

ВЗАЄМОДІЯ ШТАМПІВ КАНОНІЧНОЇ ФОРМИ З ПРУЖНОЮ ОСНОВОЮ З ДВОМА КОЕФІЦІЄНТАМИ ПОСТЕЛІ

Розв'язано контактну задачу про взаємодію штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі (плоска задача). Задачу зведено до розв'язання інтегральних рівнянь Фредгольма першого роду, отримано аналітичний розв'язок. Виконано числовий аналіз контактної тиску, переміщення штампів та переміщення у пружній основі, залежності величини області контакту від навантаження контактної пари та форми штампів, а також виконано порівняння для аналогічних задач з пружною півплощиною.

Ключові слова: штампів канонічної форми, інтегральні рівняння Фредгольма першого роду, контактний тиск, переміщення штампів.

Вступ. Взаємодія контактних пар із канонічними формами поверхонь моделює практично більшість випадків роботи фрикційних вузлів. Контактні задачі для штампів канонічної форми (циліндричної, еліптичної, гіперболічної) з пружною півплощиною (плоска задача) мають низку особливостей [6, 7].

У першу чергу, це методи розв'язування, які зводять задачу до обчислення еліптичних інтегралів третього роду в усьому діапазоні вхідних параметрів і зведення їх до інтегралів Карлсона [9]. Крім того, у задачах для пружної півплощини не можна обчислити переміщення у пружній основі, що є особливо важливим для оцінки роботоздатності контактної пари. Цей недолік притаманний усім задачам, у яких пружне тіло моделюється пружною півплощиною.

У цій роботі запропоновано математичну модель контактної взаємодії жорстких штампів різної канонічної форми з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі [2, 8]. Для штампів простих форм (параболічної, клиновидної, плоскої) задачу розв'язано методом підстановки [4], однак цей метод не підходить для штампів канонічних форм. З використанням особливості ядра інтегрального рівняння Фредгольма першого роду [1], до розв'язання якого зведено контактну задачу, знайдено аналітичний розв'язок інтегрального рівняння для будь-яких форм штампів, у тому числі канонічних. Проведено числовий аналіз та порівняння результатів для штампів канонічних форм для моделей пружної півплощини та пружної основи з двома коефіцієнтами постелі.

1. Постановка задачі та розв'язок інтегрального рівняння. Розглядається контактна взаємодія штампів довільної форми $f(x)$ з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі (рис. 1). Тут ν та E – коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга основи, $-a \leq x \leq a$ – невідома область контакту, δ – невідоме зміщення штампів як жорсткого тіла, H – товщина пружного шару, $V(x)$ – прогин поверхні шару, який для невідомого контактної тиску $p(x)$ визначається за формулами [4]:

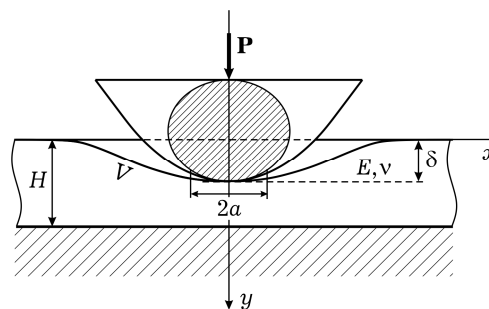


Рис. 1

✉ sachykyra@gmail.com

$$V(x)|_{y=0} = \begin{cases} C \int_{-a}^a p(\xi) e^{+\alpha(x-\xi)} d\xi, & x < -a, \\ C \int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha|x-\xi|} d\xi, & x \in [-a, a], \\ C \int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha(x-\xi)} d\xi, & x > a, \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{де } C = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{3(1-\nu)}{2}}, \quad \alpha = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{6}{1-\nu}}.$$

Очевидно, що прогин пружної основи в області контакту $-a \leq x \leq a$ становить $\delta - f(x)$ (див. рис. 1), тому з урахуванням (1) отримуємо інтегральне рівняння для визначення контактної тиску:

$$\delta - f(x) = C \int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha|x-\xi|} d\xi, \quad x \in [-a, a]. \quad (2)$$

Рівняння (2) є інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду, оскільки ядро задовольняє умову

$$\int_{-a}^a \int_{-a}^a e^{-2\alpha|x-\xi|} dx d\xi = \frac{2a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} (e^{-4\alpha a} - 1) < \infty.$$

Продиференціювавши два рази рівняння (2), отримаємо рівняння Фредгольма другого роду:

$$p(x) - \frac{\alpha}{2} \int_{-a}^a p(\xi) e^{-\alpha|x-\xi|} d\xi = \frac{1}{2\alpha C} f''(x), \quad (3)$$

розв'язок якого для довільної $f(x)$, з огляду на (2) та (3), матиме вигляд

$$p(x) = \frac{\alpha}{2C} \left(\delta - f(x) + \frac{1}{\alpha^2} f''(x) \right). \quad (4)$$

Зв'язок між силою P та шириною області контакту $-a \leq x \leq a$ визначаємо з умови рівноваги штампця:

$$P = \int_{-a}^a p(x) dx. \quad (5)$$

Зауваження 1. Диференціюючи (3) ще два рази з урахуванням (2), отримуємо для визначення контактної тиску диференціальне рівняння

$$p''(x) + \alpha^2 p(x) = \frac{\alpha^3}{2C} (\delta - f(x)) + \frac{1}{2\alpha C} f'''(x).$$

Зауваження 2. Ядро інтегрального рівняння (2) або (3) при $\alpha = 1$ співпадає з ядром інтегрального рівняння Лалеско – Пікара [10], приклад розв'язання якого на всій числовій осі для конкретної правої частини за допомогою перетворення Фур'є наведено в [1].

За відомим розв'язком (4) невідоме зміщення штампця δ знаходимо з умови неперервності прогину (1) у точках $x = \pm a$:

$$\begin{aligned} V(|x| \leq a)|_a &= V(x \geq a)|_a, \\ V(|x| \leq a)|_{-a} &= V(x \leq -a)|_{-a}. \end{aligned} \quad (6)$$

Проведемо цю процедуру для штампця з довільною формою основи $f(x)$. Для $x > a$ запишемо

$$\begin{aligned}
V(x) &= C \int_{-a}^a e^{-\alpha(x-t)} p(t) dt = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha x} \int_{-a}^a e^{\alpha t} (\delta - f(t) + \frac{1}{\alpha^2} f''(t)) dt = \\
&= \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha x} \left(\frac{\delta}{\alpha} (e^{\alpha a} - e^{-\alpha a}) - \int_{-a}^a f(t) e^{\alpha t} dt + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\alpha^2} \left[e^{\alpha a} f'(\alpha) - e^{-\alpha a} f'(-a) - \alpha (e^{\alpha a} f(a) - e^{-\alpha a} f(-\alpha)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \alpha^2 \int_{-a}^a f(t) e^{\alpha t} dt \right] \right) = \frac{1}{2} e^{-\alpha(x-a)} \left(\delta + \frac{f'(a)}{\alpha} - f(a) \right) + \\
&\quad + \frac{1}{2} e^{-\alpha(x+a)} \left(-\delta - \frac{f'(-a)}{\alpha} \right). \tag{7}
\end{aligned}$$

Тут використано таке співвідношення:

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^a f''(t) e^{\alpha t} dt &= e^{\alpha a} f'(a) - e^{-\alpha a} f'(-a) - \alpha (e^{\alpha a} f(a) - e^{-\alpha a} f(-a)) + \\
&\quad + \alpha^2 \int_{-a}^a e^{\alpha t} f(t) dt.
\end{aligned}$$

З умови неперервності (6) отримуємо остаточні формули:

$$\delta = f(a) - \frac{f'(a)}{\alpha}, \tag{8}$$

$$V(x) = \begin{cases} \frac{f'(a)}{\alpha} e^{\alpha(x+a)}, & x < -a, \\ f(-a) - f(x) - \frac{f'(-a)}{\alpha}, & x \in [-a, a], \\ \frac{f'(a)}{\alpha} e^{-\alpha(x-a)}, & x > a, \end{cases} \tag{9}$$

$$p(x) = \frac{\alpha}{2C} \left(f(-a) - f(x) - \frac{f'(-a)}{a} + \frac{1}{\alpha^2} f''(x) \right). \tag{10}$$

З умови рівноваги (5) отримуємо вираз для знаходження величини області контакту:

$$P = \frac{\alpha}{C} \left(a f(-a) - \frac{a f'(-a)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} f'(a) - \frac{1}{2} \int_{-a}^a f(x) dx \right). \tag{11}$$

2. Контактні задачі для канонічних штампів.

2.1. *Параболічний штамп:* $f(x) = \frac{x^2}{2R}$.

$$\delta = \frac{a^2}{2R} + \frac{a}{\alpha R}, \tag{12}$$

$$P = \frac{\alpha a}{CR} \left(\frac{a^2}{3} + \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right) \tag{12}$$

$$p(x) = \frac{\alpha}{2CR} \left(\frac{a^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{a}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \right), \tag{13}$$

$$V(x) = \begin{cases} \frac{a}{\alpha R} e^{\alpha(x+a)}, & x < -a, \\ \frac{a^2}{2R} - \frac{x^2}{2R} + \frac{a}{\alpha R}, & x \in [-a, a], \\ \frac{a}{\alpha R} e^{-\alpha(x-a)}, & x > a, \end{cases} \quad (14)$$

Формули (12)–(14) повністю співпадають з розв’язком [4], де розв’язок отримано методом підстановки. Однак для випадків штампів циліндричної, еліптичної та гіперболічної форм (див. [6]) аналітичний розв’язок методом підстановки отримати не вдається, оскільки інтеграл $\int_{-a}^a e^{\alpha t} \sqrt{a^2 - t^2} dt$ не виражається через елементарні функції.

2.2. Циліндричний штамп: $f(x) = R - \sqrt{R^2 - x^2}$.

Із формул (8)–(11) отримуємо

– зміщення штамп

$$\delta = R \left(1 - \sqrt{1 - (a/R)^2} + \frac{a}{(\alpha R^2) \sqrt{1 - (a/R)^2}} \right),$$

– контактний тиск

$$p(x) = \frac{\alpha}{2C} \left(\sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 - a^2}} + \frac{R^2}{\alpha^2 (\sqrt{R^2 - x^2})^3} \right),$$

– умова для визначення величини області контакту

$$P = \frac{\alpha}{2C} \left(R^2 \arcsin(a/R) - aR \sqrt{1 - (a/R)^2} + \frac{2a(a + 1/\alpha)}{\alpha R \sqrt{1 - (a/R)^2}} \right),$$

– прогин поверхні основи ($y = 0$)

$$V(x) = \begin{cases} \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 - a^2}} e^{\alpha(x+a)}, & x < -a, \\ \sqrt{R^2 - x^2} - \sqrt{R^2 - a^2} + \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 - a^2}}, & x \in [-a, a], \\ \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 - a^2}} e^{-\alpha(x-a)}, & x > a. \end{cases}$$

2.3. Еліптичний штамп: $f(x) = b_1 - \frac{b_1}{a_1} \sqrt{a_1^2 - x^2}$, де a_1, b_1 – велика та мала півосі еліпса.

Для зручності та коректності обчислень приймаємо $a_1 = R, b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$ (циліндричний штамп при $\varepsilon = 0$). Тоді $f(x) = (1 \pm \varepsilon)(R - \sqrt{R^2 - x^2})$ і всі формули для еліптичного штамп автоматично співпадають з формулами для циліндричного штамп з множником $(1 \pm \varepsilon)$.

2.4. Гіперболічний штамп: $f(x) = (1 \pm \varepsilon)(-R + \sqrt{R^2 + x^2})$. Тут $a_1 = R$ та $b_1 = R(1 \pm \varepsilon)$ – дійсна та уявна півосі гіперболи. За формулами (8)–(11) отримуємо розв’язок інтегрального рівняння (2):

– зміщення штамп

$$\delta = (1 \pm \varepsilon) \left(-R + \sqrt{R^2 + a^2} + \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 + a^2}} \right),$$

– контактний тиск

$$p(x) = \frac{\alpha}{2C} (1 \pm \varepsilon) \left(\sqrt{R^2 + a^2} - \sqrt{R^2 + x^2} + \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 + a^2}} + \frac{R^2}{\alpha^2 (\sqrt{R^2 + x^2})^3} \right),$$

– умова для визначення величини області контакту

$$P = (1 \pm \varepsilon) \frac{R^2 \alpha}{C} \left(\left[\frac{a}{R} + \frac{1}{\alpha R} \right] \frac{a}{\alpha R^2 \sqrt{1 + (a/R)^2}} + \frac{1}{2} \frac{a}{R} \sqrt{1 + (a/R)^2} - \frac{1}{4} \ln \frac{a/R + \sqrt{(a/R)^2 + 1}}{\sqrt{(a/R)^2 + 1} - a/R} \right).$$

– прогин поверхні основи ($y = 0$)

$$V(x) = \begin{cases} (1 \pm \varepsilon) \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 + a^2}} e^{\alpha(x+a)}, & x < -a, \\ (1 \pm \varepsilon) \left(\frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 + a^2}} + \sqrt{R^2 + a^2} - \sqrt{R^2 + x^2} \right), & x \in [-a, a], \\ (1 \pm \varepsilon) \frac{a}{\alpha \sqrt{R^2 + a^2}} e^{-\alpha(x-a)}, & x > a. \end{cases}$$

3. Числові розрахунки. Числовий аналіз проведено для таких безрозмірних величин: $\bar{x} = \frac{x}{R}$, $\bar{a} = \frac{a}{R}$, $\bar{P} = \frac{P}{ER}$, $\bar{p}(x) = \frac{p(x)}{E}$, $\bar{\delta} = \frac{\delta}{R}$, $\bar{H} = \frac{H}{R}$, $\bar{V}(\bar{x}) = \frac{V(x)}{R}$, $\bar{\alpha} = \alpha R$. Надалі рисочки опускаємо.

На рис. 2 наведено розподіли контактних тисків при контактній взаємодії штампів циліндричної, еліптичної, параболічної, гіперболічної форм з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі при фіксованій півширині області контакту $a = 0.1$, $H = 0.5$, $\nu = 0.3$ і заданій силі P для кожного штамп. Крива **1** відповідає штампі циліндричної форми при $P_1 = 0.0285$; крива **2** – штампі параболічної форми при $P_2 = 0.0283$; крива **3** – штампі еліптичної форми при $\varepsilon = -0.01$ і $P_3 = 0.0282$; крива **4** – штампі гіперболічної форми при $\varepsilon = -0.01$ і $P_4 = 0.0403$.

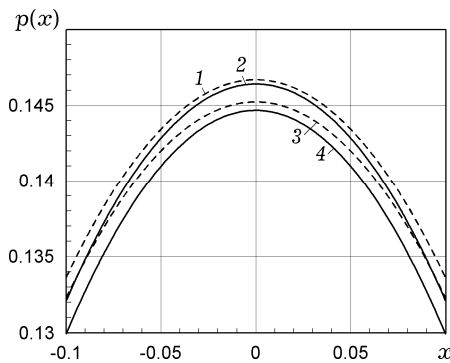


Рис. 2

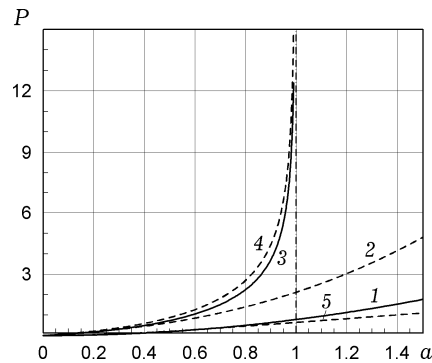


Рис. 3

На рис. 3 наведено залежність сили P , прикладеної до штампі, від півширини області контакту a при $H = 2$, $\nu = 0.3$. Крива **1** відповідає штампі

параболічної форми (пружний півпростір без покриття); крива 2 – штампу параболічної форми (пружна основа з двома коефіцієнтами постелі); крива 3 – штампу циліндричної форми (пружна основа з двома коефіцієнтами постелі); крива 4 – штампу еліптичної форми при $\varepsilon = 0.2$ (пружна основа з двома коефіцієнтами постелі); крива 5 – штампу гіперболічної форми при $\varepsilon = 0.2$ (пружна основа з двома коефіцієнтами постелі).

На рис. 4 наведено графіки зміщення δ для штампу циліндричної форми при контактній взаємодії з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі і півшириною області контакту $a = 0.5$. Криві 1–3 відповідають значенням товщини покриття $H = 0.5, 1.0, 1.5$.

На рис. 5 наведено прогин $V(x)$ поверхні пружного шару при $y = 0$ при контактній взаємодії штампу циліндричної форми з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі при півширині області контакту $a = 0.1$. Криві 1–3 відповідають значенням товщини покриття $H = 0.5, 1.0, 1.5$.

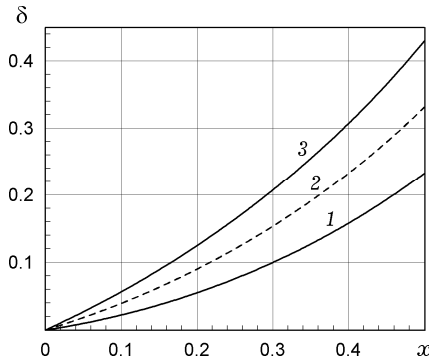


Рис. 4

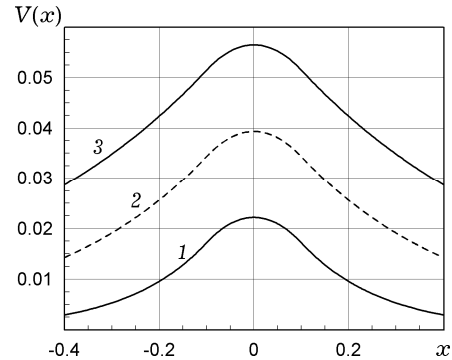


Рис. 5

На рис. 6 наведено прогини $V(x)$ поверхні пружного шару при $y = 0$ при контактній взаємодії штампів циліндричної, параболічної, гіперболічної форм з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі при фіксованій півширині області контакту $a = 0.5$, $H = 1$, $\nu = 0.3$. Крива 1 відповідає штампі гіперболічної форми при $\varepsilon = -0.01$; крива 2 – штампі параболічної форми; крива 3 – штампі циліндричної форми.

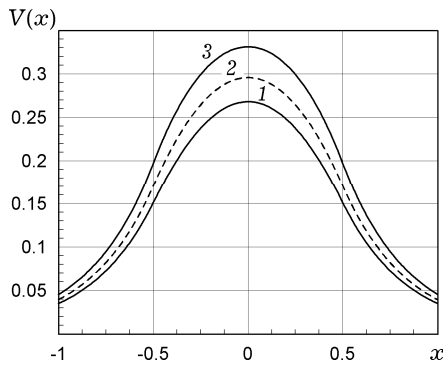


Рис. 6

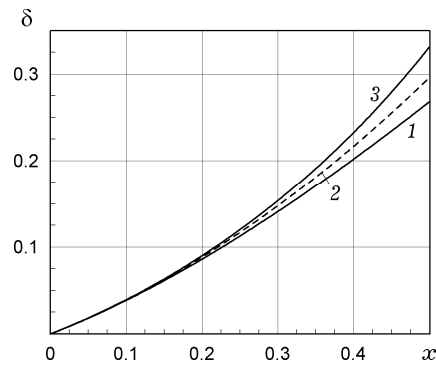


Рис. 7

На рис. 7 наведено графіки зміщення δ для штампів циліндричної, параболічної, гіперболічної форм при контактній взаємодії з пружною основою з двома коефіцієнтами постелі при $a = 0.5$, $H = 1$, $\nu = 0.3$. Тут крива 1 відповідає штампі гіперболічної форми при $\varepsilon = -0.01$; крива 2 – штампі параболічної форми; крива 3 – штампі циліндричної форми. Як бачимо на рис. 7, при малих областях контакту зміщення для всіх форм штампів є дуже близьким.

Висновки. Особливості ядра інтегрального рівняння Фредгольма першого роду, отриманого в роботі, відображають специфіку пружної основи з двома коефіцієнтами постелі та дозволяють звести його до рівняння Фредгольма другого роду, для якого отримано аналітичний розв'язок для штампів довільної форми. Виконано числовий аналіз результатів за параметрами задачі та верифікацію їх із результатами, отриманими для пружної півплощини (див. [3, 5, 6]).

1. Васильєва А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. – Москва: Физматлит, 2002. – 160 с.
2. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – Москва: Физматгиз, 1960. – 491 с.
3. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – Москва: Мир, 1989. – 510 с.
Te same: Johnson K. L. Contact mechanics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. – xii+452 p.
4. Максимук О. В., Сачук Ю. В., Яцюк С. М. Плоскі контактні задачі для пружної основи з двома коефіцієнтами постелі // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 3. – С. 130–135.
5. Острик В. І. Контактна механіка: Підруч. – Київ: ВПЦ «Київський університет», 2015. – 560 с.
6. Сачук Ю. В., Максимук О. В. Аналіз напружено-деформованого стану у тілі під дією різних за формою жорстких штампів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2014. – **57**, № 4. – С. 162–167.
Te same: Sachuk Yu. V., Maksymuk O. V. Analysis of the stress-strain state of a body under the action of rigid punches of different shapes // *J. Math. Sci.* – 2017. – **220**, No. 2. – P. 204–212. – <https://doi.org/10.1007/s10958-016-3177-3>.
7. Сачук Ю., Максимук О. Еліптичні інтеграли третього роду в задачах контактної взаємодії // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2014. – Вип. 20. – С. 180–187.
8. Balabušić M., Folić B., Ćorić S. Bending the foundation beam on elastic base by two reaction coefficient of Winkler's subgrade // *Open J. Civil Eng.* – 2019. – **9**, No. 2. – P. 123–134. – <https://doi.org/10.4236/ojce.2019.92009>.
9. Beebe Nelson H. F. The mathematical-function computation handbook: programming using the MathCW portable software library. – Cham: Springer, 2017. – xxxvi+1115 p.
10. Polianin A. D., Manzhirov A. V. Handbook of integral equations. – Boca Raton: CRC Press, 1998. – 796 p.

INTERACTION OF PUNCHES OF CANONICAL SHAPES WITH AN ELASTIC BASE WITH TWO BEDDING COEFFICIENTS

The contact problems on interaction of the punches of canonical shapes (cylindrical, elliptic, hyperbolic) with an elastic base with two bedding coefficients (plane problem) are analyzed. The problems are reduced to solving Fredholm integral equations of the first kind. The analytical solution is found. The numerical analyses of contact pressure, punch displacement, displacement of the elastic base and dependence of the value of contact region on the load of contact pair and the shape of the punch are carried out. The results are compared to those of the similar problems for elastic half-plane.

Key words: punches of canonical shapes, Fredholm integral equations of the first kind, contact pressure, displacement of punch.

¹ Львів. нац. ун-т ім. І. Франка, Львів,

² Волин. нац. ун-т ім. Л. Українки, Луцьк,

³ Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів