

## МЕТОД ПРОДОВЖЕННЯ КРАЙОВИХ УМОВ У ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ

Для знаходження розв'язків плоских задач теорії пружності в областях, які обмежені двома парами різних координатних ліній, пропонується використовувати розв'язки більш простих задач для областей, обмежених однією парою координатних ліній, із додатковим заданням крайових умов вихідної задачі за межами області. Метод ілюструється знаходженням розв'язків крайових задач теорії пружності для чверті площини, півсмуги та прямокутника.

**Ключові слова:** крайові умови, пружна чверть площини, півсмуга, прямокутник, бігармонічна задача.

Розв'язування задач теорії пружності для тіл скінченних розмірів методами однорідних розв'язків і суперпозиції, які є не тільки ефективними, але й єдиною можливими для таких задач аналітичними методами, пов'язано зі значними математичними труднощами. Постають питання узгодженості крайових умов у кутових точках області, регулярності нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь, повноти системи власних функцій, єдиності розв'язку, збіжності розвинень, асимптотики коефіцієнтів розвинень і невідомих систем алгебричних рівнянь, можливості та фактичного розвинення двох функцій за неортогональною системою функцій з пов'язаними між собою певним чином коефіцієнтами цих розвинень [3, 10, 16, 20]. У цій роботі зроблено спробу підійти до вирішення деяких з цих питань з нової точки зору, вказавши інший шлях побудови вже відомих розв'язків: з використанням при цьому так званого методу продовження крайових умов [14].

Ідея методу продовження крайових умов полягає у наступному. Нехай треба розв'язати деяку крайову задачу у двовимірній області  $D$ , яка у системі координат  $(\alpha, \beta)$  обмежена чотирма відрізками координатних ліній  $\alpha = \alpha_1, \alpha_2$ ,  $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$  і  $\beta = \beta_1, \beta_2$ ,  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$  (рис. 1). Пропонується скористатися розв'язком більш простої задачі для криволінійної смуги, обмеженої лініями  $\beta = \beta_1$ ,  $\beta = \beta_2$ ,  $-\infty < \alpha < \infty$ . При цьому умови на відрізках  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$  цих ліній такі, як і у випадку вихідної задачі, а на продовженнях  $\alpha_2 < \alpha < \infty$ ,  $-\infty < \alpha < \alpha_1$  відрізків – вважаються заданими з поки що невідомими функціями. Для знаходження невідомих функцій слід задовольнити умови на відрізках  $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$  ліній  $\alpha = \alpha_1$ ,  $\alpha = \alpha_2$  і отримати тим самим систему інтегральних рівнянь, яку необхідно розв'язати.

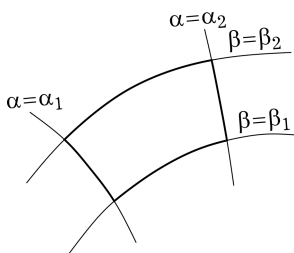


Рис. 1

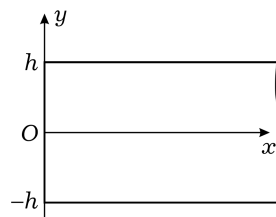


Рис. 2

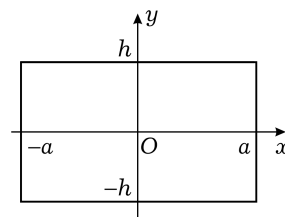



Рис. 3

У простому випадку прямолінійної півсмуги  $0 \leq x < \infty$ ,  $-h \leq y \leq h$  (рис. 2,  $\alpha = x$ ,  $\beta = y$ ,  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = \infty$ ,  $\beta_1 = -h$ ,  $\beta_2 = h$ ), коли на гранях

 v.i.ostryk@gmail.com

$y = \pm h$ ,  $0 \leq x < \infty$  задано, наприклад, напруження  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , а на торці  $x = 0$ ,  $-h \leq y \leq h$  – умови гладкого контакту  $u_x = 0$ ,  $\tau_{xy} = 0$ , метод продовження крайових умов спрацьовує автоматично (без необхідності розв’язання системи інтегральних рівнянь) і приводить до добре відомого результату. Слід скористатися розв’язком першої крайової задачі для смуги  $-\infty < x < \infty$ ,  $-h \leq y \leq h$  з продовженням крайових умов на від’ємну піввісь ( $-\infty < x < 0$ ,  $y = \pm h$ ): для нормальних напружень  $\sigma_y$  за парністю, а для дотичних  $\tau_{xy}$  – за непарністю. Тоді, з огляду на симетрію задачі для смуги, умови на торці півсмуги будуть виконані. У випадку прямокутника  $-a \leq x \leq a$ ,  $-h \leq y \leq h$  (рис. 3), коли умови гладкого контакту задано на сторонах  $x = \pm a$ ,  $-h \leq y \leq h$ , можна поступити аналогічно, продовжуючи крайові умови так, щоб задані при  $y = \pm h$  напруження  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  були періодичними з періодом  $4a$  і відповідно симетричними та антисиметричними відносно точки  $x = a$ .

Є ще один відомий найпростіший випадок застосування методу продовжень початкових (не крайових) умов. Це спосіб розв’язання одновимірного хвильового рівняння для напівнескінченної струни  $0 \leq x < \infty$  із закріпленим кінцем  $x = 0$  [9]. Розв’язок визначається розв’язком Даламбера для нескінченної струни  $-\infty < x < \infty$  з продовженням початкових умов на від’ємну піввісь за непарністю. Цим забезпечується виконання крайової умови на закріпленому кінці струни. Аналогічно визначається розв’язок для скінченної струни  $0 \leq x \leq \ell$ . Початкові умови продовжуються на всю числову вісь так, щоб задані функції у цих умовах були непарними та періодичними з періодом  $2\ell$ .

У наведених вище прикладах вдається «вгадати», якими повинні бути функції із крайових умов для смуги (або початкових умов для струни) після їх продовження на всю числову вісь. В інших випадках метод продовження приводить до системи інтегральних рівнянь. Нижче метод продовження крайових умов проілюструємо на розв’язанні крайових задач двовимірної теорії пружності для чверті площини, смуги та прямокутника. У цих задачах запропонований метод приводить до вже відомих результатів, але разом з тим дає деяку додаткову інформацію, яка є корисною для аналізу розв’язку.

**1. Перша задача для пружної чверті площини.** Чверть площини  $0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq y < \infty$  розглядаємо як граничний випадок прямокутника  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , коли дві його суміжні сторони  $x = a$ ,  $y = b$  віддалені на нескінченність ( $a \rightarrow \infty$ ,  $b \rightarrow \infty$ ). На межі чверті площини задано нормальні та дотичні напруження

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \sigma_y \Big|_{y=0} &= g_1(x), & \frac{1}{2G} \tau_{xy} \Big|_{y=0} &= g_2(x), & 0 < x < \infty, \\ \frac{1}{2G} \sigma_x \Big|_{x=0} &= g_3(y), & \frac{1}{2G} \tau_{xy} \Big|_{x=0} &= g_4(y), & 0 < y < \infty, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $G$  – модуль зсуву.

Розв’язок цієї задачі відшукуємо у формі розв’язку першої задачі для півплощини  $-\infty < x < \infty$ ,  $0 \leq y < \infty$ , крайові умови якої збігаються з першими двома умовами з (1), але задані при  $-\infty < x < \infty$ , через комплексні потенціали Колосова – Мусхелішвілі [12]:

$$\frac{1}{2G} (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_1(\tau) - ig_2(\tau)}{\tau - z} d\tau,$$

$$\frac{1}{2G}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{g_2(\tau)}{\tau - z} - y \frac{g_1(\tau) - ig_2(\tau)}{(\tau - z)^2} \right) d\tau, \quad z = x + iy. \quad (2)$$

Зокрема, на лінії  $x = 0$  маємо

$$\frac{1}{2G}(\sigma_x + i\tau_{xy}) \Big|_{x=0} = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \tau \left( \frac{g_1(\tau) + ig_2(\tau)}{(\tau + iy)^2} - \frac{g_1(\tau) - ig_2(\tau)}{\tau^2 + y^2} \right) d\tau. \quad (3)$$

Функції  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  на інтервалі  $-\infty < x < 0$  вважаємо невідомими та вводимо для них позначення

$$u_1(x) = g_1(-x), \quad u_2(x) = -g_2(-x), \quad 0 < x < \infty. \quad (4)$$

Задовольнивши за допомогою виразу (3) останні дві з умов (1), отримаємо комплексне інтегральне рівняння для визначення дійсних функцій  $u_1(\tau)$ ,  $u_2(\tau)$ :

$$\frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \tau \left( \frac{u_1(\tau) + iu_2(\tau)}{\tau^2 + y^2} - \frac{u_1(\tau) - iu_2(\tau)}{(\tau - iy)^2} \right) d\tau = f(y), \quad 0 < y < \infty, \quad (5)$$

де

$$f(y) = -g_3(y) - ig_4(y) - \frac{1}{\pi i} \int_0^{\infty} \tau \left( \frac{g_1(\tau) + ig_2(\tau)}{(\tau + iy)^2} - \frac{g_1(\tau) - ig_2(\tau)}{\tau^2 + y^2} \right) d\tau.$$

Ядра  $\frac{\tau}{\tau^2 + y^2}$ ,  $\frac{\tau}{(\tau - iy)^2}$ , помножені на  $\tau$ , залежать від відношення  $\frac{y}{\tau}$  змінних  $y$ ,  $\tau$ . Це означає, що рівняння (5) є інтегральним рівнянням типу згортки Мелліна [18]. Тому воно має точний розв'язок, який можемо знайти, застосувавши інтегральне перетворення Мелліна.

Помножимо обидві частини рівняння (5) і спряженого до нього рівняння на  $y^s$  і зінтегруємо за  $y$  від 0 до  $\infty$ . Використавши значення інтегралів [17]

$$\int_0^{\infty} \frac{y^s}{y^2 + \tau^2} dy = \frac{\pi}{2 \cos(\pi s/2)} \tau^{s-1}, \quad \int_0^{\infty} \frac{y^s}{(\tau \mp iy)^2} dy = \pm \frac{\pi i s}{\sin \pi s} e^{\pm \pi i s/2} \tau^{s-1}, \quad (6)$$

отримаємо два алгебричних рівняння

$$\begin{aligned} [U_1(s) \pm iU_2(s)] \sin \frac{\pi s}{2} \mp i s [U_1(s) \mp iU_2(s)] e^{\pm \pi i s/2} = \\ = [G_1(s) \mp iG_2(s)] \sin \frac{\pi s}{2} \pm i s [G_1(s) \pm iG_2(s)] e^{\mp \pi i s/2} \mp \\ \mp i [G_3(s) \mp iG_4(s)] \sin \pi s \end{aligned} \quad (7)$$

відносно трансформант Мелліна, помножених на незалежну змінну функцій із (4), (1):

$$U_j(s) = \int_0^{\infty} u_j(\tau) \tau^s d\tau, \quad j = 1, 2, \quad G_j(s) = \int_0^{\infty} g_j(\tau) \tau^s d\tau, \quad j = 1, \dots, 4. \quad (8)$$

Із (7) знаходимо

$$\begin{aligned} U_1(s) \Delta(s) = \left[ \cos^2 \frac{\pi s}{2} + (s^2 - 1) \cos \pi s \right] G_1(s) + s(s-1) G_2(s) \sin \pi s - \\ - s G_3(s) \cos \frac{\pi s}{2} \sin \pi s + (s-1) G_4(s) \sin \frac{\pi s}{2} \sin \pi s, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_2(s)\Delta(s) &= s(s+1)G_1(s) \sin \pi s - \left[ \cos^2 \frac{\pi s}{2} + (s^2 - 1) \cos \pi s \right] G_2(s) - \\
&\quad - (s+1)G_3(s) \sin \frac{\pi s}{2} \sin \pi s - sG_4(s) \cos \frac{\pi s}{2} \sin \pi s, \quad (9)
\end{aligned}$$

де

$$\Delta(s) = \sin^2 \frac{\pi s}{2} - s^2.$$

Підставимо у формули (2) з урахуванням (4) функції

$$\begin{aligned}
u_j(\tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} U_j(s) \tau^{-s-1} ds, \quad j = 1, 2, \\
g_j(\tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} G_j(s) \tau^{-s-1} ds, \quad j = 1, \dots, 4, \quad -1 < c < 0, \quad (10)
\end{aligned}$$

визначені зі співвідношень (8) оберненим перетворенням Мелліна. Залучивши при цьому залежності (9) та інтеграли [17]

$$\int_0^\infty \frac{\tau^{-s-1}}{\tau - z} d\tau = -\frac{\pi}{\sin \pi s} (-z)^{-s-1}, \quad \int_0^\infty \frac{\tau^{-s-1}}{(\tau - z)^2} d\tau = -\frac{\pi(s+1)}{\sin \pi s} (-z)^{-s-2}, \quad (11)$$

матимемо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G} (\sigma_x + \sigma_y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\langle \left[ \frac{1}{2} \sin \pi s + i \left( s + \sin^2 \frac{\pi s}{2} \right) \right] z^{-s-1} - \right. \\
&\quad \left. - \left[ \frac{1}{2} \sin \pi s - i \left( s + \sin^2 \frac{\pi s}{2} \right) \right] \bar{z}^{-s-1} \right\rangle G_1(s) - \\
&\quad - i \left\langle \left[ \frac{1}{2} \sin \pi s - i \left( s - \sin^2 \frac{\pi s}{2} \right) \right] z^{-s-1} + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{1}{2} \sin \pi s + i \left( s - \sin^2 \frac{\pi s}{2} \right) \right] \bar{z}^{-s-1} \right\rangle G_2(s) - \\
&\quad - \left\langle \left[ s \cos \frac{\pi s}{2} + i(s+1) \sin \frac{\pi s}{2} \right] z^{-s-1} - \right. \\
&\quad \left. - \left[ s \cos \frac{\pi s}{2} - i(s+1) \sin \frac{\pi s}{2} \right] \bar{z}^{-s-1} \right\rangle G_3(s) + \\
&\quad + \left\langle \left[ (s-1) \sin \frac{\pi s}{2} - is \cos \frac{\pi s}{2} \right] z^{-s-1} - \right. \\
&\quad \left. - \left[ (s-1) \sin \frac{\pi s}{2} + is \cos \frac{\pi s}{2} \right] \bar{z}^{-s-1} \right\rangle G_4(s) \Bigg\rangle \frac{ds}{\Delta(s)}, \\
\frac{1}{2G} (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) &= -\frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left\langle \left\{ s(s+1)G_1(s) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left[ \frac{1}{2} \sin \pi s - i \left( s^2 - \sin^2 \frac{\pi s}{2} \right) \right] G_2(s) - \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (s+1)G_3(s) \sin \frac{\pi s}{2} + sG_4(s) \cos \frac{\pi s}{2} \Big\} z^{-s-1} - \\
& - (s+1) \left\{ \left[ \frac{1}{2} \sin \pi s + i \left( s + \sin^2 \frac{\pi s}{2} \right) \right] G_1(s) - \right. \\
& - \left( s - \sin^2 \frac{\pi s}{2} + \frac{i}{2} \sin \pi s \right) G_2(s) - \\
& - \left[ s \cos \frac{\pi s}{2} + i(s+1) \sin \frac{\pi s}{2} \right] G_3(s) - \\
& \left. - \left[ (s-1) \sin \frac{\pi s}{2} - is \cos \frac{\pi s}{2} \right] G_4(s) \right\} yz^{-s-2} \Bigg\} \frac{ds}{\Delta(s)}. \quad (12)
\end{aligned}$$

Перейдемо до полярної системи координат  $(r, \vartheta)$  з полюсом у точці  $x = 0$ ,  $y = 0$  і віссю уздовж бісектриси чверті площини, поклавши  $z = re^{i(\vartheta+\pi/4)}$ .

Увівши функції

$$g_1^\pm(r) = \frac{1}{2}[g_3(r) \pm g_1(r)], \quad g_2^\pm(r) = \frac{1}{2}[g_4(r) \mp g_2(r)], \quad (13)$$

розглянемо дві крайові задачі: симетричну з крайовими умовами

$$\frac{1}{2G} \sigma_\vartheta^+ \Big|_{\vartheta=\pm\pi/4} = g_1^+(r), \quad \frac{1}{2G} \tau_{r\vartheta}^+ \Big|_{\vartheta=\pm\pi/4} = \pm g_2^+(r), \quad 0 < r < \infty, \quad (14)$$

і антисиметричну задачу з умовами

$$\frac{1}{2G} \sigma_\vartheta^- \Big|_{\vartheta=\pm\pi/4} = \pm g_1^-(r), \quad \frac{1}{2G} \tau_{r\vartheta}^- \Big|_{\vartheta=\pm\pi/4} = g_2^-(r), \quad 0 < r < \infty. \quad (15)$$

Розв'язок вихідної задачі з крайовими умовами (1) подамо як суперпозицію розв'язків симетричної та антисиметричної задач:

$$\sigma_r = \sigma_r^+ + \sigma_r^-, \quad \sigma_\vartheta = \sigma_\vartheta^+ + \sigma_\vartheta^-, \quad \tau_{r\vartheta} = \tau_{r\vartheta}^+ + \tau_{r\vartheta}^-. \quad (16)$$

Використовуючи залежності [12]

$$\sigma_r + \sigma_\vartheta = \sigma_x + \sigma_y, \quad \sigma_\vartheta - \sigma_r + 2i\tau_{r\vartheta} = (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})e^{2i(\vartheta+\pi/4)}, \quad (17)$$

із (12) знаходимо

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2G} (\sigma_r^\pm + \sigma_\vartheta^\pm) &= \frac{2}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left( \left\{ \begin{matrix} \sin \\ \cos \end{matrix} \right\} \frac{\pi(s-1)}{4} \cdot G_1^\pm(s) \pm \right. \\
&\quad \left. \pm \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} \frac{\pi(s-1)}{4} \cdot G_2^\pm(s) \right) \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\} (s+1)\vartheta \cdot \frac{r^{-s-1}}{\Delta^\pm(s)} ds, \\
\frac{1}{2G} (\sigma_\vartheta^\pm - \sigma_r^\pm + 2i\tau_{r\vartheta}^\pm) &= \frac{\sqrt{2}}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left[ \left( \left\{ \begin{matrix} \cos \\ -i \sin \end{matrix} \right\} \frac{\pi s}{4} \cdot \cos \vartheta + \left\{ \begin{matrix} i \sin \\ -\cos \end{matrix} \right\} \frac{\pi s}{4} \cdot \sin \vartheta \right) \times \right. \\
&\quad \times (s+1)G_1^\pm(s) - \left( \left\{ \begin{matrix} \cos \\ -i \sin \end{matrix} \right\} \frac{\pi s}{4} \cdot (\cos \vartheta - is \sin \vartheta) - \right. \\
&\quad \left. \left. - \left\{ \begin{matrix} i \sin \\ -\cos \end{matrix} \right\} \frac{\pi s}{4} \cdot (\sin \vartheta + is \cos \vartheta) \right) G_2^\pm(s) \right] e^{-is\vartheta} \frac{r^{-s-1}}{\Delta^\pm(s)} ds, \quad (18)
\end{aligned}$$

де

$$G_1^\pm(s) = \frac{1}{2}[G_3(s) \pm G_1(s)], \quad G_2^\pm(s) = \frac{1}{2}[G_4(s) \mp G_2(s)], \quad \Delta^\pm(s) = \sin \frac{\pi s}{2} \pm s.$$

Тоді отримуємо напруження у чверті площини у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G}(\sigma_r^\pm, \sigma_\vartheta^\pm, \tau_{r\vartheta}^\pm) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} [(S_{r1}^\pm(s, \vartheta), S_{\vartheta 1}^\pm(s, \vartheta), T_{r\vartheta 1}^\pm(s, \vartheta))G_1^\pm(s) + \\ &+ (S_{r2}^\pm(s, \vartheta), S_{\vartheta 2}^\pm(s, \vartheta), T_{r\vartheta 2}^\pm(s, \vartheta))G_2^\pm(s)] \frac{r^{-s-1}}{\Delta^\pm(s)} ds, \end{aligned} \quad (19)$$

де

$$\begin{aligned} S_{r1}^\pm(s, \vartheta) &= -(s+2)\theta_{sc}^\pm(s, \vartheta) + \theta_{cs}^\pm(s, \vartheta), \\ S_{r2}^\pm(s, \vartheta) &= (s+1)\theta_{ss}^\pm(s, \vartheta) + 2\theta_{cc}^\pm(s, \vartheta), \\ S_{\vartheta 1}^\pm(s, \vartheta) &= s\theta_{sc}^\pm(s, \vartheta) + \theta_{cs}^\pm(s, \vartheta), \quad S_{\vartheta 2}^\pm(s, \vartheta) = -(s-1)\theta_{ss}^\pm(s, \vartheta), \\ T_{r\vartheta 1}^\pm(s, \vartheta) &= -(s+1)\theta_{ss}^\mp(s, \vartheta), \quad T_{r\vartheta 2}^\pm(s, \vartheta) = -s\theta_{sc}^\mp(s, \vartheta) + \theta_{cs}^\mp(s, \vartheta), \\ \theta_{ss}^\pm(s, \vartheta) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right) \sin s\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) \pm \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) \sin s\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right), \\ \theta_{sc}^\pm(s, \vartheta) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right) \cos s\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) \pm \sin\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) \cos s\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right), \\ \theta_{cs}^\pm(s, \vartheta) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right) \sin s\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) \pm \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) \sin s\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right), \\ \theta_{cc}^\pm(s, \vartheta) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right) \cos s\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) \pm \cos\left(\vartheta + \frac{\pi}{4}\right) \cos s\left(\frac{\pi}{4} - \vartheta\right). \end{aligned}$$

Вирази (19) збігаються з відповідними виразами для напружень у клині, отриманими в роботі [13], якщо покласти кут піврозхилю клина рівним  $\frac{\pi}{4}$ . Зауважимо, що в роботі [13] використано стандартний підхід, який полягає у застосуванні інтегрального перетворення Мелліна до рівнянь рівноваги. Викладений тут спосіб розв'язання задачі має певні переваги порівняно зі стандартним, оскільки не потребує розв'язання системи лінійних алгебричних рівнянь четвертого порядку відносно трансформант напружень на гранях чверті площини, а виведення формул (19) для напружень не потребує великої кількості тригонометричних перетворень.

**2. Бігармонічна задача для півсмуги.** Всередині півсмуги  $0 \leq x < \infty$ ,  $-h \leq y \leq h$  (рис. 2) необхідно знайти розв'язок бігармонічного рівняння

$$\nabla^4 \Phi(x, y) \equiv \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0, \quad (20)$$

якщо на межі півсмуги задано шукану функцію  $\Phi(x, y)$  та її нормальну похідну, причому вони набувають нульових значень, окрім значень функції  $\Phi(x, y)$  на торці півсмуги:

$$\begin{aligned} \Phi(x, \pm h) &= 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=\pm h} = 0, \quad 0 < x < \infty, \\ \Phi(0, y) &= F(y), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad -h < y < h. \end{aligned} \quad (21)$$

При цьому шукана функція разом зі своїми похідними першого порядку повинні бути неперервними на межі півсмуги. Це накладає на задану функцію  $F(y)$  та її похідну  $F'(y)$  умову неперервності на відрізку  $-h \leq y \leq h$ , а

також додаткові умови

$$F(\pm h) = 0, \quad F'(\pm h) = 0. \quad (22)$$

Розглядатимемо задля простоти симетричний відносно осі  $Ox$  випадок задачі:

$$F(-y) \equiv F(y), \quad \Phi(x, -y) \equiv \Phi(x, y). \quad (23)$$

Більш загальна задача з неоднорідними першими двома умовами з (21) зводиться до розглядуваної виділенням відповідного розв'язку для смуги  $-\infty < x < \infty$ ,  $-h \leq y \leq h$ . Однорідність останньої умови з (21) не є суттєвою для розв'язання задачі, а лише спрощує подальший виклад.

Як відомо [10], крайова задача (20), (21) описує плоску деформацію півшару із заданими на його межі напруженнями, а також згин півсмугової пластинки із защемленими краями. У першому випадку функція  $\Phi(x, y)$  є функцією Ері, у другому – функцією прогину пластинки. Як показано в [10], умови (22) виконуються, якщо навантаження на торці півшару є зрівноваженим.

На сьогодні найбільш відомими і розвинутими методами розв'язання бігармонічної задачі для півсмуги є метод однорідних розв'язків [16] і метод суперпозиції [3, 20]. Обидва методи зводять задачу до різних нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь. Окрім того, точний розв'язок бігармонічної задачі можна отримати методом Папковича [11, 15]. Останнім часом появились роботи М. Д. Коваленка зі співавторами [4–7, 22], у яких подолано істотні труднощі в одночасному розвиненні двох заданих функцій за неортогональною системою власних функцій [16] і побудовано в замкненому вигляді розв'язки бігармонічної задачі для півсмуги. На жаль, результати обчислень у цих роботах відсутні.

Скористаємося розв'язком бігармонічної задачі для смуги з крайовими умовами

$$\Phi(x, \pm h) = f(x), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=\pm h} = g(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (24)$$

Цей розв'язок, знайдений із застосуванням інтегрального перетворення Фур'є, має вигляд

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{(\operatorname{sh} \mu h + \mu h \operatorname{ch} \mu h) \operatorname{ch} \mu y - \mu \operatorname{sh} \mu h \cdot y \operatorname{sh} \mu y}{\operatorname{sh} \mu h \operatorname{ch} \mu h + \mu h} \int_{-\infty}^{\infty} f(r) e^{i\mu r} dr + \right. \\ \left. + \frac{-h \operatorname{sh} \mu h \operatorname{ch} \mu y + \operatorname{ch} \mu h \cdot y \operatorname{sh} \mu y}{\operatorname{sh} \mu h \operatorname{ch} \mu h + \mu h} \int_{-\infty}^{\infty} g(r) e^{i\mu r} dr \right) e^{-i\mu x} d\mu. \quad (25) \end{aligned}$$

Розв'язок задачі (20), (21) для півсмуги також подамо у вигляді (25), вважаючи функції  $f(x)$ ,  $g(x)$  невідомими на інтервалі  $-\infty < x < 0$  і рівними нулеві, якщо  $0 < x < \infty$ , тобто продовжимо перші дві із крайових умов (21) на інтервал  $-\infty < x < 0$ .

Після заміни змінних

$$x = h\xi, \quad y = h\eta, \quad \mu = -\frac{\tau}{h}, \quad r = -h\zeta \quad (26)$$

та зміни порядку інтегрування у (25) матимемо

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left( f(-h\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(\operatorname{sh} \tau + \tau \operatorname{ch} \tau) \operatorname{ch} \tau \eta - \operatorname{sh} \tau \cdot \tau \eta \operatorname{sh} \tau \eta}{\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau} e^{i\tau(\zeta+\xi)} d\tau + \right. \\ \left. + hg(-h\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-\operatorname{sh} \tau \operatorname{ch} \tau \eta + \operatorname{ch} \tau \cdot \eta \operatorname{sh} \tau \eta}{\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau} e^{i\tau(\zeta+\xi)} d\tau \right) d\zeta. \quad (27) \end{aligned}$$

Перетворивши внутрішні інтеграли у (27) за теорією лишків, знайдемо

$$\begin{aligned} \Phi = -2 \int_0^{\infty} & \left( f(-h\zeta) \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} [\operatorname{sh} s_k + s_k \operatorname{ch} s_k] \operatorname{ch} s_k \eta - \right. \\ & \left. - s_k \operatorname{sh} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta \right] \frac{1}{\operatorname{ch} 2s_k + 1} e^{is_k(\zeta+\xi)} + \\ & + hg(-h\zeta) \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} [-\operatorname{sh} s_k \operatorname{ch} s_k \eta + \\ & \left. + \operatorname{ch} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta] \frac{1}{\operatorname{ch} 2s_k + 1} e^{is_k(\zeta+\xi)} \right) d\zeta, \end{aligned} \quad (28)$$

де  $s_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , – корені рівняння  $\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau = 0$  із квадранта  $\operatorname{Re} \tau > 0$ ,  $\operatorname{Im} \tau > 0$ .

Спростимо вираз (28), використавши рівність

$$\begin{aligned} (\operatorname{sh} s_k + s_k \operatorname{ch} s_k) \operatorname{ch} s_k \eta - s_k \operatorname{sh} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta = \\ = (-\operatorname{sh} s_k \operatorname{ch} s_k \eta + \operatorname{ch} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta) \operatorname{sh}^2 s_k, \end{aligned} \quad (29)$$

яка випливає із тотожності

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}^2 \tau \cdot (-\operatorname{sh} \tau \operatorname{ch} \tau \eta + \operatorname{ch} \tau \cdot \eta \operatorname{sh} \tau \eta) = -\frac{1}{2} (\operatorname{ch} \tau \operatorname{ch} \tau \eta - \sin \tau \cdot \eta \operatorname{sh} \tau \eta) \times \\ \times (\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau) + (\operatorname{sh} \tau + \tau \operatorname{ch} \tau) \operatorname{ch} \tau \eta - \operatorname{sh} \tau \cdot \tau \eta \operatorname{sh} \tau \eta. \end{aligned} \quad (30)$$

Увівши функціонали

$$z_k = \int_0^{\infty} \frac{f(-h\zeta) \operatorname{sh}^2 s_k + hg(-h\zeta)}{\operatorname{ch} 2s_k + 1} e^{is_k \zeta} d\zeta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (31)$$

із (28) з урахуванням (29) отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) = 2 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{sh} s_k \operatorname{ch} s_k \eta - \operatorname{ch} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta) z_k e^{is_k \xi}, \\ \xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}. \end{aligned} \quad (32)$$

Подання (32) збігається з поданням, яке використовується при розв'язанні бігармонічної задачі для півсмуги методом однорідних розв'язків, і є розвиненням шуканої функції за власними функціями задачі для смуги [16]. Таким чином, у поданні (32) невідомі коефіцієнти  $z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , є функціоналами (31) від функцій  $f(x)$ ,  $g(x)$  із продовжених на від'ємну піввісь перших двох крайових умов (21) на бокових гранях півсмуги. Повнота системи власних функцій у розвиненні (32) безпосередньо випливає із того, що подання (32) еквівалентне поданню (25), яке є розв'язком задачі для смуги. При цьому останнім розв'язком, який є неперервною бігармонічною функцією у перерізі  $x = 0$ ,  $-h \leq y \leq h$  смуги, можна забезпечити виконання третьої і четвертої із крайових умов (21) шляхом розв'язання відповідної системи інтегральних рівнянь відносно функцій  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $-\infty < x < 0$ , якщо вважати, що  $f(x) = 0$ ,  $g(x) = 0$  на інтервалі  $0 < x < \infty$ . Це означає, що для будь-якої заданої функції  $F(y)$  із (21) функції  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $-\infty < x < 0$ , а тим самим функціонали  $z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , як і коефіцієнти у поданні (32), можуть бути визначені. Отже, продовжуючи крайові умови за межі півсмуги, маємо просте обґрунтування повноти системи власних функцій для



смуги, яка використовується при розв'язанні бігармонічної задачі для півсмуги методом однорідних розв'язків. Відмітимо, що встановлення повноти системи власних функцій у методі однорідних розв'язків є доволі складним математичним питанням, яке досліджувалося в роботах [1, 21].

Далі продовжимо розв'язання задачі за методом однорідних розв'язків. Задовольнивши поданням (32) третю і четверту із крайових умов (29), отримуємо систему функціональних рівнянь

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{sh} s_k \operatorname{ch} s_k \eta - \operatorname{ch} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta) z_k &= \frac{1}{2} F(h\eta), \\ \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} s_k (\operatorname{sh} s_k \operatorname{ch} s_k \eta - \operatorname{ch} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta) z_k &= 0, \quad 0 < \eta < 1. \end{aligned} \quad (33)$$

Систему рівнянь (33) зведемо до нескінченної системи алгебричних рівнянь методом Бубнова – Гальоркіна [2]. Для цього помножимо обидві частини рівнянь (33) на  $\cos \pi m \eta$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , і зінтегруємо за  $\eta$  від 0 до 1. Використавши значення інтеграла

$$\int_0^1 (\operatorname{sh} s_k \operatorname{ch} s_k \eta - \operatorname{ch} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta) \cos \pi m \eta \, d\eta = \frac{2(-1)^{m+1} s_k^3}{(s_k^2 + \pi^2 m^2)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (34)$$

та позначивши коефіцієнти

$$F_m = 2 \int_0^1 F(h\eta) \cos \pi m \eta \, d\eta, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (35)$$

розвинення

$$F(h\eta) = \frac{1}{2} F_0 + \sum_{m=1}^{\infty} F_m \cos \pi m \eta, \quad (36)$$

отримаємо нескінченну систему рівнянь відносно коефіцієнтів  $z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k^3 z_k}{(s_k^2 + \pi^2 m^2)^2} &= \frac{1}{8} (-1)^{m+1} F_m, \\ \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k^4 z_k}{(s_k^2 + \pi^2 m^2)^2} &= 0, \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned} \quad (37)$$

**Приклад 1.** Нехай функція  $F(y)$ , яка, згідно з третьою із крайових умов (21), задає шукану функцію на торці півсмуги, має вигляд

$$F(y) = A \left( \cos \frac{\pi y}{h} + 1 \right).$$

Додаткові умови (22) при цьому виконані. Із розвинення (36) маємо

$$F_0 = 2A, \quad F_1 = A, \quad F_m = 0, \quad m = 2, 3, \dots$$

Значення шуканої функції  $\Phi(x, y)$ , віднесені до множника  $A$ , обчислені у деяких точках всередині півсмуги, подано у табл. 1. При цьому нескінченну систему рівнянь (37) розв'язували методом редукції. Для обчислень з відносною похибкою не більшою, ніж  $10^{-6}$ , достатньо було у системі рівнянь (37) зберегти 5 комплексних невідомих і 10 рівнянь, поклавши  $k = 1, 2, \dots, 5$  і  $m = 0, 1, \dots, 4$ . Відносне відхилення обчислених значень  $\Phi/A$ , наведених у табл. 1, від результатів, отриманих у роботі [11], де обчислення проводилось за точними рекурентними формулами алгоритму П. Ф. Папковича [15], не перевищує  $10^{-4}$ .

Таблиця 1

$x/h$ $y/h$	0.5	1	1.5	2
0.75	0.21418	0.08507	0.02268	0.00293
0.5	0.67325	0.27349	0.07777	0.01245
0.25	1.10404	0.45044	0.13229	0.02330
0	1.27812	0.52154	0.15467	0.02800

**3. Бігармонічна задача для прямокутника.** Задача полягає у знаходженні розв'язку бігармонічного рівняння (20) всередині прямокутника  $-a \leq x \leq a$ ,  $-h \leq y \leq h$  (рис. 3), який на межі прямокутника задовольняє крайові умови

$$\begin{aligned} \Phi(x, \pm h) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{y=\pm h} = 0, \quad -a < x < a, \\ \Phi(\pm a, y) = F(y), \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=\pm a} = 0, \quad -h < y < h. \end{aligned} \quad (38)$$

При цьому функції  $F(y)$ ,  $F'(y)$  є неперервними на відрізку  $-h \leq y \leq h$  і виконуються додаткові умови (22). Як і в попередній задачі, три з чотирьох крайових умов задля простоти вважаємо однорідними, а функцію  $F(y)$  – парною. Тоді розв'язок  $\Phi(x, y)$  як за  $x$ , так і за  $y$  є парною функцією:

$$\Phi(-x, y) \equiv \Phi(x, y), \quad \Phi(x, -y) \equiv \Phi(x, y). \quad (39)$$

Задача (20), (38) методами однорідних розв'язків і суперпозиції може бути зведена до нескінченних систем лінійних алгебричних рівнянь [10], а також можемо отримати точний її розв'язок у вигляді рядів за власними функціями Папковича – Фадля [8].

Продовжимо перші дві із крайових умов (38) на інтервали  $a < x < \infty$ ,  $-\infty < x < -a$ , вважаючи функції  $f(x)$ ,  $g(x)$  невідомими на цих інтервалах, та скористаємося розв'язком (25) задачі (20), (24) для смуги. Поклавши

$$x = h\xi, \quad y = h\eta, \quad \mu = -\frac{\tau}{h}, \quad r = h\zeta, \quad \lambda = \frac{a}{h}, \quad (40)$$

із (25) матимемо

$$\begin{aligned} \Phi = \frac{2}{\pi} \int_{\lambda}^{\infty} \left( f(h\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} [(\operatorname{sh} \tau + \tau \operatorname{ch} \tau) \operatorname{ch} \tau \eta - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} \tau \cdot \tau \eta \operatorname{sh} \tau \eta] \frac{1}{\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau} \cos \tau \zeta \cdot e^{i\tau \xi} d\tau + \right. \\ \left. + h g(h\zeta) \int_{-\infty}^{\infty} [-\operatorname{sh} \tau \operatorname{ch} \tau \eta + \operatorname{ch} \tau \cdot \eta \operatorname{sh} \tau \eta] \times \right. \\ \left. \times \frac{1}{\operatorname{sh} 2\tau + 2\tau} \cos \tau \zeta \cdot e^{i\tau \xi} d\tau \right) d\zeta, \end{aligned} \quad (41)$$

або після перетворення внутрішніх інтегралів:

$$\begin{aligned} \Phi = -4 \int_{\lambda}^{\infty} \left( f(h\zeta) \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} [(\operatorname{sh} s_k + s_k \operatorname{ch} s_k) \operatorname{ch} s_k \eta - \right. \\ \left. - s_k \operatorname{sh} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta] \frac{1}{\operatorname{ch} 2s_k + 1} e^{is_k \zeta} \cos s_k \xi + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + hg(h\zeta) \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} [-\operatorname{sh} s_k \operatorname{ch} s_k \eta + \\
& + \operatorname{ch} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta] \frac{1}{\operatorname{ch} 2s_k + 1} e^{is_k \zeta} \cos s_k \xi \Big) d\zeta. \quad (42)
\end{aligned}$$

Позначивши

$$z_k = \int_{\lambda}^{\infty} \frac{f(h\zeta) \operatorname{sh}^2 s_k + hg(h\zeta)}{\operatorname{ch} 2s_k + 1} e^{is_k \zeta} d\zeta, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (43)$$

та скориставшись рівністю (29), із (42) отримаємо

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y) = 4 \operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{sh} s_k \operatorname{ch} s_k \eta - \operatorname{ch} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta) z_k \cos s_k \xi, \\
\xi = \frac{x}{h}, \quad \eta = \frac{y}{h}. \quad (44)
\end{aligned}$$

Подання (44), у якому  $z_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , – невідомі комплексні коефіцієнти, використовується при розв’язанні бігармонічної задачі для прямокутника методом однорідних розв’язків і знаходиться зазвичай методом відокремлення змінних [10]. Згідно з рівністю (43), коефіцієнти цього подання є функціоналами від функцій  $f(x)$ ,  $g(x)$  із продовжених на всю числову вісь перших двох крайових умов (38) на сторонах  $y = \pm h$  прямокутника.

Задовольнивши поданням (44) третю та четверту із крайових умов (38), отримуємо систему функціональних рівнянь

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{sh} s_k \operatorname{ch} s_k \eta - \operatorname{ch} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta) z_k \cos \lambda s_k = \frac{1}{4} F(h\eta), \\
\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} s_k (\operatorname{sh} s_k \operatorname{ch} s_k \eta - \operatorname{ch} s_k \cdot \eta \operatorname{sh} s_k \eta) z_k \sin \lambda s_k = 0, \quad 0 < \eta < 1, \quad (45)
\end{aligned}$$

яку методом Бубнова – Гальоркіна з урахуванням значення інтеграла із (34) зводимо до нескінченної системи алгебричних рівнянь

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k^3 \cos \lambda s_k}{(s_k^2 + \pi^2 m^2)^2} z_k = \frac{1}{16} (-1)^{m+1} F_m, \\
\operatorname{Im} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k^4 \sin \lambda s_k}{(s_k^2 + \pi^2 m^2)^2} z_k = 0, \quad m = 0, 1, \dots, \quad (46)
\end{aligned}$$

де послідовність  $F_m$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , визначена рівністю (35).

**Приклад 2.** Розглянемо приклад із книги [19] про розтяг квадрата ( $a = h$ ,  $\lambda = 1$ ) нормальними зусиллями  $\sigma_x|_{x=\pm a} = p(1 - y^2/h^2)$ ,  $p > 0$ , які параболічно розподілені вздовж сторін  $x = \pm a$ , з вільними сторонами  $y = \pm h$ . У [19] числові розрахунки проведено варіаційним методом Рітца. У роботі [10] цю задачу розв’язано методом суперпозиції.

Напружений стан квадрата подамо як суперпозицію двох станів: з рівномірно розподіленими зусиллями  $\frac{2}{3}p$  та із зрівноваженими вздовж кожної із сторін  $x = \pm a$  зусиллями  $p(1/3 - y^2/h^2)$ . Для першого стану маємо елементарний розв’язок з незмінними в усьому квадраті напруженнями  $\sigma_x$  і нульовими напруженнями  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . Другому стану відповідає бігармонічна задача (20), (38) для функції Ері  $\Phi(x, y)$ . Напруження виражаються через

функцію Ері:

$$\sigma_x = \frac{2}{3}p + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}.$$

Поклавши  $F''(y) = p(1/3 - y^2/h^2)$ , з урахуванням умов (22) і залученням рівності (35) знаходимо

$$\frac{1}{ph^2} F(y) = -\frac{\eta^4}{12} + \frac{\eta^2}{6} - \frac{1}{12}, \quad \eta = \frac{y}{h},$$

$$\frac{1}{ph^2} F_0 = -\frac{4}{45}, \quad \frac{1}{ph^2} F_m = (-1)^m \frac{4}{\pi^4 m^4}, \quad m = 1, 2, \dots$$

У табл. 2 наведено порівняння результатів обчислень методом суперпозиції [10] і методом однорідних розв'язків нормальних напружень  $\sigma_x$  на половині сторони  $x = a$  квадрата, що відповідає точності виконання здиференційованої двічі третьою із крайових умов (38). При розв'язанні задачі методом суперпозиції розв'язок нескінченної системи алгебричних рівнянь знаходили простою редукцією з  $n = 14$  і  $n = 74$  рівняннями та поліпшеною редукцією (із застосуванням закону асимптотичних виразів Кояловича) з  $n = 15$  рівняннями, а при розв'язанні методом однорідних розв'язків – простою редукцією з  $n = 14$  і  $n = 74$  рівняннями. Табличні дані свідчать, що точність виконання крайової умови для нормальних напружень обома методами із застосуванням простої редукції приблизно однакова на всій стороні  $x = a$ , крім кутової точки  $x = a$ ,  $y = a$  ( $y/h = 1$ ) та поблизу неї ( $y/h = 0.8, 0.9$ ). У кутовій точці та в її околі метод суперпозиції за простою редукцією дає неправильні результати (більш детально це описано в [10]), а метод однорідних розв'язків – правильні. Водночас, для досягнення точності до 0.1 % при розв'язанні методом суперпозиції за поліпшеною редукцією треба взяти  $n = 15$  рівнянь, а методом однорідних розв'язків значно більше –  $n = 74$ .

Обчислений різними методами розподіл нормальних напружень  $\sigma_x$  уздовж половини осі симетрії  $x = 0$  квадрата подано у табл. 3. Кількість рівнянь  $n = 2$  і  $n = 14$  відповідають простій редукції, а  $n = 3$  і  $n = 15$  – поліпшеній редукції. Тут збіжність (за кількістю рівнянь) у методі однорідних розв'язків навіть трохи вища, ніж у методі суперпозиції при застосуванні поліпшеної редукції. З точністю до 0.1 % результати обчислень за цими двома методами збігаються. Метод Рітца (друге наближення за результатами із [19]) дає похибку до 2.5 %.

Таблиця 2

$y/h$	$\frac{1}{p} \sigma_x \Big _{x=a}$					
	Точне значення	Метод суперпозиції			Метод однорідних розв'язків	
		$n = 14$	$n = 74$	$n = 15$	$n = 14$	$n = 74$
0	1	1.016	1.000	1.000	1.013	1.000
0.2	0.96	0.961	0.960	0.960	0.958	0.960
0.4	0.84	0.830	0.833	0.840	0.828	0.840
0.6	0.64	0.637	0.640	0.640	0.644	0.640
0.8	0.36	0.407	0.371	0.360	0.370	0.361
0.9	0.19	0.243	0.206	0.191	0.184	0.190
1.0	0	0.314	0.318	0.001	0.006	0.0005

Таблиця 3

$y/h$	$\frac{1}{p} \sigma_x \Big _{x=0}$						
	Метод Рітца	Метод суперпозиції				Метод однорідних розв'язків	
		$n = 2$	$n = 14$	$n = 3$	$n = 15$	$n = 2$	$n = 14$
0	0.862	0.849	0.859	0.863	0.859	0.860	0.859
0.2	0.831	0.819	0.829	0.829	0.829	0.830	0.829
0.4	0.763	0.739	0.745	0.742	0.745	0.746	0.745
0.6	0.609	0.632	0.623	0.619	0.623	0.624	0.624
0.8	0.496	0.516	0.498	0.497	0.497	0.496	0.497
1.0	0.417	0.377	0.404	0.428	0.411	0.409	0.411

Якщо у цьому прикладі не перейти до зрівноваженого навантаження на сторонах  $x = \pm a$ , то друга із додаткових умов (22) не буде виконана. Розрахунки у такому випадку показують, що зі збільшенням кількості алгебричних рівнянь  $n$  при застосуванні редукції результати обчислень функції  $\Phi(a, y)$  збігаються до заданої за третьою із крайових умов функції  $F(y)$ , для напружень  $\sigma_x$  на стороні  $x = a$  – розбігаються, а тих самих напружень  $\sigma_x$  на осі симетрії  $x = 0$  квадрата – збігаються, але до неправильних значень (обчислені значення  $\sigma_x$  на осі  $x = 0$  навіть переходять у від'ємні при  $y/h = 0.8, 0.9, 1.0$ ). Отже, невиконання додаткових умов (22) унеможливає розв'язання бігармонічної задачі методом однорідних розв'язків.

**Висновки.** Застосування методу продовження крайових умов до першої крайової задачі для пружної чверті площини дещо спрощує її традиційне розв'язання методом інтегрального перетворення Мелліна. Новий спосіб розв'язання цієї задачі може стати корисним для контролю правильності отриманих результатів.

У бігармонічних задачах для півсмути та прямокутника метод продовження крайових умов приводить до подань розв'язків, які збігаються із відповідними поданнями у методі однорідних розв'язків. Завдяки цьому надано зміст невідомим коефіцієнтам у цих поданнях як певним функціоналам від функцій із продовжених крайових умов. Знайдено просте доведення повноти системи власних функцій, за якими здійснюється розвинення шуканої бігармонічної функції у методі однорідних розв'язків. Наведено порівняльний аналіз результатів обчислень і їх збіжності методами однорідних розв'язків і суперпозиції. З'ясовано необхідність виконання додаткових умов при розв'язанні бігармонічної задачі методом однорідних розв'язків.

Метод продовження крайових умов можна застосовувати при розв'язанні тривимірних задач теорії пружності, а також інших крайових задач математичної фізики для одного або системи диференціальних рівнянь із частинними похідними.

1. Ворович И. И., Ковальчук В. Е. О базисных свойствах одной системы однородных решений // Прикл. математика и механика. – 1967. – 31, № 5. – С. 861–870.
2. Григолюк Э. И. Метод Бубнова. Истоки. Формулировка. Развитие. – Москва: Изд-во Ин-та механики Моск. гос. ун-та, 1996. – 58 с.
3. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф. Равновесие упругих тел канонической формы. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с.
4. Зверяев Е. М., Коваленко М. Д., Аbruков Д. А., Меньшова И. В., Кержаев А. П. О разложениях по функциям Папковича-Фадля в задаче изгиба пластины // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2019. – № 38. – 28 с.  
– <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-38>.

5. Зверьяев Е. М., Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Кержаев А. П. О свойствах точных решений краевых задач теории упругости в полуполосе и их приложение к теории остаточных напряжений в горных породах // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2018. – № 56. – 28 с.  
– <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-56>.
6. Коваленко М. Д., Меньшова И. В. Особенности точных решений краевых задач теории упругости в полуполосе // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естественные науки. – 2017. – № 4. – С. 52–64.
7. Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Кержаев А. П. Неоднородная задача теории упругости в полуполосе. Точное решение // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2020. – № 6. – С. 33–39.
8. Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Кержаев А. П., Шуляковская Т. Д. Некоторые решения теории упругости для прямоугольника // Прикл. математика и механика. – 2021. – **85**, № 3. – С. 370–382.
9. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – Москва: Высш. шк., 1970. – 712 с.
10. Мелешко В. В. Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2004. – **47**, № 3. – С. 45–68.
11. Мелешко В. В., Токовий Ю. В. Про алгоритм П. Ф. Папковича в методі одновимірних розв'язків для двовимірної бігармонічної задачі в прямокутній області // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2006. – **49**, № 4. – С. 69–83.
12. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – Москва: Наука, 1966. – 708 с.  
Те саме: *Muskhelishvili N. I. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity.* – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1977. – xxxi+732 p.
13. Острик В. И. Симетрія інверсії розв'язків основних крайових задач двовимірної теорії пружності для клина // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2017. – **60**, № 4. – С. 90–110.  
Те саме: *Ostrik V. I. Inversion symmetry of the solutions of basic boundary-value problems of two-dimensional elasticity theory for a wedge* // J. Math. Sci. – 2020. – **247**, No. 1. – P. 108–138.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04792-3>.
14. Острик В. И. Про метод продовження крайових умов у задачах теорії пружності // Сучасні проблеми термомеханіки: Зб. наук. праць Міжнар. наук. конф. та міні-симпозиумів. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2021. – 215 с. – С. 101–102.  
– <http://iapmm.lviv.ua/cpt2021/materials/C02.05.pdf>.
15. Папкович П. Ф. Об одной форме решения плоской задачи теории упругости для прямоугольной полосы // Докл. АН СССР. – 1940. – **27**, № 4. – С. 335–339.
16. Прокопов В. К. Обзор работ по однородным решениям теории упругости и их приложениям // Тр. Ленингр. политехн. ин-та. – 1967. – № 279. – С. 31–46.
17. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды: В 3 т. – Т. 1: Элементарные функции. – Москва: Наука, 1981. – 798 с.  
Те сама: *Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integrals and series: Vol 1: Elementary functions.* – New York: Gordon & Breach Sci. Publ., 1986. – 798 p.
18. Снеддон И. Преобразование Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.  
Те саме: *Sneddon I. Fourier transforms.* – New York: McGraw-Hill, 1951. – 542 p.
19. Тимошенко С. П. Теория упругости. – Ленинград – Москва: Гостехтеоретиздат, 1934. – 451 с.
20. Улитко А. Ф. Векторные разложения в пространственной теории упругости. – Киев: Академперіодика, 2002. – 342 с.
21. Gregory R. D. The semi-infinite strip  $x \geq 0$ ,  $-1 \leq y \leq 1$ ; completeness of the Papkovitch – Fadle eigenfunctions when are  $\Pi_{xx}(0, y)$ ,  $\Pi_{yy}(0, y)$  prescribed // J. Elasticity. – 1980. – **10**, No. 1. – P. 57–80.  
– <https://doi.org/10.1007/BF00043135>.
22. Kovalenko M. D., Menshova I. V., Kerzhaev A. P. On the exact solutions of the biharmonic problem of the theory of elasticity in a half-strip // Z. Angew. Math. Phys. – 2018. – Article number: 121.  
– <https://doi.org/10.1007/s00033-018-1013-y>.

## METHOD OF CONTINUATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS IN THE PROBLEMS OF ELASTICITY THEORY

*To find solutions of plane problems of the theory of elasticity in domains bounded by two pairs of different coordinate lines, it is proposed to use solutions of simpler problems for domains bounded by one pair of coordinate lines, with additional assignment of boundary conditions of the original problem outside the domain. The method is illustrated by finding solutions of boundary value problems of the theory of elasticity for a quarter plane, a half strip and a rectangle.*

**Key words:** *boundary conditions, elastic quarter plane, half strip, rectangle, biharmonic problem.*

Ін-т прикл. фізики НАН України, Суми

Одержано  
17.08.21