,j}^{(2i-1)} - f_\ell^c = 0, \quad \ell = 1, \dots, 4, \quad (59)$$

отриманої з другого рівняння (55) з урахуванням (58) шляхом порівнювання коефіцієнтів при вільному члені,  $\rho^2$  та  $\rho^2 \ln \rho$ , а також відповідної інтегральної умови (53). Коефіцієнти системи наведено у **Додатку В**.

Оскільки знайдені у такий спосіб функції  $R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho)$  та  $R_{s,n}^{(2i-1)}(\rho)$  задовольняють інтегральну умову (53), то їх можна подати у вигляді

$$R_{c,n}^{(2i-1)}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} R_{c,n,m}^{(2i-1)} U_0(s_m \rho),$$

де

$$\begin{aligned}R_{c,n,m}^{(2i-1)} &= \frac{1}{(\gamma_n^2 + s_m^2)^2 u_m} \left( -2\gamma_n^2 (A_{c,n,2}^{(2i-1)} G_{n,m}^{1,I} + A_{c,n,4}^{(2i-1)} G_{n,m}^{1,K}) + \right. \\ &+ \gamma_n (\gamma_n^2 + s_m^2) (A_{c,n,1}^{(2i-1)} G_{n,m}^{1,I} + A_{c,n,2}^{(2i-1)} G_{n,m}^{0,I} - \\ &\left. - A_{c,n,3}^{(2i-1)} G_{n,m}^{1,K} - A_{c,n,4}^{(2i-1)} G_{n,m}^{0,K}) \right),\end{aligned}$$

$$G_{n,m}^{\ell,I} = I_\ell(\gamma_n) U_0(s_m) - k^{2-\ell} I_\ell(\gamma_n k) U_0(s_m k),$$

$$G_{n,m}^{\ell,K} = K_\ell(\gamma_n) U_0(s_m) - k^{2-\ell} K_\ell(\gamma_n k) U_0(s_m k), \quad \ell = 0, 1.$$

Порівнюючи (52) та (54), знаходимо рекурентні співвідношення

$$\alpha_m^{(2i-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \gamma_n h}{\gamma_n^2} R_{c,n,m}^{(2i-1)}, \quad \beta_m^{(2i-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \lambda_n h}{\lambda_n} R_{s,n,m}^{(2i-1)}.$$

Після знаходження всіх невідомих коефіцієнтів, функцію  $\tilde{\mathcal{V}}(\rho, z)$  визначаємо за формулою (48):



$$\tilde{V}(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( F_{n,m}^{c,u} \cos \gamma_n z + F_{n,m}^{s,u} \sin \lambda_n z \right) U_0(s_m \rho), \quad (60)$$

де

$$F_{n,m}^{c,u} = R_{c,n,m} + Z_{c,n,m}, \quad F_{n,m}^{s,u} = R_{s,n,m} + Z_{s,n,m},$$

$$\{R_{t,n,m}, Z_{t,n,m}\} = \sum_{i=1}^{\infty} \{R_{t,n,m}^{(2i-1)}, Z_{t,n,m}^{(2i)}\}, \quad t = \{c, s\}.$$

Компоненти тензора напружень, які відповідають функції (60), знаходимо за формулами (19), (26), (38), (39) у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_r(\rho, z) = & -\nu \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( F_{n,m}^{c,u} \frac{\cos \gamma_n z - \cos \gamma_n h}{\gamma_n^2} + \right. \\ & \left. + F_{n,m}^{s,u} \frac{\sin \lambda_n h - \lambda_n z \cos \lambda_n z}{\lambda_n^2} \right) \frac{U_1(s_m \rho)}{s_m \rho} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{s_m^2} (F_{n,m}^{c,u} \cos \gamma_n z + F_{n,m}^{s,u} \sin \lambda_n z) \times \\ & \times \left( (1 - \nu) \frac{U_1(s_m \rho)}{s_m \rho} - U_0(s_m \rho) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\rho^2} \frac{\rho^2 - k^2}{1 - k^2} U_0(s_m) + \frac{k^2}{\rho^2} \frac{1 - \rho^2}{1 - k^2} U_0(s_m k) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_z(\rho, z) = & -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( F_{n,m}^{c,u} \frac{\cos \gamma_n z - \cos \gamma_n h}{\gamma_n^2} + \right. \\ & \left. + F_{n,m}^{s,u} \frac{\sin \lambda_n z - \lambda_n z \cos \lambda_n h}{\lambda_n^2} \right) U_0(s_m \rho), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}(\rho, z) = & \nu \tilde{\sigma}_z(\rho, z) - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{s_m^2} (F_{n,m}^{c,u} \cos \gamma_n z + \\ & + F_{n,m}^{s,u} \sin \lambda_n z) \left( (1 + \nu) U_0(s_m \rho) - \right. \\ & \left. - \frac{2}{1 - k^2} (U_0(s_m) - k^2 U_0(s_m k)) \right), \end{aligned}$$

$$\tilde{\sigma}_0(\rho, z) = \tilde{\sigma}(\rho, z) - \tilde{\sigma}_r(\rho, z),$$

$$\tilde{\sigma}_{rz}(\rho, z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left( F_{n,m}^{c,u} \frac{\sin \gamma_n z}{\gamma_n} + F_{n,m}^{s,u} \frac{\cos \lambda_n h - \cos \lambda_n z}{\lambda_n} \right) \frac{U_1(s_m \rho)}{s_m}. \quad (61)$$

**8. Числовий приклад та обговорення.** Для перевірки ефективності розробленого алгоритму побудови розв'язку осесиметричної задачі теорії пружності для порожнистого циліндра скінченної довжини, розглянемо декілька прикладів числових розрахунків напруженого стану при різних способах силового навантаження циліндра.

Спершу розглянемо випадок, коли циліндр зазнає нормального тиску на зовнішній циліндричній поверхні. Тоді крайові умови мають вигляд

$$\sigma_r(1, z) = p \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right), \quad \sigma_r(k, z) = 0, \quad \sigma_{rz}(1, z) = \sigma_{rz}(k, z) = 0,$$

$$\sigma_z(\rho, \pm h) = \sigma_{rz}(\rho, \pm h) = 0, \quad p = \text{const}. \quad (62)$$

На рис. 2 зображено розподіл безрозмірних радіальних напружень  $\sigma_r / p$ , зумовлених навантаженням (62) при  $\nu = 1/3$ ,  $k = 0.5$ ,  $h = 1$ . Як бачимо, розраховані радіальні напруження точно задовольняють задані на внутрішній та зовнішній циліндричних поверхнях крайові умови, включно з кутовими точками.

На рис. 3 показано поведінку радіальних напружень у перерізі  $z = 0$ . На цьому ж рисунку показано розподіл напружень  $\sigma_r^t / p$ , що виникають у довгому порожнистому циліндрі (задача Ляме), розраховані за формулою

$$\sigma_r^t = - \frac{(\rho^2 - k^2)p_e + k^2(1 - \rho^2)p_i}{\rho^2(1 - k^2)}$$

при  $p_e = p$ ,  $p_i = 0$ . Результати обчислень є близькими і, як показали подальші розрахунки, вже при  $h = 3$  ці криві збігаються.

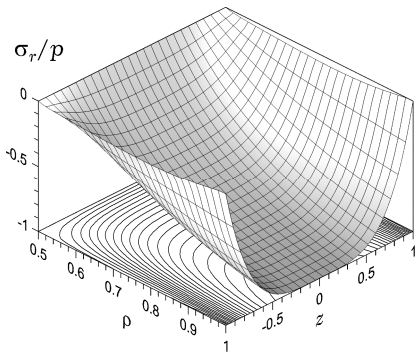


Рис. 2

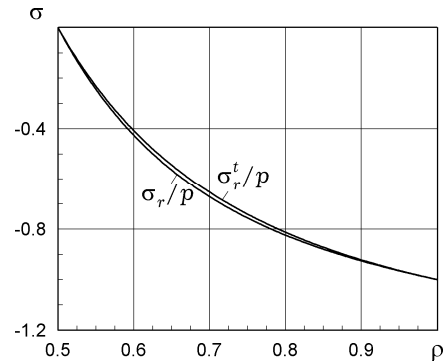


Рис. 3

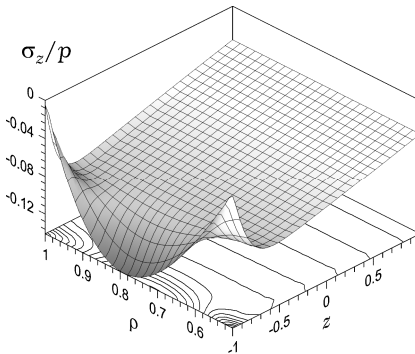


Рис. 4

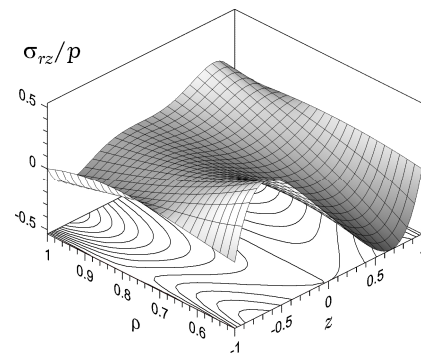


Рис. 5

Розглянемо задачу про навантаження скінченного циліндра нормальними осьовими навантаженнями на торцях:

$$\sigma_z(\rho, h) = \int_k^1 \rho f(\rho) d\rho = \text{const},$$

$$\sigma_z(\rho, -h) = f(\rho) = p(1 - \rho^2)(k^2 - \rho^2), \quad (63)$$

коли  $\sigma_r(k, z) = \sigma_r(1, z) = 0$ ,  $\sigma_{rz}(k, z) = \sigma_{rz}(1, z) = 0$ ,  $\sigma_{rz}(\rho, \pm h) = 0$ . Навантаження (63) прикладене таким чином, щоб виконувалася інтегральна умова рівноваги (32). Розподіл безрозмірних осьових напружень  $\sigma_z / p$  у цьому випадку показано на рис. 4.

На рис. 5 наведено розподіл безрозмірних дотичних напружень  $\sigma_{rz} / \tau$  в циліндрі у випадку таких крайових умов:

$$\sigma_{rz}(1, z) = \tau \left( 1 - \frac{z^2}{h^2} \right) \frac{z^3}{h^3}, \quad \sigma_{rz}(k, z) = \tau \frac{z^4 - h^2}{h^5} z,$$

$$\sigma_{rz}(\rho, h) = \tau(1 - \rho)(\rho - k), \quad \sigma_{rz}(\rho, -h) = \tau(1 - \rho^2)(\rho^2 - k^2), \quad (64)$$

коли нормальні навантаження на усіх поверхнях циліндра є відсутніми. Задані дотичні навантаження (64) задовольняють умови (30), (32), (46).

Як показали числові результати, напруження у скінченному циліндрі, розраховані за формулами (47), (Б.1), (61), тотожно задовольняють рівняння рівноваги (1), (2), рівняння суцільності (3) та крайові умови (5)–(8). При цьому задані зовнішні навантаження повинні задовольняти необхідні умови (30), (32), (46). Точність задоволення другого рівняння суцільності (4) залежить від кількості членів у функціональному ряді (48). Числові дослідження показують, що для досягнення точності порядку  $10^{-3}$  достатньо 6–8 членів ряду.

**Висновки.** З використанням методу безпосереднього інтегрування розроблено методику розв'язування осесиметричної задачі теорії пружності для порожнистого циліндра скінченної довжини. Методика орієнтована на точне задоволення всієї сукупності крайових умов для напружень, заданих на внутрішній та зовнішній циліндричних поверхнях та торцях. З урахуванням цих умов та рівнянь рівноваги вихідну задачу зведено до допоміжних задач, розв'язки яких визначають окремі компоненти тензора напружень через єдину функцію Вігака. Для визначення останньої отримано ключові інтегро-диференціальні рівняння на основі рівнянь суцільності в напруженнях. У результаті використання повних систем власних і приєднаних функцій за осовою та радіальною координатами із застосуванням спеціального ітераційного алгоритму вдалося відокремити змінні в ключових рівняннях та побудувати вираз для функції Вігака, а відтак, для компонент тензора напружень у вигляді розвинень у ряди за цими системами. Такі розвинення мають чітко виражені само- та несамозрівноважені частини, що узгоджується з основоположним принципом Сен-Венана. Отримано інтегральні умови для заданих зовнішніх зусиль, які є необхідними для побудови аналітичного розв'язку задачі.

Отримані розв'язки дають змогу спрощеного якісного та кількісного аналізу напруженого стану циліндра скінченної довжини та оцінити поведінку напружень поблизу кутових точок, що є проблематичним для низки числових та аналітичних методів. Зокрема, досліджено ефект впливу торців шляхом порівняння з розв'язком для довгого порожнистого циліндра.

#### Додаток А.

Елементарні частини виразів (41) для нормальних та дотичних навантажень (5), (6), заданих на внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра:

$$p_0^\pm(z) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p^\pm(z) dz + \frac{3z}{2h^3} \int_{-h}^h z p^\pm(z) dz,$$

$$q_{r,0}^\pm(z) = \frac{(z+h)(3z-h)}{4h^2} \left\{ \begin{matrix} \tau_{1,h} \\ \tau_{k,h} \end{matrix} \right\} +$$

$$+ \frac{(z-h)(3z+h)}{4h^2} \left\{ \begin{matrix} \tau_{1,-h} \\ \tau_{k,-h} \end{matrix} \right\} - \frac{3(z^2-h^2)}{4h^3} \int_{-h}^h q_r^\pm(z) dz. \quad (\text{A.1})$$

Самозрівноважені частини виразів (41) для нормальних та дотичних навантажень (5), (6), заданих на внутрішній та зовнішній поверхнях цилін-

дра:

$$\begin{aligned}\tilde{p}^\pm(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} (p_{c,n}^\pm \cos \gamma_n z + p_{s,n}^\pm \sin \lambda_n z), \\ \tilde{q}_r^\pm(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{q_{c,n}^\pm}{\gamma_n} \sin \gamma_n z + \frac{q_{s,n}^\pm}{\lambda_n} (\cos \lambda_n h - \cos \lambda_n z) \right).\end{aligned}\quad (\mathbf{A.2})$$

Тут

$$\begin{aligned}p_{c,n}^\pm &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h p^\pm(z) \cos \gamma_n z dz, & p_{s,n}^\pm &= \frac{1}{h \sin^2 \lambda_n h} \int_{-h}^h p^\pm(z) \sin \gamma_n z dz, \\ q_{c,n}^\pm &= \frac{1}{h} \int_{-h}^h \frac{dq_r^\pm(z)}{dz} \cos \gamma_n z dz, & q_{s,n}^\pm &= \frac{1}{h \sin^2 \lambda_n h} \int_{-h}^h \frac{dq_r^\pm(z)}{dz} \sin \lambda_n z dz.\end{aligned}$$

Елементарні частини виразів (41) для нормальних та дотичних навантажень (7), (8) торців циліндра:

$$\begin{aligned}f_0^\pm &= \frac{2}{1-k^2} \int_k^1 \rho f^\pm(\rho) d\rho, \\ q_{z,0}^\pm(\rho) &= \frac{\rho^2 - k^2}{\rho(1-k^2)} \left\{ \tau_{1,h} \right\} + \frac{k(1-\rho^2)}{\rho(1-k^2)} \left\{ \tau_{k,h} \right\}.\end{aligned}\quad (\mathbf{A.3})$$

Самозрівноважені частини виразів (41) для нормальних і дотичних навантажень (7), (8) торців циліндра:

$$\tilde{f}^\pm(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m^\pm U_0(s_m \rho), \quad \tilde{q}_z^\pm(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{z,m}^\pm}{s_m} U_1(s_m \rho).\quad (\mathbf{A.4})$$

Тут

$$\begin{aligned}f_m^\pm &= \frac{1}{u_m} \int_k^1 \rho f^\pm(\rho) U_0(s_m \rho) d\rho, & q_{z,m}^\pm &= \frac{1}{u_m} \int_k^1 \frac{d(\rho q_z^\pm(\rho))}{d\rho} U_0(s_m \rho) d\rho, \\ u_m &= \left( \frac{2}{\pi s_m} \right)^2 - k^2 U_0^2(s_m k).\end{aligned}$$

### Додаток Б.

Складові напружень (19), (26), (38), (39), що відповідають функції (44):

$$\begin{aligned}\sigma_z^e(\rho, z) &= -\frac{1}{4h^3} ((2h-z)(z+h)^2 \tilde{f}^+(\rho) + (2h+z)(z-h)^2 \tilde{f}^-(\rho)) - \\ &\quad - \frac{z^2 - h^2}{4\rho h^2} \left( (z+h) \frac{d}{d\rho} (\rho \tilde{q}_z^+(\rho)) + (z-h) \frac{d}{d\rho} (\rho \tilde{q}_z^-(\rho)) \right) - \\ &\quad - \frac{1}{1-k^2} \int_{-h}^h (\tilde{q}_r^+(\zeta) - k \tilde{q}_r^-(\zeta)) \operatorname{sgn}(z-\zeta) d\zeta, \\ 2\rho^2 \sigma_r^e(\rho, z) &= -2 \frac{\rho^2 - k^2}{1-k^2} \tilde{p}^+(z) - 2k^2 \frac{1-\rho^2}{1-k^2} \tilde{p}^-(z) + \\ &\quad + \frac{(\nu+3)(\rho^2 - k^2)(1-\rho^2)}{4(1-k^2)} \left( \frac{d\tilde{q}_r^+(z)}{dz} - k \frac{d\tilde{q}_r^-(z)}{dz} \right) +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + k \frac{1+v}{1-k^2} \left( \rho^2 \ln \rho - \frac{1-\rho^2}{1-k^2} k^2 \ln k \right) \left( k \frac{d\tilde{q}_r^+(z)}{dz} - \frac{d\tilde{q}_r^-(z)}{dz} \right) - \\
& - v \rho \frac{z^2 - h^2}{2h^2} \left( (z+h)\tilde{q}_z^+(\rho) + (z-h)\tilde{q}_z^-(\rho) \right) - \\
& - \frac{v}{4h^3} (2h-z)(z+h)^2 \int_k^1 \eta \tilde{f}^+(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta - \\
& - \frac{v}{4h^3} (2h+z)(z-h)^2 \int_k^1 \eta \tilde{f}^-(\eta) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \\
& + \frac{3z(1-v)}{8h^3} \left( \int_k^1 \eta (\rho^2 - \eta^2) (\tilde{f}^+(\eta) - \tilde{f}^-(\eta)) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1-k^2} \int_k^1 \rho^3 (\tilde{f}^+(\rho) - \tilde{f}^-(\rho)) d\rho \right) + \\
& + \frac{3z(1+v)}{4h^3} \left( \rho^2 \int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} (\tilde{f}^+(\eta) - \tilde{f}^-(\eta)) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\rho^2(1+k^2) - 2k^2}{1-k^2} \int_k^1 \rho \ln \rho (\tilde{f}^+(\rho) - \tilde{f}^-(\rho)) d\rho \right) + \\
& + \frac{(1-v)(3z+h)}{4h^2} \int_k^1 \eta^2 \left( \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1-k^2} - \operatorname{sgn}(\rho - \eta) \right) \tilde{q}_z^+(\eta) d\eta + \\
& + \frac{(1-v)(3z-h)}{4h^2} \int_k^1 \eta^2 \left( \frac{2\rho^2 - 1 - k^2}{1-k^2} - \operatorname{sgn}(\rho - \eta) \right) \tilde{q}_z^-(\eta) d\eta + \\
& + \frac{(1+v)(3z+h)\rho^2}{4h^2} \int_k^1 \left( \frac{1+k^2 - 2k^2\rho^{-2}}{1-k^2} - \operatorname{sgn}(\rho - \eta) \right) \tilde{q}_z^+(\eta) d\eta + \\
& + \frac{(1+v)(3z-h)\rho^2}{4h^2} \int_k^1 \left( \frac{1+k^2 - 2k^2\rho^{-2}}{1-k^2} - \operatorname{sgn}(\rho - \eta) \right) \tilde{q}_z^-(\eta) d\eta, \\
\sigma^e(\rho, z) = & - \frac{2}{1-k^2} (\tilde{p}^+(z) - k^2 \tilde{p}^-(z)) + \\
& + k \frac{1+v}{1-k^2} \left( \ln \rho + \frac{k^2 \ln k}{1-k^2} \right) \left( k \frac{d\tilde{q}_r^+(z)}{dz} - \frac{d\tilde{q}_r^-(z)}{dz} \right) + \\
& + \frac{(1+3v)k^2 + v + 3 - 2(1+v)\rho^2}{4(1-k^2)} \frac{d\tilde{q}_r^+(z)}{dz} - \\
& - k \frac{(3+v)k^2 + 1 + 3v - 2(1+v)\rho^2}{4(1-k^2)} \frac{d\tilde{q}_r^-(z)}{dz} - \\
& - \frac{v}{4h^3} \left( (2h-z)(z+h)^2 \tilde{f}^+(\rho) + (2h+z)(z-h)^2 \tilde{f}^-(\rho) \right) - \\
& - v \frac{z^2 - h^2}{4\rho h^2} \left( (z+h) \frac{d}{d\rho} (\rho \tilde{q}_z^+(\rho)) + (z-h) \frac{d}{d\rho} (\rho \tilde{q}_z^-(\rho)) \right) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3(1-\nu)z}{4(1-k^2)h^3} \int_k^1 \rho^3 (f^+(\rho) - f^-(\rho)) d\rho + \\
& + 3z \frac{1+\nu}{4h^3} \left( \int_k^1 \eta \ln \frac{\rho}{\eta} (f^+(\eta) - f^-(\eta)) \operatorname{sgn}(\rho - \eta) d\eta + \right. \\
& \left. + \frac{1+k^2}{1-k^2} \int_k^1 \rho \ln \rho (f^+(\rho) - f^-(\rho)) d\rho \right) + \\
& + \frac{1-\nu}{2(1-k^2)h^2} \int_k^1 \rho^2 ((3z+h)q_z^+(\rho) + (3z-h)q_z^-(\rho)) d\rho + \\
& + \frac{(1+\nu)(3z+h)}{4h^2} \int_k^1 \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} - \operatorname{sgn}(\rho - \eta) \right) \tilde{q}_z^+(\eta) d\eta + \\
& + \frac{(1+\nu)(3z-h)}{4h^2} \int_k^1 \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} - \operatorname{sgn}(\rho - \eta) \right) \tilde{q}_z^-(\eta) d\eta,
\end{aligned}$$

$$\sigma_0^e(\rho, z) = \sigma^e(\rho, z) - \sigma_r^e(\rho, z). \quad (\text{B.1})$$

### Додаток В.

Коефіцієнти системи (59):

$$f_1^c = -\frac{\gamma_n^4}{4} (q_{c,n}^+ + kq_{c,n}^-) \delta_{2i-1,1},$$

$$\begin{aligned}
f_2^c = & -\gamma_n^2 \left( 8\gamma_n^2 (\beta_{c,n}^{(2i-2)} + (p_{c,n}^+ - k^2 p_{c,n}^-) \delta_{2i-1,1}) + \right. \\
& + kq_{c,n}^- (8\nu + \gamma_n^2 (1+\nu) - \gamma_n^2 k^2 (3-\nu + 4(1+\nu) \ln k)) \delta_{2i-1,1} - \\
& \left. - q_{c,n}^+ (8\nu - \gamma_n^2 (3-\nu) + \gamma_n^2 k^2 (1+\nu)) \delta_{2i-1,1} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3^c = & -\gamma_n^2 \left( 4\gamma_n^2 k^2 (\alpha_{c,n}^{(2i-2)} + (p_{c,n}^+ - p_{c,n}^-) \delta_{2i-1,1}) - \right. \\
& - kq_{c,n}^- (4 - k^2 (1-\nu)(4 + \gamma_n^2) - 2\gamma_n^2 k^2 (1+\nu) \ln k) \delta_{2i-1,1} + \\
& \left. + q_{c,n}^+ (4k^2 - (4 + \gamma_n^2 k^2)(1-\nu)) \delta_{2i-1,1} \right),
\end{aligned}$$

$$f_4^c = -(q_{c,n}^+ - kq_{c,n}^-) \delta_{2i-1,1},$$

$$a_{11}^c = -\frac{\gamma_n^3}{4} (kI_1(\gamma_n k) + I_1(\gamma_n)), \quad a_{13}^c = \frac{\gamma_n^3}{4} (K_1(\gamma_n) + kK_1(\gamma_n k)),$$

$$a_{12}^c = \frac{\gamma_n^2}{4} \left( k(2I_1(\gamma_n k) - \gamma_n k I_0(\gamma_n k)) + 2I_1(\gamma_n) - \gamma_n I_0(\gamma_n) \right),$$

$$a_{14}^c = \frac{\gamma_n^2}{4} \left( k(2K_1(\gamma_n k) + \gamma_n k K_0(\gamma_n k)) + 2K_1(\gamma_n) + \gamma_n K_0(\gamma_n) \right),$$

$$a_{21}^c = \gamma_n (8(1-\nu) + \gamma_n^2 (3-\nu) - \gamma_n^2 k^2 (1+\nu)) I_1(\gamma_n) -$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_n k (\gamma_n^2 (1+\nu)(4k \ln k - 1) + 8(1-\nu) + \gamma_n^2 k^2 (3-\nu)) I_1(\gamma_n k) - \\
& - 8\gamma_n^2 (I_0(\gamma_n) - k^2 I_0(\gamma_n k)), \\
a_{22}^c &= (2\gamma_n^2 k^2 (1+\nu) - 2\gamma_n^2 (7-\nu) - 32(1-\nu)) I_1(\gamma_n) + \\
& + 2(\gamma_n^2 k (1+\nu)(4k^2 \ln k - 1) + \\
& + 16k(1-\nu) + \gamma_n^2 k^3 (7-\nu)) I_1(\gamma_n k) + \\
& + \gamma_n ((3-\nu)(8 + \gamma_n^2) - \gamma_n^2 k^2 (1+\nu)) I_0(\gamma_n) + \\
& + \gamma_n k^2 (\gamma_n^2 (1+\nu)(1 - 4k^2 \ln k) - (3-\nu)(\gamma_n^2 k^2 + 8)) I_0(\gamma_n k), \\
a_{23}^c &= \gamma_n (\gamma_n^2 k^2 (1+\nu) - \gamma_n^2 (3-\nu) - 8(1-\nu)) K_1(\gamma_n) + \\
& + \gamma_n k ((1+\nu)(4\gamma_n^2 k^2 \ln k + 8 - \gamma_n^2) + \gamma_n^2 k^2 (3-\nu)) K_1(\gamma_n k) - \\
& - 8\gamma_n^2 (K_0(\gamma_n) - k^2 K_0(\gamma_n k)), \\
a_{24}^c &= 2(\gamma_n^2 k^2 (1+\nu) - \gamma_n^2 (7-\nu) - 16(1-\nu)) K_1(\gamma_n) + \\
& + 2k(\gamma_n^2 (1+\nu)(4k^2 \ln k - 1) + \\
& + 16(1-\nu) + \gamma_n^2 k^2 (7-\nu)) K_1(\gamma_n k) + \\
& + \gamma_n ((3-\nu)(8k^2 - \gamma_n^2) + \gamma_n^2 k^2 (1+\nu)) K_0(\gamma_n) - \\
& - \gamma_n k^2 ((1+\nu)\gamma_n^2 (1 - 4k^2 \ln k) - (3-\nu)(\gamma_n^2 k^2 + 8)) K_0(\gamma_n k), \\
a_{31}^c &= (4 + \gamma_n^2 k^2)(1-\nu)\gamma_n I_1(\gamma_n) - 4\gamma_n^2 k^2 (I_0(\gamma_n) - I_0(\gamma_n k)) - \\
& - \gamma_n (2\gamma_n^2 k^3 (1+\nu) \ln k + k^3 (1-\nu)(4 + \gamma_n^2)) I_1(\gamma_n k), \\
a_{32}^c &= -(8(1+k^2)(1-\nu) + 2\gamma_n^2 k^2 (3-\nu)) I_1(\gamma_n) + \\
& + (4\gamma_n^2 k^2 (1+\nu) \ln k + 8k(1-\nu)(1+k^2) + \\
& + 2(3-\nu)\gamma_n^2 k^3) I_1(\gamma_n k) + \\
& + ((1-\nu)\gamma_n (\gamma_n^2 k^2 + 4) + 8\gamma_n k^2) I_0(\gamma_n) - \\
& - \gamma_n k^2 (2(1+\nu)\gamma_n^2 k^2 \ln k + k^2 (1-\nu)(\gamma_n^2 + 4) + 8) I_0(\gamma_n k), \\
a_{33}^c &= -(1-\nu)\gamma_n (\gamma_n^2 k^2 + 4) K_1(\gamma_n) - 4\gamma_n^2 k^2 (K_0(\gamma_n) - K_0(\gamma_n k)) + \\
& + \gamma_n k^3 (2\gamma_n^2 (1+\nu) \ln k + (1-\nu)(\gamma_n^2 + 4)) K_1(\gamma_n k), \\
a_{34}^c &= -2(4(1-\nu)(1+k^2) + \gamma_n^2 k^2 (3-\nu)) K_1(\gamma_n) + \\
& + (4\gamma_n^2 k^2 (1+\nu) \ln k + 8k(1-\nu)(1+k^2) + \\
& + 2\gamma_n^2 k^3 (3-\nu)) K_1(\gamma_n k) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_n((1-\nu)(\gamma_n^2 k^2 + 4) + 8k^2)K_0(\gamma_n) + \\
& + \gamma_n k^2(2\gamma_n^2 k^2(1+\nu)\ln k + \\
& + k^2(1-\nu)(\gamma_n^2 + 4) + 8)K_0(\gamma_n k), \\
a_{41}^c &= \frac{I_1(\gamma_n) - kI_1(\gamma_n k)}{\gamma_n}, \quad a_{42}^c = \frac{I_0(\gamma_n) - k^2 I_0(\gamma_n k) - 2a_{41}^c}{\gamma_n}, \\
a_{43}^c &= -\frac{K_1(\gamma_n) - kK_1(\gamma_n k)}{\gamma_n}, \quad a_{44}^c = -\frac{K_0(\gamma_n) - k^2 K_0(\gamma_n k) - 2a_{43}^c}{\gamma_n}.
\end{aligned}$$

1. Вігак В. М. Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 311 с.
2. Вігак В. М. Прямий метод інтегрування рівнянь плоских задач пружності й термопружності // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 62–67.
3. Вігак В. М., Токовий Ю. В. Точний розв'язок осесиметричної задачі пружності в напруженнях для суцільного циліндра певної довжини // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 55–60.
4. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
5. Калиняк Б. М., Токовий Ю. В., Ясінський А. В. Прямі та обернені задачі термомеханіки стосовно оптимізації та ідентифікації термонапруженого стану деформованих твердих тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2016. – **59**, № 3. – С. 28–42.  
Te same: Kalyniak B. M., Tokovyy Yu. V., Yasinskyi A. V. Direct and inverse problems of thermomechanics concerning the optimization and identification of the thermal stressed state of deformed solids // J. Math. Sci. – 2019. – **236**, No. 1. – P. 21–34. – <https://doi.org/10.1007/s10958-018-4095-3>.
6. Коваленко А. Д. Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
7. Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А. Упругость и прочность цилиндрических тел. – Москва: Высш. шк., 1975. – 526 с.
8. Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В. Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: Сполом, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В. 5 т. – Т. 5.
9. Мелешко В. В., Токовий Ю. В., Барбер Дж. Р. Осесиметричні температурні напруження у пружному ізотропному циліндрі скінченної довжини // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2010. – **53**, № 1. – С. 120–137.  
Te same: Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V., Barber J. R. Axially symmetric temperature stresses in an elastic isotropic cylinder of finite length // J. Math. Sci. – 2011. – **176**, No. 5. – P. 646–669. – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0428-1>.
10. Соляник-Красса К. В. Осесимметричная задача теории упругости. – Москва: Стройиздат, 1987. – 336 с.
11. Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В. Подання розв'язків плоских задач теорії пружності для прямокутної області через функції Вігака // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Т. Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2021. – Вип. 3. – С. 123–126.
12. Токовий Ю. В., Юзв'як М. Й., Ясінський А. В. Функції Вігака у прямих задачах теорії пружності та термопружності для тіл з кутовими точками // Матеріали Міжнар. наук. конф., присвяченої 75-річчю кафедри диф. рівнянь та 85-річчю від дня народження М. П. Ленюка, 28–30 жовтня 2021 р. – Чернівці: Черн. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2021. – С. 155–156.
13. Lurie S. A., Vasiliev V. V. The biharmonic problem in the theory of elasticity. – Luxembourg: Gordon and Breach, 1995. – 260 p.
14. Meleshko V. V. Equilibrium of an elastic finite cylinder: Filon's problem revisited // J. Eng. Math. – 2003. – **46**, No. 3-4. – P. 355–376.  
– <https://doi.org/10.1023/A:1025066408575>.
15. Meleshko V. V. Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem // Appl. Mech. Rev. – 2003. – **56**, No. 1. – P. 33–85.  
– <https://doi.org/10.1115/1.1521166>.



16. *Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // *J. Eng. Math.* – 2011. – **78**, No. 1. – P. 143–166. – <https://doi.org/10.1007/s10665-011-9524-y>.
17. *Rahnama H., Shokrieh M. M.* Axisymmetric equilibrium of an isotropic elastic solid circular finite cylinder // *Math. Mech. Solids.* – 2019. – **24**, No. 4. – P. 996–1029. – <https://doi.org/10.1177/1081286518764013>.
18. *Tokovyy Yu. V., Ma C.-C.* Analytical solutions to the planar non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for homogeneous and inhomogeneous annular domains // *Int. J. Eng. Sci.* – 2009. – **47**, No. 3. – P. 413–437. – <https://doi.org/10.1016/j.ijengsci.2008.10.005>.
19. *Vihak V. M., Yuzvyak M. Y., Yasinskij A. V.* The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain // *J. Thermal Stresses.* – 1998. – **21**, No. 5. – P. 545–562. – <https://doi.org/10.1080/01495739808956162>.
20. *Vihak V., Tokovyi Yu., Rychahivskyy A.* Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region // *J. Comput. Appl. Mech.* – 2002. – **3**, No. 2. – P. 193–206.
21. *Yuzvyak M., Tokovyy Yu., Yasinskyy A.* Axisymmetric thermal stresses in an elastic hollow cylinder of finite length // *J. Thermal Stresses.* – 2021. – **44**, No. 3. – P. 359–376. – <https://doi.org/10.1080/01495739.2020.1826376>.

#### ELASTIC EQUILIBRIUM OF A HOLLOW CYLINDER OF FINITE LENGTH SUBJECTED TO AXISYMMETRIC FORCE LOADING

*A technique is developed for solving an axisymmetric elasticity problem for a hollow cylinder of finite length subjected to force loading applied to its end faces and both inner and outer circumferences. Using the direct integration of the equilibrium equations, the auxiliary problems are formulated for expressing the stress-tensor components via a key function called the Vihak function. By implementing the obtained expressions, the compatibility equations are reduced to a governing equation for the key function; the system of original boundary conditions is also reduced equivalently to corresponding integral conditions for the key function. The complete systems of associated functions and eigenfunctions are constructed to represent the solution to the problem in the form of a superposition of the elementary and self-equilibrated parts. A technique is developed for solving the governing equation with corresponding integral conditions for each of the foregoing parts. For determining the self-equilibrated solution, a recurrent algorithm is suggested, which allows for complete separation of variables in the governing equation. The constructed solution allows for exact analysis of stresses in elastic cylinders of different cylinder ratio.*

**Key words:** *hollow cylinder of finite length, direct integration method, analytical solution, axisymmetric problem, Vihak's function.*