

## ВЗАЄМОДІЯ ТРІЩИНИ І ВКЛЮЧЕННЯ В ЦИЛІНДРИЧНОМУ ТІЛІ ПРИ КОЛИВАННЯХ ПОЗДОВЖНЬОГО ЗСУВУ

Розв'язано задачу про визначення напруженого стану в нескінченно довгому циліндрі довільного поперечного перерізу при коливаннях поздовжнього зсуву та взаємодії наскрізних дефектів (тріщина і тонке жорстке включення). Застосовано метод, який дозволяє задовольнити умови на поверхнях дефектів та крайові умови гармонічного за часом навантаження. Отримано наближені формули для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень, за допомогою яких досліджено вплив геометричних параметрів перерізу циліндра на значення резонансних частот.

**Ключові слова:** нескінченно довгий циліндр, тріщина, включення, гармонічні коливання, коефіцієнти інтенсивності напружень, резонансні ефекти.

**Вступ.** На сьогоднішній день проблема визначення динамічного напруженого стану і дослідження резонансних явищ в обмежених тілах з дефектами у вигляді тріщин і тонких включень не є цілком вирішеною. Застосування прямих числових методів (зокрема, методів скінченних різниць і скінченних елементів) [23–26, 28, 29] потребує дискретизації рівнянь руху в усій області. Окрім того, наявність сингулярностей напружень в околах дефектів вимагає відповідного згущення сітки дискретизації або використання сингулярних елементів [25, 26, 29]. Згущення сітки дискретизації є принциповим чинником для забезпечення точності розрахунків при взаємному зближенні дефектів або близькості їх до межі тіла. Тому такі числові розрахунки здійснювали, зокрема, у наведених працях для кругових і прямокутних тіл із поодинокими дефектами, віддаленими від межі тіла щонайменше на відстань порядку довжини дефекту.

В останні роки для розв'язання динамічних задач теорії пружності для тіл з дефектами дедалі ширше використовують методи граничних інтегральних рівнянь (ГІР) та граничних елементів [12, 19, 27]. Застосування цих методів у різних модифікаціях для розв'язання конкретних задач висвітлено, зокрема, у статтях [2, 8, 13–18, 22]. Спільним для всіх модифікацій методу ГІР є те, що для скінченних областей з дефектами вихідні крайові задачі зводяться до систем інтегральних рівнянь одночасно і на поверхнях дефектів, і на межі тіла. Це значно ускладнює застосування методу для обмежених областей із системами декількох дефектів.

У працях [4–6, 20, 21] розв'язано задачу про визначення динамічного напруженого стану циліндричних тіл, які містять системи наскрізних тріщин або тонких жорстких включень. Для цього розвинуто метод, який дає змогу послідовно задовольняти умови на поверхнях дефектів і на межі тіла. Тут цей метод застосовано до розв'язання задачі про дослідження напруженого стану нескінченно довгого циліндра і резонансних явищ при наявності дефектів двох типів: тріщини і тонкого жорсткого включення.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо пружний циліндр із паралельними до осі  $Oz$  твірними (рис. 1) та перерізом площиною  $xOy$ , обмеженим замкненою гладкою кривою. У полярній системі ко-

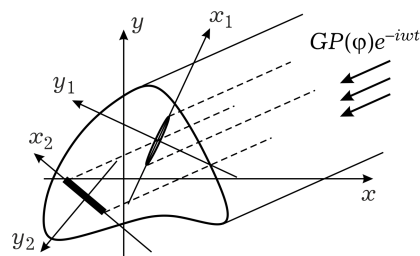


Рис. 1

<sup>✉</sup> dr.vg.popov@gmail.com

ординат  $O\varphi$ , центр якої розміщений у початку декартової системи координат  $xOy$ , обмежувальний контур поперечного перерізу визначається рівнянням  $r = r_0\psi(\varphi)$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Циліндр містить два поздовжні наскрізні дефекти: тріщину та тонке жорстке включення у вигляді пластини малої товщини  $h$ . У перерізі площиною  $xOy$  дефектам відповідають відрізки довжини  $2a_i$ ,  $i = 1, 2$ , які не перетинаються і не виходять за межі перерізу.

У циліндрі відбуваються коливання поздовжнього зсуву внаслідок дії на бічну поверхню самозрівноваженого гармонічного навантаження  $P(\varphi)e^{-i\omega t}$ . За таких умов відмінною від нуля є тільки  $z$ -компонента вектора переміщень, яка задовольняє рівняння Гельмгольца

$$\Delta w + \alpha_2^2 w = 0, \quad (1)$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$ ,  $\alpha_2^2 = \frac{\omega^2}{c_2^2}$ ,  $\omega$  – частота коливань;  $c_2^2 = \frac{G}{\rho_1}$ ,  $G$  і

$\rho_1$  – модуль зсуву та густина матеріалу циліндра. Множник  $e^{-i\omega t}$ , що вказує залежність від часу, в рівнянні (1) і надалі опускаємо, розглядаючи тільки амплітудні значення.

Навантаження на поверхні тіла описується умовою

$$\tau_{nz}(r_0\psi(\varphi), \varphi) = GP(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (2)$$

де  $\mathbf{n}$  – вектор нормалі до межі тіла.

Для формулювання крайових умов на дефектах із центрами  $O_i(c_i, d_i)$  використаємо системи координат  $x_i O_i y_i$ ,  $i = 1, 2$  (рис. 1). Зв'язок між локальними системами координат і глобальною декартовою і полярною системами координат задається відповідно співвідношеннями:

$$\begin{cases} x = c_i + x_i \cos \alpha_i - y_i \sin \alpha_i, \\ y = d_i + x_i \sin \alpha_i + y_i \cos \alpha_i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) + y_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) - \\ \quad - (c_1 - c_2) \cos \alpha_1 - (d_1 - d_2) \sin \alpha_1, \\ y_1 = -x_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) + y_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \\ \quad + (c_1 - c_2) \sin \alpha_1 - (d_1 - d_2) \cos \alpha_1 \end{cases} \quad (3)$$

та

$$\begin{cases} x_i = (r \cos \varphi - c_i) \cos \alpha_i + (r \sin \varphi - d_i) \sin \alpha_i, \\ y_i = -(r \cos \varphi - c_i) \sin \alpha_i + (r \sin \varphi - d_i) \cos \alpha_i. \end{cases} \quad (4)$$

Тут  $\alpha_i$  – кут між осями  $O_i x_i$  та  $Ox$ ,  $i = 1, 2$ .

Позначимо через  $w^{(i)}(x_i, y_i)$  компоненту вектора переміщення  $w(r, \varphi)$  у локальній декартовій системі координат  $x_i O_i y_i$ . На поверхні тріщини задаємо умову відсутності силового навантаження:

$$\tau_{y_1 z}(x_1, 0) = G \frac{\partial w^{(1)}(x_1, 0)}{\partial y_1} = 0, \quad |x_1| \leq a_1, \quad (5)$$

та розривності переміщення:

$$w^{(1)}(x_1, +0) - w^{(1)}(x_1, -0) = \chi_1(x_1), \quad |x_1| \leq a_1, \quad \chi_1(\pm a_1) = 0, \quad (6)$$

де  $\chi_1(x)$  – його стрибок.

З огляду на малу товщину  $h$  включення, крайові умови сформулюємо на його серединній площині. Приймаємо, що між циліндром і включенням виконуються умови повного зчеплення:

$$w^{(2)}(x_2, \pm 0) = d, \quad |x_2| \leq a_2, \quad (7)$$

а дотичні напруження  $\tau_{y_2z}$  мають на поверхні включення стрибок  $\chi_2(x_2)$ :

$$\langle \tau_{y_2z} \rangle = G \left( \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y_2}(x_2, +0) - \frac{\partial w^{(2)}}{\partial y_2}(x_2, -0) \right) = \chi_2(x_2), \quad |x_2| \leq a_2. \quad (8)$$

Тут  $d$  – амплітуда поздовжніх коливань включення, яка визначається з рівняння руху включення як жорсткого тіла. При гармонічних коливаннях це рівняння має вигляд

$$-md\omega^2 = \int_{-a_2}^{a_2} \chi_2(\eta) d\eta, \quad m = 2\rho_0 h a_2, \quad (9)$$

де  $\rho_0$  – густина матеріалу включення.

Напружений стан циліндра з дефектами визначаємо шляхом розв'язання диференціального рівняння (1) із крайовими умовами (2), (5)–(9).

**2. Побудова розв'язку задачі.** Побудуємо спочатку за зразком [4–6, 20, 21] у локальних системах координат  $x_i O_i y_i$  розривні розв'язки рівняння Гельмгольца (1) зі стрибками переміщень (6) на поверхні тріщини та стрибками дотичних напружень (8) на поверхні включення [9]:

$$w_1(x_1, y_1) = \frac{\partial}{\partial y_1} \int_{-a_1}^{a_1} \chi_1(\eta_1) r_2(\eta_1 - x_1, y_1) d\eta_1,$$

$$w_2(x_2, y_2) = \frac{1}{G} \int_{-a_2}^{a_2} \chi_2(\eta_2) r_2(\eta_2 - x_2, y_2) d\eta_2, \quad (10)$$

де

$$r_2(\eta_j - x_j, y_j) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\alpha_2 \sqrt{(\eta_j - x_j)^2 + y_j^2}), \quad j = 1, 2,$$

$H_0^{(1)}$  – функція Ганкеля.

Напруження, що відповідають розривному переміщенню для тріщини, визначимо за формулою

$$\tau_{y_1z}^1 = G \frac{\partial w_1}{\partial y_1} = G \left( \int_{-a_1}^{a_1} \chi_1'(\eta_1) \frac{\partial}{\partial \eta_1} r_2(\eta_1 - x_1, y_1) d\eta_1 - \alpha_2^2 \int_{-a_1}^{a_1} \chi_1(\eta_1) r_2(\eta_1 - x_1, y_1) d\eta_1 \right). \quad (11)$$

Подано переміщення у циліндрі в системі координат  $O r \varphi$  у вигляді

$$w(r, \varphi) = w_0(r, \varphi) + w_0^{(1)}(r, \varphi) + w_0^{(2)}(r, \varphi), \quad (12)$$

де  $w_0^{(1)}(r, \varphi)$ ,  $w_0^{(2)}(r, \varphi)$  – розривні переміщення (10) після переходу до полярних координат за формулами (4), а  $w_0(r, \varphi)$  – невідомий розв'язок рівняння Гельмгольца (1) такий, що для подання (12) повинна виконуватись крайова умова (2) на поверхні циліндра. Цю невідому функцію шукаємо у вигляді лінійної комбінації часткових розв'язків рівняння (1):

$$w_0(r, \varphi) = r_0 \sum_{k=1}^N A_k g_k(r, \varphi), \quad (13)$$

де

$$g_{2m-1}(r, \varphi) = J_{m-1}(\alpha_2 r) \cos(m-1)\varphi, \quad g_{2m}(r, \varphi) = J_m(\alpha_2 r) \sin m\varphi,$$

$J_m$  – функції Бесселя першого роду  $m$ -го порядку. Функції  $g_k(r, \varphi)$  є лінійно незалежними і утворюють повну замкнену систему функцій в області перерізу [3].

Для виконання крайових умов (5), (7) на поверхнях дефектів переміщення (12) запишемо у локальних системах координат  $x_i O_i y_i$ :

$$w^{(i)}(x_i, y_i) = w_0^{(i)}(x_i, y_i) + w_1^{(i)}(x_i, y_i) + w_2^{(i)}(x_i, y_i), \quad i = 1, 2. \quad (14)$$

Тут  $w_1^{(i)}(x_i, y_i)$ ,  $w_2^{(i)}(x_i, y_i)$  – розривні переміщення (10) після переходу до координат  $x_i O_i y_i$ ,  $i = 1, 2$ , а  $w_0^{(i)}(x_i, y_i)$  аналогічно отримано з (13):

$$w_0^{(i)}(x_i, y_i) = r_0 \sum_{k=1}^N A_k g_k^{(i)}(x_i, y_i), \quad (15)$$

де  $g_k^{(i)}(x_i, y_i)$  – функція  $g_k(r, \varphi)$  у системі координат  $x_i O_i y_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Крайові умови (5), (7) після підстановки виразів (14), (15) набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \tau_{y_1 z}^0(x_1, 0) + \tau_{y_1 z}^1(x_1, 0) + \tau_{y_1 z}^2(x_1, 0) &= 0, \\ w_0^{(2)}(x_2, 0) + w_1^{(2)}(x_2, 0) + w_2^{(2)}(x_2, 0) &= d, \end{aligned} \quad (16)$$

де

$$\tau_{y_1 z}^0(x_1, 0) = G \frac{\partial w_0^{(1)}(x_1, 0)}{\partial y_1}, \quad \tau_{y_1 z}^2(x_1, 0) = G \frac{\partial w_2^{(1)}(x_1, 0)}{\partial y_1},$$

$\tau_{y_1 z}^1(x_1, 0)$ ,  $w_0^{(2)}(x_2, 0)$  визначаються з (11) та (15).

Задовольняючи умови (16), отримаємо систему інтегро-диференціального та інтегрального рівнянь, які після виділення сингулярних складових у ядрах і позначень

$$\eta_i = a_i \tau, \quad x_i = a_i \zeta, \quad x_0 = x_2 r_0, \quad \gamma_i = \frac{a_i}{r_0}, \quad x_2 a_i = \gamma_i x_0, \quad d_0 = \frac{d}{r_0},$$

запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\chi_1(a_1 \tau))' \left( \frac{1}{\tau - \zeta} + R^{(1)}(\tau - \zeta) \right) d\tau + \\ + \frac{\gamma_1^2 x_0^2}{2\pi a_1} \int_{-1}^1 \chi_1(a_1 \tau) \left( -\ln|\tau - \zeta| + R^{(0)}(\tau - \zeta) \right) d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi_2(a_2 \tau)}{G} F^{(1)}(\tau, \vartheta) d\tau = -r_0 \sum_{k=1}^N A_k \frac{\partial g_k^{(1)}(a_1 \zeta, 0)}{\partial y_1}, \\ \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \chi_1(a_1 \tau) F^{(2)}(\tau, \vartheta) d\tau + \frac{\gamma_2}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\chi_2(a_2 \tau)}{G} \left( \ln|\tau - \zeta| - R^{(0)}(\tau - \zeta) \right) d\tau + \\ + \sum_{k=1}^N A_k g_k^{(2)}(a_2 \zeta, 0) = d_0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (17)$$

де сталу  $d_0$  визначаємо з рівняння руху (9), записаного у вигляді

$$d_0 = -\frac{1}{2\varepsilon\gamma_2 \bar{\rho} x_0^2 G} \int_{-1}^1 \chi_2(a_2 \tau) d\tau, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho_1}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a_2}. \quad (18)$$

Ядра рівнянь (17) мають таку асимптотику:

$$R^{(1)}(Z) = O(|Z| \ln|Z|), \quad R^{(0)}(Z) = O(Z^2 \ln|Z|), \quad Z \rightarrow 0,$$

функції  $F^{(1)}(\tau, \vartheta)$ ,  $F^{(2)}(\tau, \vartheta)$  нескінченно диференційовні при  $-1 \leq \tau$ ,  $\vartheta < 1$ .

Введемо нові невідомі функції:

$$\frac{\chi_1(a_i \tau)}{a_i} = \sum_{k=1}^N A_k \varphi_k^{(1)}(\tau), \quad i = 1, 2, \quad \chi_1'(a_1 \tau) = \sum_{k=1}^N A_k (\varphi_k^{(1)}(\tau))',$$

$$\chi_2(a_2 \tau) = G \sum_{k=1}^N A_k \varphi_k^{(2)}(\tau).$$

При цьому з огляду на лінійність рівнянь система (17) перетвориться у сукупність систем, які відрізняються лише правими частинами:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_k^{(1)}(\tau))' \left( \frac{1}{\tau - \zeta} + R^{(1)}(\tau - \zeta) \right) d\tau + \\ & + \frac{\gamma_1^2 \alpha_0^2}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_k^{(1)}(\tau) \left( -\ln|\tau - \zeta| + R^{(0)}(\tau - \zeta) \right) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_k^{(2)}(\tau) F^{(1)}(\tau, \vartheta) d\tau = -\frac{\partial g_k^{(1)}(\zeta, 0)}{\partial y_1}, \\ & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_k^{(1)}(\tau) F^{(2)}(\tau, \vartheta) d\tau + \\ & + \frac{\gamma_2}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_k^{(2)}(\tau) \left( \ln|\tau - \zeta| - R^{(0)}(\tau - \zeta) + \frac{\pi}{\varepsilon \gamma_2^2 \bar{\rho} \alpha_0^2} \right) d\tau = \\ & = -g_k^{(2)}(\zeta, 0). \end{aligned} \quad (19)$$

Рівняння (19) необхідно доповнити рівностями

$$\int_{-1}^1 \varphi_k^{(1)}(\tau) d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (20)$$

які випливають з умови (6) змикання тріщини  $\chi_1(\pm a_1) = 0$ , а також рівностями

$$d_0 = \sum_{k=1}^N A_k d_{0k}, \quad d_{0k} = -\frac{1}{\varepsilon \gamma_2^2 \bar{\rho} \alpha_0^2} \int_{-1}^1 \varphi_k^{(2)}(\tau) d\tau,$$

отриманими з (18).

Для побудови наближених розв'язків рівнянь (19) невідомі функції та їхні похідні подамо у вигляді

$$(\varphi_k^{(1)}(\tau))' = \frac{\Psi_k^{(1)}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}}, \quad \varphi_k^{(2)}(\tau) = \frac{\Psi_k^{(2)}(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}},$$

де функції  $\Psi_k^{(i)}(\tau)$  задовольняють умову Гельдера на відрізку  $[-1, 1]$  і апроксимуються інтерполяційними многочленами

$$\Psi_k^{(i)}(\tau) \approx \sum_{m=1}^n \Psi_{km}^{(i)} \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau_m)}, \quad \Psi_{km}^{(i)} = \Psi_k^{(i)}(\tau_m). \quad (21)$$

де  $\tau_m = \cos \frac{\pi(2m-1)}{2n}$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ , – корені многочлена Чебишова 1-го роду  $T_n(\tau)$ . Тоді для функції  $\varphi_k^{(1)}(\tau)$  отримаємо наближення з кореневим

замиканням на кінцях тріщини [9]:

$$\varphi_k^{(1)}(\tau) = \sqrt{1 - \tau^2} L_{kn}(\tau), \quad L_{kn}(\tau) = -\frac{2}{n} \sum_{m=1}^n \psi_{km}^{(1)} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{T_p(\tau_m) U_{p-1}(\tau)}{p}.$$

Застосуємо тепер метод механічних квадратур [1], вибираючи за точки колокації корені многочлена  $U_{n-1}(\zeta)$  Чебишова 2-го роду,  $\zeta_j = \cos \frac{\pi j}{n}$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ , та  $\tau_d = \cos \frac{\pi(2d-1)}{2n}$ ,  $d = 1, \dots, n$ . При цьому для інтегралів Коші використовуємо відому квадратурну формулу [1], для інтегралів з регулярними ядрами – формули Гаусса – Чебишова, а інтеграли з логарифмічною особливістю обчислюємо із застосуванням методики [9].

Тоді з (19) і (20) одержимо системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень функцій  $\psi_k^{(i)}(\tau)$ ,  $i = 1, 2$ , у вузлах інтерполяції:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{km}^{(1)} \left( \frac{1}{\tau_m - \zeta_j} + R_{mj}^{(1)} - \gamma_1^2 \alpha_0^2 (C_{jm} - E_{jm}) \right) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{km}^{(2)} F^{(1)}(\tau_m, \zeta_j) = -\frac{\partial g_k^{(1)}(\zeta_j)}{\partial y_1}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \\ & \sum_{m=1}^n a_m \psi_{km}^{(1)} = 0, \\ & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{km}^{(1)} K_{dm} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \psi_{km}^{(2)} \left( \gamma_2 (B_{dm} - R_0(\tau_m - \tau_d)) + \frac{\pi}{\varepsilon \gamma_2^2 \rho \alpha_0^2} \right) = \\ & = -g_k^{(2)}(\tau_d), \quad d = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (22)$$

Розв'язавши систему (22), отримаємо наближення кожної функції  $\psi_k^{(i)}(\tau)$  інтерполяційним многочленом (21).

Невідомі коефіцієнти  $A_k$  у рівності (13) для  $w_0(r, \varphi)$  визначаємо з умови (2) на межі циліндра. Для цього подамо напруження у вигляді

$$\tau_{nz}(r_0 \psi(\varphi), \varphi) = \tau_{xz}(r_0 \psi(\varphi), \varphi) c_x + \tau_{yz}(r_0 \psi(\varphi), \varphi) c_y, \quad (23)$$

де  $c_x = \cos(\mathbf{n}, x)$ ,  $c_y = \cos(\mathbf{n}, y)$  – напрямні косинуси вектора нормалі  $\mathbf{n}$ .

З формул (8), (10) після переходу до полярних координат визначаємо граничні значення напружень і підставляємо у (23). Тоді на межі циліндра виконується рівність

$$\sum_{k=1}^N A_k \left( \int_{-1}^1 \varphi_k^{(1)}(\tau) G_1(\tau, \varphi) d\tau + \int_{-1}^1 \varphi_k^{(2)}(\tau) G_2(\tau, \varphi) d\tau + B_k(\varphi) \right) = P(\varphi), \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} G_1(\tau, \varphi) &= \frac{i\alpha_0^2 \gamma_1^2}{4} (E_1(\tau, \varphi) c_x + E_2(\tau, \varphi) c_y), \\ G_2(\tau, \varphi) &= -\frac{i}{4} (V_1(\tau, \varphi) c_x - V_2(\tau, \varphi) c_y), \end{aligned}$$

$$V_1(\tau, \varphi) = \frac{x_0 \gamma_2 H_1^{(1)}(x_0 R_2^0)}{R_2^0} + ((\gamma_2 \tau - x_2^0) \cos \alpha_2 + y_2^0 \sin \alpha_2),$$

$$V_2(\tau, \varphi) = \frac{x_0 \gamma_2 H_1^{(1)}(x_0 R_2^0)}{R_2^0} + (y_2^0 \cos \alpha_2 - (\gamma_2 \tau - x_2^0) \sin \alpha_2),$$

а  $E_i(\tau, \varphi)$ ,  $B_k(\varphi)$  визначено в [6].

Інтеграли у (24) обчислюємо, як і в [6, 20], за квадратурною формулою Гаусса – Чебишова [1] і квадратурною формулою [7].

Для визначення коефіцієнтів  $A_k$  застосуємо метод колокації, беручи за вузли  $\sigma_\ell = 2\pi\ell/N$ ,  $\ell = 1, \dots, N$  [6, 20, 21]. У результаті отримуємо систему

$$\sum_{k=1}^N A_k \left( \sum_{m=1}^n a_m \psi_{km}^{(2)} \sum_{\ell=1}^n D_{\ell m} G(Z_\ell, \sigma_\ell) + \sum_{m=1}^n a_m \psi_{km}^{(1)} G_1(\tau_m, \sigma_\ell) + B_k(\sigma_\ell) \right) = P(\sigma_\ell). \quad (25)$$

Величинами, які характеризують поширення тріщини і руйнування матеріалу в околі включення [11], є коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН), які в розглядуваному випадку визначаються за формулами [6]

$$K_j^\pm = G \sqrt{2a_j} k_j^\pm, \quad k_j^\pm = \psi_j(\pm 1), \quad j = 1, 2.$$

Безрозмірні значення цих коефіцієнтів виражаємо за формулами (21) через розв'язки систем (22) і (25).

**3. Приклади числових досліджень.** Розглянуто циліндр еліптичного поперечного перерізу з великою піввіссю  $r_0$  та ексцентриситетом  $\varepsilon = 0.5$ . До поверхні циліндра прикладено навантаження  $P(\varphi) = \sin 2\varphi$ .

Досліджено вплив взаємного розміщення дефектів і їхніх розмірів на напружений стан у циліндрі та резонансні явища при зміні кута  $2\alpha$  між дефектами (рис. 2а) і при збільшенні відносних довжин дефектів, що розташовані на одній прямій без дотикання одне до одного та не виходять за межі перерізу (рис. 2б).

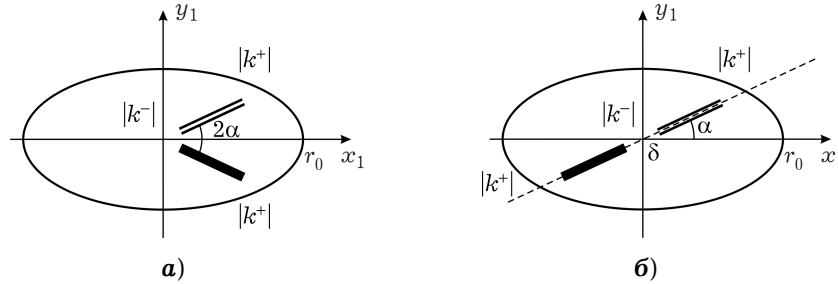


Рис. 2

При збільшенні кута  $2\alpha$  між дефектами віддалені кінці дефектів наближаються до межі. Залежності КІН  $|k^+|$ ,  $|k^-|$  від безрозмірного хвильового числа  $x_0 = x_2 r_0 = (\omega/c_2) r_0$  наведено на рис. 3 для тріщини і на рис. 4 – для включення. Обчислення виконано для кутів  $\alpha = 10^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  і фіксованих відносних довжин  $\gamma_i = a_i/r_0 = 0.3$ . При цьому зменшується частота досягнення першого резонансу. До досягнення резонансу для тріщини значення КІН для віддаленого кінця зменшуються, а для включення збільшуються. Для зближених кінців при збільшенні кута значення КІН збільшуються як у випадку тріщини, так і у випадку включення.

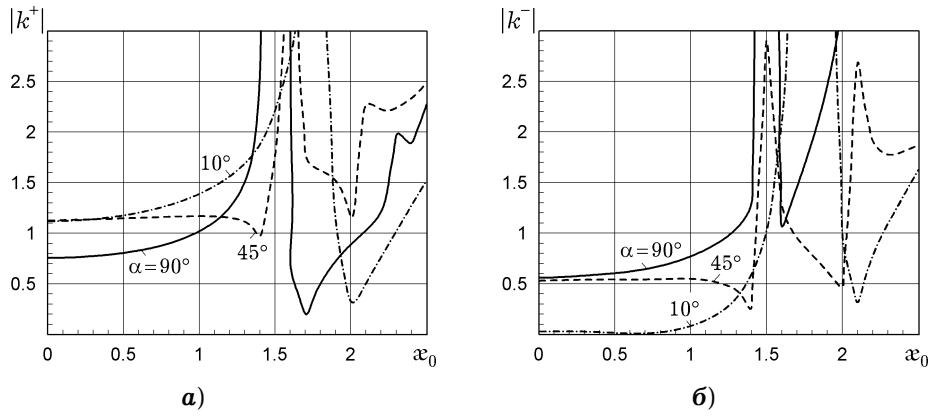


Рис. 3

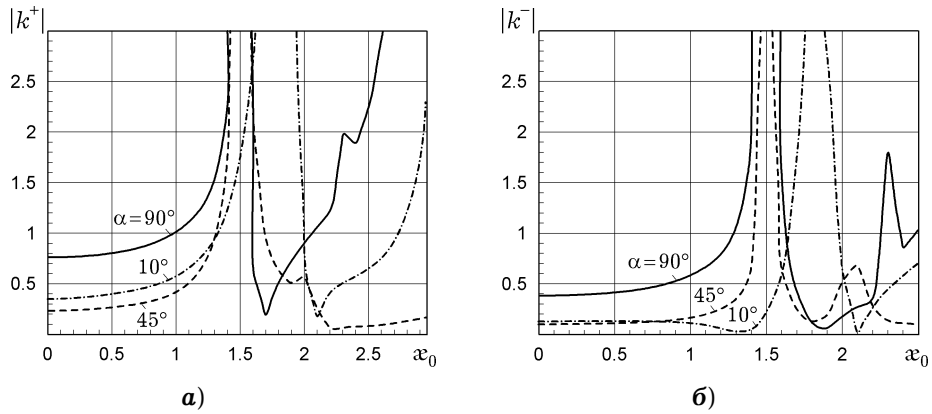


Рис. 4

На рис. 5 (для тріщини) і рис. 6 (для включення) наведено результати числового дослідження впливу на значення КІН взаємної близькості дефектів і їхнього наближення до межі (рис. 2б) при  $\gamma_i = a_i/r_0 = 0.25, 0.35, 0.45$ . При такій зміні відносних довжин дефекти зближались на величину  $\delta = 0.46, 0.26, 0.06$ . Виявлено, що при збільшенні розмірів дефектів для наближених до границі кінців зростає частота першого резонансу. До досягнення резонансу при збільшенні довжин на кінцях дефектів, що близькі до межі, для тріщини значення КІН зростають, для включення – спадають. На кінцях дефекту, що зближаються, в обох випадках спостерігається спадання значень КІН.

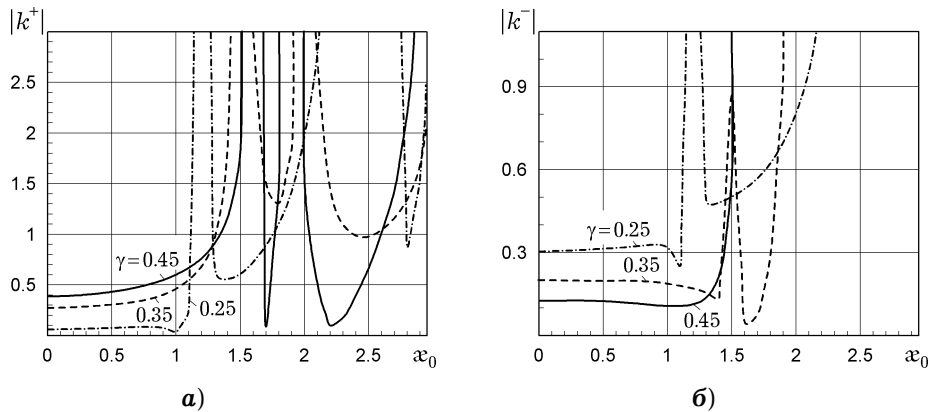


Рис. 5



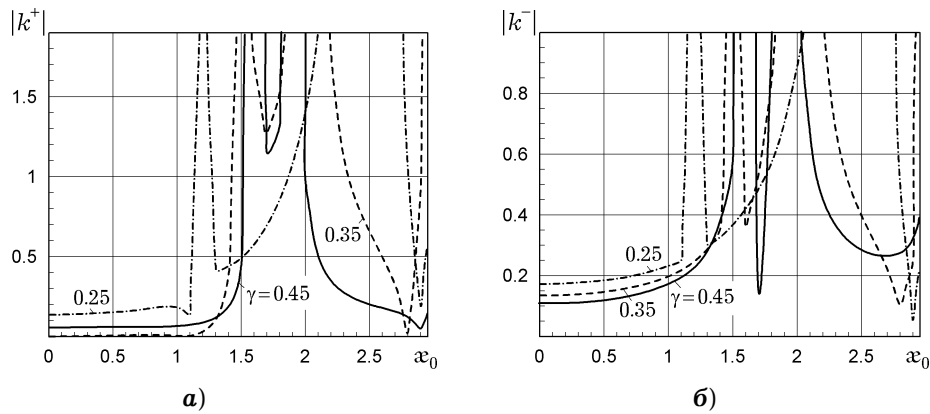


Рис. 6

**Висновки.** Запропоновано новий числово-аналітичний метод визначення напруженого стану поблизу тонких дефектів у циліндричних тілах довільного перерізу, що знаходяться в умовах гармонічних коливань позовжнього зсуву. Перевагою цього методу є можливість послідовно задовольнити крайові умови на дефектах та на межі тіла. Завдяки цьому вдається отримувати стабільні числові результати при наближенні дефектів одне до одного та до межі тіла. Встановлено, що близькість кінців дефектів між собою і наближення їх до межі тіла істотно впливає на значення КІН у їхньому okolí. Відносні розміри дефектів і кут між їхніми середніми лініями можуть істотно впливати на значення частоти резонансу.

1. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. – Москва: Наука, 1985. – 253 с.
2. Бобылев А. А., Доброва Ю. А. Применение метода граничных элементов к расчету вынужденных колебаний упругих тел конечных размеров с трещинами // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Мат. моделювання. Інформ. технології. Автомат. системи управління. – 2003. – Вип. 1, № 590. – С. 49–54.
3. Векса И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений. – Москва-Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1948. – 296 с.
4. Кирилова О. І., Попов В. Г. Гармонічні коливання позовжнього зсуву нескінченного циліндра довільного перерізу з системою тунельних тріщин. // Проблеми обчисл. механіки і міцності конструкцій. – 2012. – № 20. – С. 183–191.
5. Кирилова О. І., Попов В. Г. Напружений стан порожнинного циліндра з системою тріщин за гармонічних коливань позовжнього зсуву // Проблеми машинобудування. – 2019. – 22, No. 1. – С. 16–24. – <https://doi.org/10.15407/pmach2019.01.016>.
6. Кирилова О. І., Попов В. Г. Напружений стан у нескінченному циліндрі довільного перерізу з тунельним дефектом в умовах гармонічних коливань позовжнього зсуву // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – 55, № 3. – С. 61–71. Те саме: Kyrylova O. I., Popov V. G. Stress state in an infinite cylinder of any cross section with tunnel defect under harmonic oscillations of longitudinal shear // J. Math. Sci. – 2013. – 194, No. 2. – P. 198–212. – <https://doi.org/10.1007/s10958-013-1520-5>.
7. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
8. Михаськів В. В., Хай О. М. Почасові граничні інтегральні рівняння тривимірних задач дифракції пружних хвиль на тонкому жорсткому включенні // Доп. НАН України. – 2001. – № 6. – С. 66–71.
9. Попов В. Г. Взаимодействие упругих волн продольного сдвига с радиально расположенными трещинами // Прикл. механика. – 1998. – 34, № 2. – С. 60–66. Те саме: Popov V. G. Interaction between elastic longitudinal shear waves and radially distributed cracks // Int. Appl. Mech. – 1998. – 34, No. 2. – P. 157–163.
10. Попов В. Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение

- // Динам. системи. – 1993. – Вып. 12. – С. 35–41.
11. Сулим Г. Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
  12. Aliabadi M. H. The boundary element method. – Vol. 2. – Applications in solids and structures. – London: J. Wiley & Sons, 2002. – 636 p.
  13. Chirino F., Dominguez J. Dynamic analysis of cracks using boundary element method // Eng. Fract. Mech. – 1989. – **34**, No. 5-6. – P. 1051–1061.  
– [https://doi.org/10.1016/0013-7944\(89\)90266-X](https://doi.org/10.1016/0013-7944(89)90266-X).
  14. Ebrahimi S., Phan A.-V. Dynamic analysis of cracks using the SGBEM for elastodynamics in the Laplace-space frequency domain // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2013. – **37**, No. 11. – P. 1378–1391.  
– <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2013.07.004>.
  15. Fedelinski P., Aliabadi M. H., Rooke D. P. Boundary element formulations for the dynamic analysis of cracked structures // Eng. Anal. Bound. Elem. – 1996. – **17**, No. 1. – P. 45–56. – [https://doi.org/10.1016/0955-7997\(95\)00089-5](https://doi.org/10.1016/0955-7997(95)00089-5).
  16. Feng Y.-D., Wang Y.-S., Zhang Z.-M. Transient scattering of SH waves from an inclusion with a unilateral frictional interface: a 2D time domain boundary element analysis // Commun. Numer. Meth. Eng. – 2003. – **19**, No. 1. – P. 25–36.  
– <https://doi.org/10.1002/cnm.566>.
  17. Helsing J., Peters G. Integral equation methods and numerical solutions of crack and inclusion problems in planar elastostatic // SIAM J. Appl. Math. – 1999. – **59**, No. 3. – P. 965–982.  
– <https://doi.org/10.1137/S0036139998332938>.
  18. Hosseini-Tehrani P., Hosseini-Godardzi A. R., Tavangar M. Boundary element analysis of stress intensity factor  $K_I$  in some two-dimensional dynamic thermoelastic problems // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2005. – **29**, No. 3. – P. 232–240.  
– <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2004.12.009>.
  19. Kitahara M. Boundary integral equation methods in eigenvalue problems of elastodynamics and thin plates. – New York: Elsevier, 1985. – viii + 290 p.
  20. Kyrylova O. I., Popov V. G. Harmonic oscillations of a longitudinal shear infinite hollow cylinder arbitrary cross-section with a tunnel crack // J. Phys. Conf. Ser. – 2018. – **991**. – Art. 012051.  
– <https://doi.org/10.1088/1742-6596/991/1/012051>.
  21. Kyrylova O., Popov V. Stress state of a hollow cylindrical body with a system of cracks under oscillations of longitudinal shear // In: Groutos E. E. (ed.) / Proc. 2nd Int. Conf. on Theoretical, Applied, and Experimental Mechanics, ICTAEM 2019. Ser.: Structural Integrity. – Cham: Springer, 2019. – Vol. 8. – P. 236–241.  
– [https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2\\_44](https://doi.org/10.1007/978-3-030-21894-2_44).
  22. Mykhas'kiv V., Zhabdynskiy I., Zhang Ch. Elastodynamic analysis of multiple crack problem in 3-D bi-materials by a BEM // Int. J. Numer. Meth. Bio. Eng. – 2010. – **26**, No. 12. – P. 1934–1946. – <https://doi.org/10.1002/cnm.1285>.
  23. Nishioka T., Atluri S. N. Numerical modeling of dynamic crack propagation in finite bodies, by moving singular elements – Part 1: Formulation // J. Appl. Mech. – 1980. – **47**, No. 3. – P. 570–576.  
– <https://doi.org/10.1115/1.3153733>.
  24. Nishioka T., Atluri S. N. Numerical modeling of dynamic crack propagation in finite bodies, by moving singular elements – Part 2: Results // J. Appl. Mech. – 1980. – **47**, No. 3. – P. 577–582. – <https://doi.org/10.1115/1.3153734>.
  25. Nistor I., Pantale O., Caperaa S. Numerical implementation of the extended finite element method for dynamic crack analysis // Adv. Eng. Softw. – 2008. – **39**, No. 7. – P. 573–587. – <https://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2007.06.003>.
  26. Shahani A. R., Amini M. R. Dynamic fracture analysis using an uncoupled arbitrary Lagrangian finite element formulation // J. Solid Mechanics. – 2011. – **3**, No. 3. – P. 228–243.
  27. Zhang Ch. A 2D hypersingular time-domain traction BEM for transient elastodynamic crack analysis // Wave Motion. – 2002. – **35**, No. 1. – P. 17–40.
  28. Zhang J. Y., Hsu T. R., Wang I. Q. Numerical modelling of crack propagation using multi-variable and breakable finite elements // Commun. Appl. Num. Meth. – 1990. – **6**, No. 3. – P. 215–222. – <https://doi.org/10.1002/cnm.1630060308>.
  29. Zi G., Chen H., Xu J., Belytschko T. The extended finite element method for dynamic fractures // Shock Vib. – 2005. – **12**, Spec. issue. – P. 9–23.  
– <https://doi.org/10.1155/2005/729090>.

## THE INTERACTION BETWEEN A CRACK AND AN INCLUSION IN A CYLINDRICAL BODY UNDER THE LONGITUDINAL SHEAR OSCILLATIONS

*A problem on the determination of the stress state in an infinitely long cylinder of arbitrary cross-section under the longitudinal shear oscillations is solved with account for the interaction between the through defects (i.e., a crack and a thin rigid inclusion). The employed method allows for the satisfaction of the conditions on the surfaces of defects along with satisfying the conditions of time-harmonic loading on the surface of the cylinder. Approximate formulas are obtained for calculating stress intensity factors. These formulas are used to analyze the influence of geometric parameters of the cross-sectional geometry of the cylinder on the resonance frequencies.*

**Key words:** *infinitely long cylinder, crack, inclusion, harmonic oscillations, stress intensity factors, resonance effect.*

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано  
18.02.21