

ВИЗНАЧЕННЯ ДВОВИМІРНИХ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ЖОРСТКИХ ВКЛЮЧЕНЬ В АНІЗОТРОПНОМУ СЕРЕДОВИЩІ НА ОСНОВІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ШЕРМАНА ТА РОЗВ'ЯЗКІВ ҐРІНА

Побудовано регуляризовані інтегральні рівняння типу Шермана для плоскої анізотропної задачі теорії пружності при заданих на межах отворів переміщеннях. Інтегральне зображення загального розв'язку записано через комплексні потенціали Лехницького з використанням теореми Коші, а для півплощини і смуги – з додатковим застосуванням розв'язків Ґріна. Встановлено властивості побудованого розв'язку. На основі підходу Шермана додано регуляризувальні складові, які дозволяють знаходити однозначний розв'язок числовими методами. З використанням розробленого підходу визначено пружні напруження у смугі за розтягу через жорсткі накладки. Виконано дослідження напружень біля циліндричних жорстких включень для ізотропних матеріалів і масиву порід із алеволіту. Досліджено також взаємовплив включень на розподіл напружень.

Ключові слова: анізотропна смуга, включення, напружений стан, розв'язки Ґріна, метод інтегральних рівнянь.

Вступ. Метод граничних інтегральних рівнянь (МГІР) широко використовується для дослідження напружено-деформованого стану (НДС) ізотропних і анізотропних багатозв'язних пластин. У літературі найбільш детально вивчено першу основну задачу, коли на межах отворів задано зусилля [13–15]. Задачі визначення НДС анізотропних пластинок із заданими на межах отворів переміщеннями (зокрема, з жорсткими включеннями) вивчено меншою мірою. У праці [2] для розв'язування таких задач застосовано метод рядів у поєднанні з методом конформних відображень. Реалізація цього підходу істотно ускладнюється для областей складної форми, коли у відображувальній функції утримують велику кількість членів ряду. Метод Лехницького, в тому числі у поєднанні з методом інтегральних рівнянь, використовували в роботах [3, 7, 9, 10].

При безпосередньому застосуванні зображення Соміліано для задач пружності із заданими на межах отворів переміщеннями отримують інтегральні рівняння з логарифмічною особливістю у ядрах [13]. Числове розв'язування таких рівнянь може призвести до значних похибок при розгляді областей складних форм, коли необхідно вводити велику кількість вузлових точок. У працях [4, 12] побудовано сингулярні інтегральні рівняння на основі потенціалів Лехницького та теореми Коші, які є особливо ефективними при розгляді задач з жорсткими включеннями. При розв'язуванні складніших задач у рівняння входять сингулярні інтеграли, що ускладнює реалізацію підходу.

При дослідженні напружень для другої основної плоскої задачі теорії пружності широко використовують простіші інтегральні рівняння типу Шермана [8]. У цій статті побудовано такі рівняння для анізотропного середовища. Проведено регуляризацію отриманих рівнянь шляхом введення додаткових складових, аналогічно, як це реалізовано у праці [8]. Розглянуто крайові задачі для півплощини і смуги з включеннями на основі розв'язку Ґріна. Розв'язування виконано чисельно методом механічних квадратур.

Гірські масиви часто мають анізотропні механічні характеристики. Дослідження напружень у таких масивах проведено тільки в окремих роботах [7, 15]. У цій роботі виконано дослідження напружень біля жорстко підкріплених циліндричних порожнин і їхніх систем з ізотропними і трансвер-

✉ t_solyar@ukr.net

сально-ізотропними механічними характеристиками.

1. Постановка задачі. Розглянемо нескінченне анізотропне пружне середовище, яке займає область D з отворами, обмеженими контурами L_j , $j = 1, \dots, J$. Прийmemo, що отвори займають області D_j , та позначимо через C_j їх центри ваги. Прийmemo також, що на межах отворів задано переміщення (u_D, v_D) , середовище навантажене зосередженими силами та рівномірно навантажене на нескінченності. Будемо вважати відомими (X_j, Y_j) і M_j – головний вектор і головний момент відносно точок C_j усіх сил, прикладених до граничних контурів L_j , $j = 1, \dots, J$.

Розв'язок задачі теорії пружності виразимо через потенціали Лехницького $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$, де $z_m = x + s_m y$. Тут s_m , $m = 1, 2$, – корені з додатною уявною частиною характеристичного рівняння [3]

$$\alpha_{11}s^4 - 2\alpha_{16}s^3 + (2\alpha_{12} + \alpha_{66})s^2 - 2\alpha_{26}s + \alpha_{22} = 0,$$

де коефіцієнти α_{ij} , $i, j = 1, 2, 6$, є пружними сталими матеріалу у випадку плоского напруженого стану. При розгляді плоского деформованого стану ці коефіцієнти визначаються через пружні сталі за наведеними в [3] співвідношеннями.

Для визначення потенціалів необхідно задовольнити умови на межах отворів [3, 11]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[p_1 \Phi_L(z_1) z_1' + p_2 \Psi_L(z_2) z_2'] &= U_D, \\ 2 \operatorname{Re}[q_1 \Phi_L(z_1) z_1' + q_2 \Psi_L(z_2) z_2'] &= V_D, \end{aligned} \quad (1)$$

де

$$\begin{aligned} z_i' &= \frac{dz_i}{ds}, \quad U_D = \frac{du_D}{ds}, \quad V_D = \frac{dv_D}{ds}, \\ p_i &= \alpha_{11}s_i^2 - \alpha_{16}s_i + \alpha_{12}, \quad q_i = \alpha_{12}s_i - \alpha_{26} + \frac{\alpha_{22}}{s_i}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Тут і далі дугова координата s зростає при русі вздовж межі в напрямку, за якого область D залишається зліва та інтегрування буде проводитись у цьому ж напрямку.

При відомих переміщеннях на межах отворів для ізотропних матеріалів ефективними виявились інтегральні рівняння типу Шермана [8]. Побудуємо такі рівняння для анізотропних пластинок. Для цього введемо в розгляд обмежені пластинки, які займають області D_j , $j = 1, \dots, J$. Прийmemo, що на їхніх межах L_j задано переміщення $u_D(x, y)$, $v_D(x, y)$, $(x, y) \in L_j$. Переміщення, які виникають при цьому в областях D_j , позначимо через (u^-, v^-) , а відповідний їм вектор напружень на граничному контурі – через (X^-, Y^-) .

На контурах L_j вектор переміщень є неперервним, а вектори напружень мають стрибки $P = X_D - X^-$, $Q = Y_D - Y^-$.

Розглянемо внутрішню або зовнішню область відносно довільного замкненого контуру Γ . Позначимо граничні значення векторів переміщень і напружень на контурі Γ для цієї області через (u, v) і (X_Γ, Y_Γ) .

Тоді на контурі Γ справджуються співвідношення [12]

$$\Phi(z_1) = \frac{-v' + s_1 u' + p_1 X_\Gamma + q_1 Y_\Gamma}{\Delta_1 z_1'}, \quad \Psi(z_2) = \frac{-v' + s_2 u' + p_2 X_\Gamma + q_2 Y_\Gamma}{\Delta_2 z_2'},$$

де $u' = du/ds$, $v' = dv/ds$,

$$\Delta_1 = \alpha_{11}(s_1 - s_2)(s_1 - \bar{s}_1)(s_1 - \bar{s}_2), \quad \Delta_2 = \alpha_{11}(s_2 - s_1)(s_2 - \bar{s}_1)(s_2 - \bar{s}_2).$$

Звідси випливає, що на контурах L_j , $j = 1, \dots, J$, потенціали Лехницького мають стрибок

$$\Phi^+ - \Phi^- = \frac{p_1 P + q_1 Q}{\Delta_1 z_1'}, \quad \Psi^+ - \Psi^- = \frac{p_2 P + q_2 Q}{\Delta_2 z_2'},$$

де граничні значення потенціалів на контурі в області D відмічено знаком «+», а в області D_j - знаком «-», відповідно, P , Q - невідомі функції.

Тоді на основі теореми Коші, аналогічно, як у праці [12], для потенціалів Лехницького отримаємо інтегральні зображення типу Шермана у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi(z_1) &= \Phi_L(z_1) + \Phi_D(z_1), \\ \Psi(z_2) &= \Psi_L(z_2) + \Psi_D(z_2), \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$\begin{aligned} \Phi_L(z_1) &= \int_L [\Phi_3(z_1, T)P(s) + \Phi_4(z_1, T)Q(s)] ds, \\ \Psi_L(z_2) &= \int_L [\Psi_3(z_2, T)P(s) + \Psi_4(z_2, T)Q(s)] ds, \end{aligned}$$

$ds = \sqrt{(d\xi)^2 + (d\eta)^2}$, T - точка, за якою проводиться інтегрування, $T(\xi, \eta) \in L$, $L = L_1 + \dots + L_J$,

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_1, T) &= -\frac{A_k}{z_1 - t_1}, \quad \Psi_k(z_2, T) = -\frac{B_k}{z_2 - t_2}, \quad k = 3, 4, \quad t_{1,2} = \xi + s_{1,2}\eta, \\ A_3 &= -\frac{ip_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_4 = -\frac{iq_1}{2\pi\Delta_1}, \quad B_3 = -\frac{ip_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_4 = -\frac{iq_2}{2\pi\Delta_2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Потенціали Φ_D , Ψ_D - розв'язок задачі теорії пружності для суцільної площини, навантаженої прикладеними зосередженими силами та зусиллями на нескінченності.

2. Властивості розв'язку (2).

I. Знайдемо головний вектор сил, прикладених до контуру L_j , які відповідають потенціалам (2). Для цього проведемо замкнений контур Γ в області D навколо меж L_j , $j = 1, \dots, J$. Вектор напружень на цьому контурі визначається за формулами [3]

$$\begin{aligned} Y_\Gamma &= -2 \operatorname{Re} [\Phi_L(z_1)z_1' + \Psi_L(z_2)z_2'], \\ X_\Gamma &= 2 \operatorname{Re} [s_1 \Phi_L(z_1)z_1' + s_2 \Psi_L(z_2)z_2'], \quad (x, y) \in \Gamma. \end{aligned} \quad (4)$$

Головний вектор сил (P_x, P_y) , який відповідає вектору напружень (X_Γ, Y_Γ) , визначається за формулами

$$\begin{aligned} P_x &= 2 \operatorname{Re} \left[s_1 \int_\Gamma \Phi_L(z_1)z_1' ds_\Gamma + s_2 \int_\Gamma \Psi_L(z_2)z_2' ds_\Gamma \right], \\ P_y &= -2 \operatorname{Re} \left[\int_\Gamma \Phi_L(z_1)z_1' ds_\Gamma + \int_\Gamma \Psi_L(z_2)z_2' ds_\Gamma \right]. \end{aligned}$$

На основі теореми про лишки маємо

$$\int_{\Gamma} \Phi_L z' ds_{\Gamma} = \int_{L_j} \left(P \int_{\Gamma} \Phi_3 z'_1 ds_{\Gamma} + Q \int_{\Gamma} \Phi_4 z'_1 ds_{\Gamma} \right) ds = -\frac{1}{\Delta_1} \int_{L_j} (p_1 P + q_1 Q) ds,$$

$$\int_{\Gamma} \Psi_{L_1} z'_2 ds_{\Gamma} = \int_{L_j} \left(P \int_{\Gamma} \Psi_3 z'_2 ds_{\Gamma} + Q \int_{\Gamma} \Psi_2 z'_2 ds_{\Gamma} \right) ds = -\frac{1}{\Delta_2} \int_{L_j} (p_2 P + q_2 Q) ds.$$

Звідси знаходимо

$$P_x = -\int_{\Gamma} (s_{11} P + s_{21} Q) ds, \quad P_y = \int_{\Gamma} (s_{10} P + s_{20} Q) ds,$$

де

$$s_{1k} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{p_1 s_1^k}{\Delta_1} + \frac{p_2 s_2^k}{\Delta_2} \right), \quad s_{2k} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{q_1 s_1^k}{\Delta_1} + \frac{q_2 s_2^k}{\Delta_2} \right), \quad k = 0, 1.$$

На основі [11, 12] маємо $s_{10} = s_{21} = 0$, $s_{11} = 1$, $s_{20} = -1$. Тоді

$$P_x = -\int_{\Gamma} P ds, \quad P_y = -\int_{\Gamma} Q ds.$$

Спрямовуючи контур Γ до контуру L_j , встановлюємо умови

$$X_j = \int_{L_j} P ds, \quad Y_j = \int_{L_j} Q ds, \quad j = 1, \dots, J. \quad (5)$$

Аналогічно можна довести, що головний момент відносно точки $C_j(x_j^C, y_j^C)$ (центр ваги області D_j) визначається як

$$M_j = \int_{L_j} \left((y - y_j^C) P - (x - x_j^C) Q \right) ds, \quad j = 1, \dots, J. \quad (6)$$

Таким чином, невідомі функції P , Q повинні задовольняти умови (5), (6).

II. Знайдемо інтеграли від похідних від переміщень на вказаному контурі Γ , які відповідають потенціалам (2). З використанням формули (1) маємо

$$\int_{\Gamma} u' ds = 2 \operatorname{Re} \left[p_1 \int_{\Gamma} \Phi(z_1) z'_1 ds_{\Gamma} + p_2 \int_{\Gamma} \Psi(z_2) z'_2 ds_{\Gamma} \right],$$

$$\int_{\Gamma} v' ds = 2 \operatorname{Re} \left[q_1 \int_{\Gamma} \Phi(z_1) z'_1 ds_{\Gamma} + q_2 \int_{\Gamma} \Psi(z_2) z'_2 ds_{\Gamma} \right]. \quad (7)$$

Звідси при $j = 1, \dots, J$ знаходимо

$$[u] = \int_{L_j} u' ds = -\int_{L_j} (r_{20} P + r_{11} Q) ds,$$

$$[v] = \int_{L_j} v' ds = -\int_{L_j} (r_{11} P + r_{02} Q) ds,$$

де

$$r_{20} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{p_1^2}{\Delta_1} + \frac{p_2^2}{\Delta_2} \right), \quad r_{11} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{p_1 q_1}{\Delta_1} + \frac{p_2 q_2}{\Delta_2} \right), \quad r_{02} = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{q_1^2}{\Delta_1} + \frac{q_2^2}{\Delta_2} \right).$$

На основі [11, 12] маємо

$$r_{20} = r_{11} = r_{02} = 0.$$

Звідси випливають умови, які задовольняються тотожно

$$\int_{L_j} u' ds = 0, \quad \int_{L_j} v' ds = 0, \quad j = 1, \dots, J. \quad (8)$$

3. Інтегральні рівняння для знаходження функцій P , Q отримуємо з умови, що вектор переміщень на межах отворів дорівнює заданому [11]. Припускаємо при цьому, що межа кожного з отворів може повертатись як жорстка. Підставляючи потенціали (2) у співвідношення (1) і враховуючи формули Сохоцького – Племеля, отримуємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [p_1 \tilde{\Phi}_L(z_1)z'_1 + p_2 \tilde{\Psi}_L(z_2)z'_2] + H_1 &= f - \omega_j \frac{dy}{ds}, \\ 2 \operatorname{Re} [q_1 \tilde{\Phi}_L(z_1)z'_1 + q_2 \tilde{\Psi}_L(z_2)z'_2] + H_2 &= g + \omega_j \frac{dx}{ds}, \quad (x, y) \in L, \end{aligned} \quad (9)$$

де $\tilde{\Phi}_L$, $\tilde{\Psi}_L$ – потенціали (2), у яких інтеграли розглядаються у сенсі головного значення за Коші,

$$\begin{aligned} H_1 &= (Pr_{20} + Qr_{11})/2, \quad H_2 = (Pr_{11} + Qr_{21})/2, \\ f &= U_D(x, y) - 2 \operatorname{Re} [p_1 \Phi_D(z_1)z'_1 + p_2 \Psi_D(z_2)z'_2], \\ g &= V_D(x, y) - 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi_D(z_1)z'_1 + q_2 \Psi_D(z_2)z'_2]. \end{aligned}$$

У системі рівнянь (9) до заданих на контурах переміщень додано поворот меж кожного з отворів як жорсткого цілого на невідомий кут ω_j , який далі будемо визначати з умови, що є відомим момент, прикладений до межі.

На основі [12] маємо $H_1 = H_2 = 0$.

Підставляючи потенціали (2) в умови (9), отримаємо рівняння

$$\begin{aligned} \int_L [U_1^L(Z, T)P(T) + U_2^L(Z, T)Q(T)] ds &= g(Z), \\ \int_L [V_1^L(Z, T)P(T) + V_2^L(Z, T)Q(T)] ds &= f(Z), \\ \int_{L_j} \left((y - y_j^C)P - (x - x_j^C)Q \right) ds &= M_j, \quad j = 1, \dots, J, \end{aligned} \quad (10)$$

де $U_j^L(Z, T)$, $V_j^L(Z, T)$ – похідні від переміщень у точці $Z(x, y) \in L$, які визначаються за формулами (1) через комплексні потенціали $\Phi_j(z_1, T)$, $\Psi_j(z_2, T)$, $j = 1, \dots, J$, $T(\xi, \eta) \in L$.

На основі наведених вище властивостей вибраного загального розв'язку інтегральні рівняння мають власні розв'язки і, крім цього, повинні виконуватись умови (5), (6). Для розв'язування такого типу рівнянь використаємо використано підхід Шермана [8]. Для цього до загального розв'язку (2) (до потенціалів Φ_L і Ψ_L) справа додамо

$$\begin{aligned} \Phi_\Delta(z_1) &= \sum_{j=1}^J [P_j^\Delta \Phi_1(z_1, C_j) + Q_j^\Delta \Phi_2(z_1, C_j)], \\ \Psi_\Delta(z_2) &= \sum_{j=1}^J [P_j^\Delta \Psi_1(z_2, C_j) + Q_j^\Delta \Psi_2(z_2, C_j)], \end{aligned} \quad (11)$$

де P_j^Δ , Q_j^Δ – невідомі сталі величини, а функції Φ_k , Ψ_k , $k = 1, 2$, визначаються за формулами (3), у яких

$$A_1 = -\frac{is_1}{2\pi\Delta_1}, \quad A_2 = \frac{i}{2\pi\Delta_1}, \quad B_1 = -\frac{is_2}{2\pi\Delta_2}, \quad B_2 = -\frac{i}{2\pi\Delta_2}.$$

Функції Φ_k , Ψ_k , $k = 1, 2$, є дислокаційними розв'язками [12], тобто

такими, які при повному обході навколо точок C_j визначають переміщення, які мають стрибок. Тоді у правих частинах рівнянь (10) необхідно замінити $f(Z)$, $g(Z)$ відповідно на $f(Z) + f_\Delta(Z)$, $g(Z) + g_\Delta(Z)$, де

$$f_\Delta = \sum_{j=1}^J [P_j^\Delta V_{1j}(Z) + Q_j^\Delta V_{2j}(Z)], \quad g_\Delta = \sum_{j=1}^J [P_j^\Delta U_{1j}(Z) + Q_j^\Delta U_{2j}(Z)],$$

$U_{kj}^L(Z)$, $V_{kj}^L(Z)$ – похідні від переміщень у точці $Z(x, y) \in L$, які визначаються за формулами (1) через відповідні комплексні потенціали $\Phi_k(z_1, C_j)$, $\Psi_k(z_2, C_j)$, $k = 1, 2$.

Сталі P_j^Δ , Q_j^Δ пов'яжемо із функціями P , Q :

$$P_j^\Delta = \int_{L_j} P ds - X_j, \quad Q_j^\Delta = \int_{L_j} Q ds - Y_j. \quad (12)$$

Можна перевірити, що, якщо знайти розв'язок змінених таким чином інтегральних рівнянь (10), то, замість встановлених вище тотожностей, на кожному з контурів L_j отримаємо рівняння

$$P_j^\Delta = 0, \quad Q_j^\Delta = 0, \quad j = 1, \dots, J,$$

тобто будуть задовольнятися умови (5).

Розв'язування інтегральних рівнянь (10) проведено на основі квадратурних формул для регулярних і сингулярних інтегралів на замкнених контурах, наведених у [5, 11].

Побудований вище розв'язок можна узагальнити і на випадок областей складніших форм за допомогою розв'язків Гріна. Зокрема, запишемо інтегральні рівняння для півплощини $y < 0$ з отворами на основі розв'язку Гріна. Такі рівняння отримуємо, якщо у співвідношеннях (2) і (11) покласти [4]

$$\begin{aligned} \Phi_k(z_1) &= -\left(\frac{A_k}{z_1 - t_1} + \alpha_1 \frac{\bar{A}_k}{z_1 - \bar{t}_1} + \beta_1 \frac{\bar{B}_k}{z_1 - \bar{t}_2} \right), \\ \Psi_k(z_2) &= -\left(\frac{B_k}{z_2 - t_2} + \alpha_2 \frac{\bar{A}_k}{z_2 - \bar{t}_1} + \beta_2 \frac{\bar{B}_k}{z_2 - \bar{t}_2} \right), \quad k = 1, \dots, 4, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\bar{s}_1 - s_2}{\delta_1}, \quad \alpha_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_1}{\delta_1}, \\ \beta_1 &= \frac{\bar{s}_2 - s_2}{\delta_1}, \quad \beta_2 = \frac{s_1 - \bar{s}_2}{\delta_1}, \quad \delta_1 = s_2 - s_1. \end{aligned}$$

Крім цього, приймаємо, що потенціали Φ_D , Ψ_D є розв'язком задачі теорії пружності для суцільної півплощини з вільною від навантаження межею за дії прикладених до тіла зусиль.

При використанні розв'язків Гріна умови на горизонтальній межі виконуються автоматично.

Функції $\Phi_{3,4}$, $\Psi_{3,4}$ для смуги наведено в [6].

4. Результати обчислень.

4.1. Розтяг смуги з включенням. Розглянемо бор-епоксидну [6] смугу $-H < y < 0$ з круговим центральним включенням радіуса R . Приймаємо, що смуга розтягується зусиллями p , її межі вільні від навантажень. Розв'язок подамо у вигляді суми двох складових. Перша складова – це на-

пруження у суцільній смузі $\sigma_x^0 = p$, $\sigma_y^0 = 0$, $\tau_{xy}^0 = 0$. Переміщення в цій смузі будуть

$$u_0 = \varepsilon_x^0 x + \gamma_{xy}^0 y, \quad v_0 = \varepsilon_y^0 y,$$

де

$$\varepsilon_x^0 = a_{11}\sigma_x^0 + a_{12}\sigma_y^0 + a_{16}\tau_{xy}^0,$$

$$\varepsilon_y^0 = a_{21}\sigma_x^0 + a_{22}\sigma_y^0 + a_{26}\tau_{xy}^0,$$

$$\gamma_{xy}^0 = a_{61}\sigma_x^0 + a_{62}\sigma_y^0 + a_{66}\tau_{xy}^0.$$

Друга складова – коригувальний розв'язок, визначення якого зводиться до розгляду крайової задачі (1), у якій

$$U_D = -\left(\varepsilon_x^0 \frac{dx}{ds} + \gamma_{xy}^0 \frac{dy}{ds}\right), \quad V_D = -\varepsilon_y^0 \frac{dy}{ds},$$

та приймається, що включення не навантажене.

На рис. 1 наведено результати обчислень відносних нормальних напружень $\sigma = \sigma_n/p$. Суцільним лініям відповідає випадок, коли жорсткість матеріалу є максимальною у вертикальному напрямку, а штриховим – у горизонтальному. Криві обчислено для значень відношення діаметра включення до ширини смуги $2R/H = 0, 0.5, 0.8$. Тут і далі кутовій координаті $\theta = -90^\circ$ відповідає найвища точка на колі, і ця координата зростає при русі за годинниковою стрілкою.

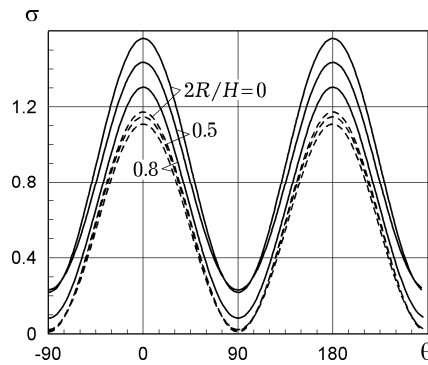


Рис. 1. Розтяг бор-епоксидної смуги з круговим включенням.

На рис. 1 бачимо, що найбільші напруження біля включення виникають при малих розмірах включення. При збільшенні розмірів включення нормальні напруження зменшуються. За максимальної жорсткості матеріалу у вертикальному напрямку напруження є значно більшими за величиною, ніж у випадку, коли у цьому напрямку жорсткість мінімальна.

Виконано розрахунки для ізотропного матеріалу з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$ і малому радіусі включення (при $R/H = 0.01$). Обчислені віднесені до p максимальні нормальні і кільцеві напруження при виборі 80-ти вузлових точок становлять 1.477 і 0.6299. Ці значення добре узгоджуються із отриманими на основі аналітичного розв'язку [3] даними 1.4778 і 0.6333.

4.2. Розтяг смуги силами, прикладеними до включень. Розглянуто бор-епоксидну смугу з двома круговими включеннями радіуса $R = 0.25H$ з центрами в точках $(\pm mH, -0.5H)$. До центрів включень прикладено зосереджені сили $(-P, 0)$, $(P, 0)$. Відносні нормальні напруження $\sigma = \sigma_n/PH$ на межі правого включення, обчислені при значеннях $m = 0.5, 1, 100$, наведено на рис. 2. Суцільні криві відповідають випадку, коли жорсткість є максимальною у вертикальному напрямку, а штриховими – у горизонтальному.

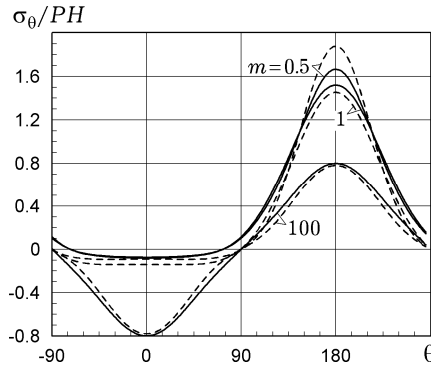


Рис. 2. Відносні нормальні напруження на межі правого включення при розтягу силами P .

При малих відстанях між включеннями, $m < 1$, найбільші напруження на їхніх межах виникають в областях, ближчих до центра смуги, при цьому у віддалених точках напруження практично відсутні. При зростанні відстані між включеннями максимальні напруження на межі зменшуються. Найменші напруження виникають при великих відстанях між включеннями, причому ці напруження є меншими, ніж усереднені по товщині смуги.

На рис. 3 наведено нормальні відносні напруження σ_x / PH у вертикальному перерізі між включеннями для значень $m = 0.5, 1, 2$.

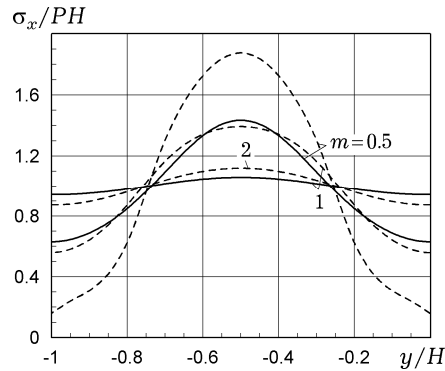


Рис. 3. Напруження між включеннями.

При відстанях між включеннями, більшими ніж дві товщини (при $m \geq 1$), напруження в області між включеннями є приблизно сталими і дорівнюють напруженням у суцільній смугі у випадку, коли максимальною є жорсткість у вертикальному напрямку, та при відстанях між включеннями, більшими ніж чотири товщини (при $m \geq 2$), за максимальної жорсткості у поздовжньому напрямку. При менших відстанях, $m < 1$, напруження істотно відмінні від усереднених по товщині смуги.

4.3. Гравітаційні напруження в однорідному тілі подамо у вигляді (вісь Oy напрямлена у вертикальному напрямку) [1]:

$$\sigma_y^0 = \gamma y, \quad \sigma_x^0 = \lambda \sigma_y^0, \quad \tau_{xy}^0 = 0, \quad (14)$$

де γ – питома вага тіла.

Коефіцієнт бокового тиску λ визначають експериментально [1]. Часто використовують гіпотезу Динника, згідно з якою в однорідному масиві виникають тільки вертикальні переміщення, і для ізотропного матеріалу за плоскої деформації маємо $\lambda = \nu / (1 - \nu)$.

Переміщення для ортотропного матеріалу будуть

$$u = a_{11} \lambda \gamma y x, \quad v = (a_{22} \gamma y^2 - a_{11} \lambda \gamma x^2) / 2.$$

Напруження у масиві з включеннями подамо у вигляді суми гравітаційних напружень (14) і коригувального розв'язку. Коригувальний розв'язок виразимо через потенціали Лехницького $\Phi(z_1)$, $\Psi(z_2)$, які визначаються із крайових умов (1), коли

$$U_D = -a_{11}\lambda\gamma(y'x + xy'), \quad V_D = -a_{22}\gamma y y' + a_{11}\lambda\gamma x x',$$

де $x' = dx/ds$, $y' = dy/ds$.

Розглянемо півплощину $y < 0$, яка перебуває під дією власної ваги і в якій виникає плоский деформований стан. Приймаємо, що включення має кругову форму радіуса R , центр розміщений в точці $(0, -H)$, матеріал ізотропний з коефіцієнтом Пуассона $\nu = 0.3$. Також приймаємо, що питома вага включення і основного матеріалу є однаковими. На рис. 4 наведено обчислені відносні нормальні напруження $\sigma_n/\gamma H$ (суцільні криві) і кільцеві напруження $\sigma_\theta/\gamma H$ (штрихові криві) на межі включення для значень відношення радіуса включення до глибини $R/H = 0.1, 0.25, 0.5, 0.75$.

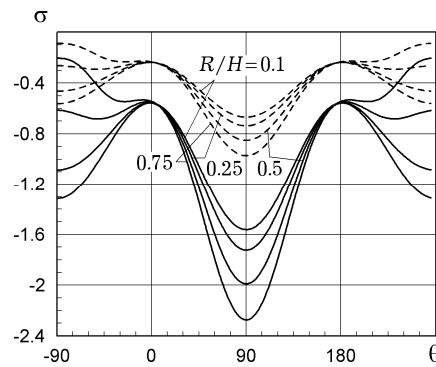


Рис. 4. Напруження біля включення в ізотропному матеріалі від дії власної ваги.

На рис. 4 бачимо, що найбільші стискувальні напруження виникають біля нижньої частини включення. Ці напруження зростають при збільшенні розмірів включення. Кільцеві напруження за величиною є значно меншими ніж нормальні.

Розглянуто транспортний матеріал алевроліт [1]. Розраховані відносні нормальні напруження на межі включення наведено на рис. 5. Тут суцільним кривим відповідає випадок, коли питома вага основного матеріалу і включення є однаковими; штриховим кривим – питома вага матеріалу включення є вдвічі меншою; штрихпунктирним кривим – вдвічі більшою.

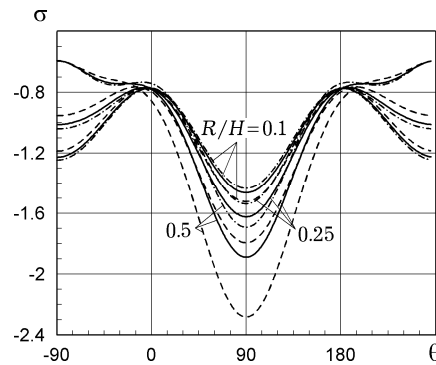


Рис. 5. Відносні нормальні напруження на межі алевроліту з включенням.

Бачимо, що максимальні нормальні напруження зростають за величиною при збільшенні ваги підсилювального включення.

Висновки. Запропоновано підхід до дослідження двовимірних напружень в анізотропних матеріалах з жорсткими включеннями, який базується на методі граничних інтегральних рівнянь. Рівняння записано на основі потенціалів Лехницького і теореми Коші. Проведено регуляризацію записаних рівнянь методом Шермана. Узагальнено інтегральні рівняння для півплощини і смуги на основі використання розв'язків Гріна, за яких умови на прямолінійних межах виконуються тотожно. З використанням розробленого підходу досліджено напруження у смузі при її розтягу на нескінченності та зосередженими силами, які прикладені до включень. Проведено аналіз напружень на межах включень та біля них. Зокрема, встановлено, що напруження на межах включень є меншими, ніж усереднені по ширині смуг. При розтягу на нескінченності напруження концентруються в областях, що розміщені в напрямку, протилежному до напрямку дії сил. Найменші за величиною напруження біля включень виникають при великих відстанях між включеннями.

Визначено пружні напруження біля порожнин у масивах гірських порід, підкріплених жорсткими матеріалами. Досліджено напруження біля порожнин, що мають перерізи кругової форми, для ізотропних матеріалів і масиву порід із алевроліту з урахуванням власної ваги. Розглянуто різні питомі ваги включення.

1. Буличев Н. С. Механика подземных сооружений в примерах и задачах. – Москва: Недра, 1989. – 270 с.
2. Космодамианский А. С. Напряженное состояние анизотропных сред с отверстиями или полостями. – Киев–Донецк: Вища шк., 1976. – 200 с.
3. Лехницкий С. Г. Анизотропные пластинки. – Москва: Гостехиздат, 1957. – 464 с.
Te same: *Lekhnitskii S. G. Anisotropic plates.* – New York etc.: Gordon and Breach Sci. Pub., 1968. – xvi+534 p.
4. Максимович О. В., Лавренчук С. В., Соляр Т. Я. Контактна задача для анізотропної півплощини з тріщинами // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2017. – **60**, № 1. – С. 141–148.
Te same: *Maksymovych O. V., Lavrenchuk S. V., Solyar T. Ya. Contact problem for an anisotropic half plane with cracks* // *J. Math. Sci.* – 2019. – **240**, No. 2. – P. 173–183. – <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04345-3>.
5. Максимович О. В., Соляр Т. Я. Метод механічних квадратур для розв'язування інтегральних рівнянь термопружності для пластинок з тепловіддачею // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2009. – **52**, № 4. – С. 207–215.
Te same: *Maksymovych O. V., Solyar T. Ya. Method of mechanical quadratures for solving integral equations of thermoelasticity for plates with heat exchange* // *J. Math. Sci.* – 2011. – **174**, No. 3. – P. 387–399. – <https://doi.org/10.1007/s10958-011-0306-x>.
6. Максимович М. О., Харченко Є. В. Визначення напружень в анізотропній смузі з отворами з використанням сингулярних інтегральних рівнянь та розв'язку Гріна // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2020. – **63**, № 3. – С. 69–77.
7. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев: Наук. думка, 1968. – 888 с.
Te same: *Savin G. N. Stress concentration around holes.* – Oxford: Pergamon Press, 1961. – xi + 430 p.
8. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1982. – 324 с.
9. Фильштинский Л. А. Краевые задачи теории упругости для анизотропной полуплоскости, ослабленной отверстием или разрезом // *Изв. АН СССР. Механика твердого тела.* – 1980. – № 6. – С. 72–79.
10. Шерман Д. И. К вопросу о напряженном состоянии весомой полуплоскости с двумя заглубленными круговыми отверстиями // *Тр. Ин-та физики Земли АН СССР.* – 1959. – **3**.
11. *Maksymovych O., Jaroszewicz J. Determination of stress state of anisotropic plates with rigid inclusions based on singular integral equations* // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2018. – **95**. – P. 215–221. – <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2018.07.004>.

12. Maksymovych O., Podhorecki A. Determination of stresses in anisotropic plates with elastic inclusions based on singular integral equations // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2019. – **104**. – P. 364–372.
– <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.03.039>.
13. Schclar N. A. Anisotropic analysis using boundary elements. – Southampton: Comput. Mech. Publ., 1994. – 142 p.
14. Tan C. L., Gao Y. L. Boundary element analysis of plane anisotropic bodies with stress concentrations and cracks // Compos. Struct. – 1992. – **20**, No. 1. – P. 17–28.
– [https://doi.org/10.1016/0263-8223\(92\)90008-Z](https://doi.org/10.1016/0263-8223(92)90008-Z).
15. Wang H. N., Zeng G. S., Jiang M. J. Analytical stress and displacement around noncircular tunnels in semi-infinite ground // Appl. Math. Model. – 2018. – **63**. – P. 303–328. – <https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.06.043>.

DETERMINATION OF TWO-DIMENSIONAL STRESSES NEAR THE RIGID INCLUSIONS IN ANISOTROPIC MEDIUM ON THE BASIS OF THE SHERMAN INTEGRAL EQUATIONS AND GREEN'S SOLUTIONS

Regularized Sherman-type integral equations for the plane anisotropic problem of elasticity theory with given displacements at the boundaries of holes are constructed. The integral representation of the general solution is written via the Lekhnitskii complex potentials using the Cauchy theorem and for the half-plane and the band with additional application of Green's solutions. The properties of the constructed solution are established. Based on Sherman's approach, regularizing components are added, which allow us to find an unambiguous solution by numerical methods. Using the developed approach, the elastic stresses in the band under tension through rigid pads are determined. Stress studies near cylindrical rigid inclusions for isotropic materials and siltstone rocks are performed. The interaction of inclusions on stress distribution is also studied.

Key words: *anisotropic strip, inclusions, stress state, Green's solutions, method of integral equations.*

¹ Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів,

² Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
01.07.21