

**ВПЛИВ ФІЗИЧНИХ І ГЕОМЕТРИЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЦИЛІНДРИЧНОЇ  
ОБОЛОНКИ З ПОЗДОВЖНЬОЮ ТРІЩИНОЮ НА ЇЇ ГРАНИЧНУ РІВНОВАГУ  
ЗА ВРАХУВАННЯ ІНЕРЦІЙНОСТІ МАТЕРІАЛУ**

*Розглянуто задачу про граничну рівновагу довгої циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною за дії навантаження, що змінюється в часі. Для випадку симетричного навантаження тріщини побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь для визначення коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів біля кінців тріщини. У випадку навантаження, що змінюється в часі за експоненціальним законом, досліджено залежності значень динамічних коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів від швидкості зміни навантаження і довжини тріщини для оболонок, виготовлених зі сталі, міді та чавуну.*

**Ключові слова:** циліндрична оболонка, поздовжня тріщина, змінне навантаження, експоненціальна залежність від часу, сингулярні інтегральні рівняння, динамічні коефіцієнти інтенсивності зусиль.

**Вступ.** Конструкційні елементи типу оболонок різної конфігурації широко використовують в усіх галузях господарської діяльності. Їхня працездатність у більшості випадків залежить від наявності у них гострокінцевих концентраторів напружень на зразок тріщин чи технологічних розрізів. Насамперед, це стосується елементів, виготовлених із матеріалів, що схильні до крихкого руйнування і піддаються впливу змінних у часі навантажень.

Визначальним для прогнозування міцності (вивчення граничної рівноваги конструкційних елементів) є аналіз напружено-деформованого стану в околах вершин концентраторів напружень. Відповідно розробка методик, що уможливають такі дослідження, становить значний теоретичний і практичний інтерес (див. [1–3]).

Методики розв'язування задач про напружено-деформований стан різного роду оболонок із тріщинами переважно ґрунтуються на застосуванні граничних інтегральних рівнянь, побудованих для випадків ізотропних або анізотропних, однорідних чи кусково-однорідних оболонок за дії статичного навантаження. Розгорнутий і вичерпний огляд цих методик і приклади їхнього застосування до розв'язування конкретних задач теорії оболонок подано в монографіях [1, 4] і в статтях [1, 5, 6, 8].

Загалом, сучасний математичний апарат дає змогу побудувати адекватну модель для довільного навантаження. Незважаючи на це, досліджень, які стосуються оболонкових структур, що зазнають дії змінного навантаження, небагато порівняно з дослідженнями аналогічних структур за статичного навантаження. Зазвичай у дослідженнях обмежуються математично простішими моделями для пластин і пологих оболонок, виконаних зі сталі, під дією змінного в часі навантаження, або оболонками складнішої конфігурації під дією статичного навантаження [1, 9–12]. Деякі задачі для елементів оболонкового типу, що перебувають під дією нестационарного навантаження, розглянуто в [10–15, 17, 20]. Задачі, що стосуються з'ясування характеристик напруженого стану тонкостінних циліндрів із тріщинами під дією динамічних навантажень і їхнього впливу на руйнування таких структур, розглянуто у працях [18, 19, 21].

Метою цієї статті є дослідження впливу довжини тріщини та швидкості зміни навантаження на значення коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів поблизу кінців поздовжньої тріщини для оболонок, виготовлених із

---

<sup>✉</sup> mahorkin@ukr.net

різних конструкційних матеріалів. Побудовано систему сингулярних інтегральних рівнянь для замкнутої циліндричної оболонки з поздовжнім розрізом, що перебуває під дією змінного в часі навантаження. Запропоновано алгоритм розв'язування такої системи та проведено відповідні дослідження. Здійснено порівняння значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів біля кінців тріщини для оболонок, виготовлених зі сталі, міді та чавуну.

**1. Постановка задачі.** Розглянуто безмежну циліндричну оболонку радіуса  $R$  з наскрізною поздовжньою тріщиною довжини  $2\ell$  (рис. 1). Прийнято, що оболонка перебуває під дією поверхневого навантаження, яке змінюється за експоненціальним законом,  $e^{\tilde{\gamma}\tau}$ , а розташування тріщини не порушує принципу Сен-Венана.

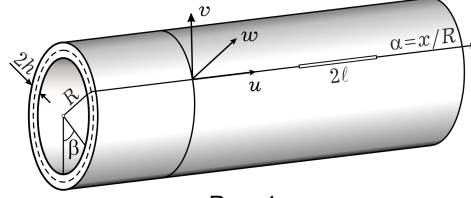


Рис. 1

Аналогічно до того, як це було реалізовано у [7, 16] згідно з [4, 6, 8, 9], запишемо відповідні зусилля, що виникатимуть в оболонці, поле вільних від напружень деформацій та умови на берегах тріщини [7]:

$$\begin{aligned}
 N_2^i(\alpha, \beta, \tau) &= N_2^{i*}(\alpha, \beta)e^{\tilde{\gamma}\tau}, & S^i(\alpha, \beta, \tau) &= S^{i*}(\alpha, \beta)e^{\tilde{\gamma}\tau}, \\
 M_2^i(\alpha, \beta, \tau) &= M_2^{i*}(\alpha, \beta)e^{\tilde{\gamma}\tau}, & Q_2^{i*}(\alpha, \beta, \tau) &= Q_2^{i**}(\alpha, \beta)e^{\tilde{\gamma}\tau}, \quad i = 0, 1, \\
 \varepsilon_{\beta\beta}^0 &= \varepsilon_{\beta\beta}^*e^{\tilde{\gamma}\tau} = R^{-1}[v(\alpha, \tau)]\delta(\beta), & \varepsilon_{\alpha\beta}^0 &= \varepsilon_{\alpha\beta}^*e^{\tilde{\gamma}\tau} = R^{-1}[u(\alpha, \tau)]\delta(\alpha), \\
 \varkappa_{\beta\beta}^0 &= \varkappa_{\beta\beta}^*e^{\tilde{\gamma}\tau} = -R^{-1}\{[\theta_{\beta}(\alpha, \tau)]\delta(\beta) - R^{-2}[w(\alpha, \tau)]\partial_{\beta}\delta(\beta)\}, \\
 \varkappa_{\alpha\beta}^0 &= \varkappa_{\alpha\beta}^*e^{\tilde{\gamma}\tau} = -R^{-2}\partial_{\alpha}[w(\alpha, \tau)]\delta(\beta), & \varepsilon_{\alpha\alpha}^0 &= \varkappa_{\alpha\alpha}^0 = 0, \\
 N_2^+(\alpha, 0, \tau) &= N_2^-(\alpha, 0, \tau) = f_1(\alpha)e^{\tilde{\gamma}\tau}, \\
 S^+(\alpha, 0, \tau) &= S^-(\alpha, 0, \tau) = f_2(\alpha)e^{\tilde{\gamma}\tau}, \\
 M_2^+(\alpha, 0, \tau) &= M_2^-(\alpha, 0, \tau) = f_3(\alpha)e^{\tilde{\gamma}\tau}, \\
 Q_2^{+*}(\alpha, 0, \tau) &= Q_2^{-*}(\alpha, 0, \tau) = f_4(\alpha)e^{\tilde{\gamma}\tau},
 \end{aligned} \tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}
 f_1(\alpha) &= N_2^{1*}(\alpha, +0) - N_2^{0*}(\alpha, +0), & f_2(\alpha) &= S^{1*}(\alpha, +0) - S^{0*}(\alpha, +0), \\
 f_3(\alpha) &= M_2^{1*}(\alpha, +0) - M_2^{0*}(\alpha, +0), & f_4(\alpha) &= Q_2^{1**}(\alpha, +0) - Q_2^{0**}(\alpha, +0).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Тут  $\varepsilon_{ij}^*$ ,  $\varkappa_{ij}^*$ ,  $i, j = \alpha, \beta$ , - функції координат;  $[u(\alpha, \tau)] = [u^*(\alpha)]e^{\tilde{\gamma}\tau}$ ,  $[v(\alpha, \tau)] = [v^*(\alpha)]e^{\tilde{\gamma}\tau}$ ,  $[w(\alpha, \tau)] = [w^*(\alpha)]e^{\tilde{\gamma}\tau}$ ,  $[\theta_{\beta}(\alpha, \tau)] = [\theta_{\beta}^*(\alpha)]e^{\tilde{\gamma}\tau}$  - стрибки переміщень і кутів повороту;  $\tau = \frac{t}{T}$  - безрозмірний час;  $T = \frac{\pi R}{v_{\tau}}$  - час, за який

пружна хвиля обійде половину обводу оболонки;  $v_{\tau} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$  - швидкість поширення пружної хвилі у матеріалі оболонки;  $E$  - модуль Юнга матеріалу оболонки;  $\rho$  - густина матеріалу оболонки;  $\tilde{\gamma}$  - деякий сталий коефіцієнт, що характеризує швидкість зростання навантаження;  $\delta(\cdot)$  - дельта-

функція Дірака;  $\partial_j^n = \frac{\partial^n}{\partial j^n}$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $j = \alpha, \beta, \tau$ ;  $N_2^0$ ,  $S^0$ ,  $Q_2^{0*}$ ,  $M_2^0$  – нормальне, зсувне, узагальнене перерізує зусилля і згинний момент в оболонці без тріщини відповідно;  $N_2^1$ ,  $S^1$ ,  $Q_2^{1*}$ ,  $M_2^1$  – аналогічні зусилля, прикладені до берегів реальної тріщини; індексами «+» та «-» позначено відповідні зусилля і моменти на берегах розрізу  $\beta = \pm 0$ .

Зазначимо, що у випадку комплексного значення  $\tilde{\gamma} = \text{Re } \tilde{\gamma} + i \text{Im } \tilde{\gamma}$  перейдемо до постановки задачі для навантаження, яке змінюється гармонічно за законом косинуса або синуса. За такої постановки задачі необхідно у виразах (1)–(3) розглядати рівність їхніх дійсних (косинусоїдальний закон) або уявних (синусоїдальний закон) частин. У подальшому викладки будемо робити для загального вигляду  $\tilde{\gamma}$ .

**2. Ключові функції задачі.** Система рівнянь рівноваги в переміщеннях відповідно до [2, 4] має вигляд

$$L_{k1}u + L_{k2}v + L_{k3}w - R^2 c_\tau^{-2} \ddot{g}_k = q_k^{0*}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Тут

$$L_{11} = \partial_\alpha^2 + 0.5v_-^{-1} \partial_\beta^2, \quad L_{22} = 0.5v_-^{-1} \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2 + c_1^2 [2v_-^{-1} \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2],$$

$$L_{33} = 1 + c_1^2 \nabla^2 \nabla^2, \quad L_{23} = L_{32} = \partial_\beta - c_1^2 [(2 - v) \partial_\alpha^2 \partial_\beta + \partial_\beta^3],$$

$$L_{12} = L_{21} = 0.5v_+^{-1} \partial_\alpha \partial_\beta, \quad L_{13} = L_{31} = v \partial_\alpha,$$

$$q_1^{0*} = R(v \partial_\alpha \varepsilon_{\beta\beta}^0 + 0.5v_-^{-1} \partial_\beta \varepsilon_{\alpha\beta}^0),$$

$$q_2^{0*} = R(\partial_\beta \varepsilon_{\beta\beta}^0 + 0.5v_-^{-1} \partial_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta}^0) + \frac{h^2}{3} [\partial_\beta x_{\beta\beta}^0 + 2v_-^{-1} \partial_\alpha x_{\alpha\beta}^0],$$

$$q_3^{0*} = R\varepsilon_{\beta\beta}^0 - \frac{h^2}{3} [v \partial_\alpha^2 x_{\beta\beta}^0 + 2v_-^{-1} \partial_\alpha \partial_\beta x_{\alpha\beta}^0 + \partial_\alpha^2 x_{\beta\beta}^0],$$

$$\{g_1, g_2, g_3\} = \{u, v, w\},$$

$$\nabla^2 = \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2, \quad \partial_j^n \partial_\ell^k = \frac{\partial^{n+k}}{\partial j \partial \ell}, \quad j, \ell = \alpha, \beta, \quad n, k = 1, 2, \dots,$$

$$c_\tau^2 = \frac{E(1 - v^2)^2}{\rho}, \quad c_1^2 = \frac{h^2}{3R^2}, \quad v_\pm = \frac{1}{1 \pm v}.$$

Застосувавши для розв'язування системи (5) операторний метод [8, 9], розв'язок системи диференціальних рівнянь через ключові функції  $\Phi_j$ ,  $\Psi_j$ ,  $j = 2, 3$ , подамо так:

$$g_\ell(\alpha, \tau) = g_\ell^*(\alpha) e^{\tilde{\gamma}\tau} = R \sum_{j=2}^3 (L_{j\ell}^* \Phi_j + P_{j\ell}^* \Psi_j) e^{\tilde{\gamma}\tau}. \quad (6)$$

Тут

$$L_{k\ell}^* = L_{k\ell} + L_{k\ell}^{**}, \quad P_{k\ell}^* = P_{k\ell} + P_{k\ell}^{**}, \quad \ell = u, v, w, \quad (7)$$

де  $L_{k\ell}^{**}$ ,  $P_{k\ell}^{**}$  – оператори, обумовлені залежністю навантаження від часу, що мають такий вигляд:

$$L_{2u}^{**} = \gamma_1^2 \left[ 4v \partial_\alpha^3 - 2v_-^2 (\partial_\alpha^5 + \partial_\alpha \partial_\beta^4 + 2\partial_\alpha^3 \partial_\beta^2 - \partial_\alpha \partial_\beta^3) + \right. \\ \left. + c_1^{-2} (v \partial_\alpha^3 - \partial_\alpha \partial_\beta^2) \right] - 2\gamma_1^4 v c_1^{-2} v_+ \partial_\alpha,$$

$$\begin{aligned}
L_{3u}^{**} &= \gamma_1^2 \left[ \partial_\beta^3 - \partial_\beta^5 - 2\partial_\alpha^2 \partial_\beta^3 - \partial_\alpha^4 \partial_\beta + c_1^{-2} (\partial_\beta^3 - \partial_\beta - v \partial_\alpha^2 \partial_\beta) \right] - \gamma_1^4 c_1^{-2} \partial_\beta, \\
P_{u2}^{**} &= -\gamma_1^2 v_-^{-1} \left[ 2v^2 \partial_\alpha^3 + (1 + 3v) \partial_\alpha \partial_\beta^2 \right], \quad P_{u3}^{**} = -2\gamma_1^2 (1 + 3v) \partial_\alpha^2 \partial_\beta, \\
L_{2v}^{**} &= -\gamma_1^2 2v v_- \left[ \partial_\beta^5 + \partial_\beta^3 + 2\partial_\alpha^2 \partial_\beta^3 + \partial_\alpha^4 \partial_\beta + (2 - v) \partial_\alpha^2 \partial_\beta - \right. \\
&\quad \left. - 0.5 c_1^{-2} v_-^{-1} (\partial_\beta^3 + (2 + v) \partial_\alpha^2 \partial_\beta) \right] - 2\gamma_1^4 c_1^{-2} v_- \partial_\beta, \\
L_{3v}^{**} &= \gamma_1^2 \left[ c_1^{-2} (\partial_\alpha^3 - \partial_\alpha - v \partial_\alpha \partial_\beta^2) - \partial_\alpha^2 - \partial_\alpha \partial_\beta^4 - 2\partial_\alpha^3 \partial_\beta^2 \right] - \gamma_1^4 c_1^{-2} \partial_\alpha, \\
P_{2v}^{**} &= -\gamma_1^2 v_-^{-1} \left[ \partial_\alpha^2 \partial_\beta - 2v_- \partial_\beta - (1 + v) v_- \partial_\beta^3 - c_1^2 2v_-^{-1} \partial_\alpha^4 \partial_\beta \right] - 2\gamma_1^4 v_- \partial_\beta, \\
P_{3v}^{**} &= \gamma_1^4 4 \left[ \partial_\alpha^3 - \partial_\alpha - 2(1 + v) \partial_\alpha \partial_\beta^2 - c_1^2 (\partial_\alpha^5 + v \partial_\alpha^3 \partial_\beta^2) \right] - 4\gamma_1^4 \partial_\alpha, \\
L_{2w} &= \partial_\beta^6 + \partial_\beta^4 + 4\partial_\alpha^2 \partial_\beta^4 + 4\partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 + (4 - v^2) \partial_\alpha^4 \partial_\beta^2 + c_1^{-2} v_-^{-1} v_+^{-1} \partial_\alpha^4, \\
L_{2w}^{**} &= \gamma_1^4 2c_1^{-2} v_- - \gamma_1^2 \left[ 2(2 - v) v_- \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 + c_1^{-2} (\partial_\beta^2 + (3 + 2v) \partial_\alpha^2) \right], \\
L_{3w}^{**} &= \gamma_1^2 \left[ \partial_\alpha \partial_\beta^2 + (2 - v) \partial_\alpha^3 \partial_\beta - c_1^{-2} (1 + v) \partial_\alpha \partial_\beta \right], \\
P_{2w}^{**} &= \gamma_1^2 (1 - v)^{-1} \left[ 2\partial_\beta^2 + (3 - v) (\partial_\beta^4 + v \partial_\alpha^4 + (1 + v) \partial_\alpha^2 \partial_\beta^2) \right] - \\
&\quad - 2\gamma_1^4 (1 - v) (\partial_\beta^2 + v \partial_\alpha^2), \\
P_{3w}^{**} &= \gamma_1^2 \left[ 4\partial_\alpha \partial_\beta^2 + 2(3 - v) (\partial_\alpha \partial_\beta^3 + \partial_\alpha^3 \partial_\beta) \right] - 4\gamma_1^4 \partial_\alpha \partial_\beta, \\
\gamma_1^2 &= R^2 \frac{\tilde{\gamma}^2}{T^2} c_\tau^{-2}.
\end{aligned}$$

Для того щоб виконувались подання (6), функції  $\phi_j$ ,  $\psi_j$  повинні задовольняти такі рівняння [8, 10]:

$$D\phi_2 = \varepsilon_{22}^*, \quad D\phi_3 = \varepsilon_{12}^*, \quad D\psi_2 = R\alpha_{22}^*, \quad D\psi_3 = R\alpha_{12}^*, \quad (8)$$

де оператор  $D$  має вигляд

$$D = D^0 + D^* + D^{**}. \quad (9)$$

Тут  $D^0$ ,  $D^*$  – оператори, вигляд яких збігається із поданими у [5] для випадку статичного навантаження:

$$D^0 = \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2,$$

$$D^* = (8 - 2v^2) \partial_\alpha^4 \partial_\beta^2 + 8\partial_\alpha^2 \partial_\beta^4 + 2\partial_\beta^6 + (1 - v^2) c_1^{-2} \partial_\alpha^4 + 4\partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 + \partial_\beta^4,$$

$D^{**}$  – оператор, обумовлений залежністю навантаження від часу:

$$\begin{aligned}
D^{**} &= 2\gamma_1^4 (1 - v)^{-1} c_1^{-2} \left\{ (8 - 2v^2) \partial_\alpha^4 \partial_\beta^2 + c_1^2 \left[ \nabla^2 \nabla^2 - \partial_\beta^2 - 2v_-^{-1} \partial_\alpha^2 \right] \right\} + \\
&\quad + \gamma_1^2 \left\{ c_1^{-2} \left[ \nabla^2 \nabla^2 - \partial_\beta^2 - (3 + 2v) \partial_\alpha^2 \right] + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2v_- \left[ 0.5(v-3)\nabla^2\nabla^2\nabla^2 - 0.5(3+v)\partial_\beta^4 + \right. \\
& \left. + 2v_-^{-1}(\partial_\alpha^4 - \partial_\beta^2) \right] - (2-v^2)\partial_\alpha^2\partial_\beta^2 - \\
& - 2c_1^2 \left[ 2v_-^{-1}\partial_\alpha^6 + v_-^{-1}v_+^{-1}\partial_\alpha^4\partial_\beta^2 \right] \left. \right\} + 2\gamma_1^6 v_- c_1^{-2}. \tag{10}
\end{aligned}$$

Розв'язок рівнянь (8) подамо у вигляді інтеграла типу згортки:

$$\tilde{\Psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha, \beta, \xi, \theta) \mathfrak{G}^*(\xi) d\xi. \tag{11}$$

Тут

$$\tilde{\Psi} = \{\varphi_2, \varphi_3, \psi_2, \psi_3\}; \quad \mathfrak{G}^*(\xi) = \{\varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \mathfrak{x}_{22}, \mathfrak{x}_{12}\},$$

$\Phi(\alpha, \beta, \xi, \theta)$  – розв'язок диференціального рівняння  $D\Phi = \delta(\alpha - \xi)\delta(\beta - \theta)$  ( $\delta(x)$  – дельта-функція Дірака), так званий фундаментальний розв'язок (функція Гріна) для безмежно довгої циліндричної оболонки [8]:

$$\Phi(\alpha, \beta, \xi, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{\delta_{0n}}{2} \right) \Phi_n(\alpha, \xi) \cos(n(\beta - \theta)), \tag{12}$$

$$\text{де } \delta_{0n} = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \neq 0, \end{cases} \quad - \text{ символ Кронекера.}$$

Складові  $\Phi_n(\xi - \alpha)$  функції Гріна (12) для безмежно довгої циліндричної оболонки є розв'язками диференціального рівняння:

$$D_n \Phi_n = \delta(\alpha - \xi), \tag{13}$$

де

$$\begin{aligned}
D_n = 0.5 \left( \left\{ \gamma_1^4 \left[ n^2(2v_- + c_1^{-2}(3-v)v_-) + 2n^4v_- + 2c_1^{-2}v_- \right] + \right. \right. \\
+ \gamma_1^2 \left[ n^2(c_1^{-2} + 2v_-) + n^4(c_1^{-2} - (3+v)v_-) + \right. \\
+ n^6(3-v)v_- \left. \left. \right\} + n^4(n^2 - 1)^2 + 2\gamma_1^6 c_1^{-2} v_- - \right. \\
- \left\{ 4n^2(n^2 - 1)^2 + \gamma_1^4 \left[ 4n^2v_- + 4 + c_1^{-2}v_-(3-v) \right] + \right. \\
+ \gamma_1^2 \left[ 4 + (3+2v)c_1^{-2} + n^2(2c_1^{-2} - 2(2-v^2)v_-) + \right. \\
+ 3n^4(3-v)v_- \left. \left. \right\} \partial_\alpha^2 + \left\{ 6n^4 - 2n^2(4-v^2) + c_1^{-2}(1-v^2) - \right. \right. \\
- \left. \left. 2\gamma_1^4 v_- + \gamma_1^2 \left[ 4 + c_1^{-2} + n^2 3(3-v)v_- + 2c_1^2 v_+ \right] \right\} \partial_\alpha^4 - \right. \\
\left. - \left[ 4n^2 + \gamma_1^2(4c_1^2 + (3-v)v_-) \right] \partial_\alpha^6 + \partial_\alpha^8 \right).
\end{aligned}$$

Застосувавши до (13) перетворення Фур'є, отримаємо вираз для  $\Phi_n(\alpha - \xi)$  у вигляді оберненого перетворення Фур'є:

$$\Phi_n(\alpha - \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F[\Phi_n(\alpha)] e^{i\alpha\lambda} d\lambda,$$

де  $F[\Phi_n(\alpha)]$  – зображення Фур'є функції  $\Phi_n(\alpha - \xi)$ :

$$F[\Phi_n(\alpha)] = \frac{y^{-i\xi\lambda}}{\sqrt{2\pi}(y^8 - A_6 y^6 + A_4 y^4 - A_2 y^2 + A_0)}. \quad (14)$$

Тут

$$\begin{aligned} A_0 &= n^4(n^2 - 1)^2 + v_- [2\gamma_1^6 c_1^{-2} + \gamma_1^4(n^2(3 - v)c_1^{-2} + 2n^4)] + \gamma_1^2 c_1^{-2}(n^2 + n^4), \\ A_2 &= 4n^2(n^2 - 1)^2 + \gamma_1^4 v_- [c_1^{-2}(3 - v) + 4n^2] + \gamma_1^2 [n^2 2c_1^{-2} + 3n^4(3 - v)v_-], \\ A_4 &= 6n^4 + (c_1^2 v_- v_+)^{-1} + 2\gamma_1^4 v_- + \gamma_1^2 [c_1^{-2} + n^2 3(3 - v)v_-], \\ A_6 &= 4n^2 + \gamma_1^2(3 - v)v_-. \end{aligned}$$

З метою виділення особливостей ключові функції на лінії розрізу подаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \varphi_j(\alpha, \beta) &= \varphi_j^0(\alpha, \beta) + \varphi_j^*(\alpha, \beta), \\ \psi_j(\alpha, \beta) &= \psi_j^0(\alpha, \beta) + \psi_j^*(\alpha, \beta), \quad j = 2, 3, \end{aligned} \quad (15)$$

де  $\varphi_j^*(\alpha, \beta) = \varphi_j(\alpha, \beta) - \varphi_j^0(\alpha, \beta)$ ,  $\psi_j^*(\alpha, \beta) = \psi_j(\alpha, \beta) - \psi_j^0(\alpha, \beta)$  – регулярні частини ключових функцій;  $\varphi_j^0(\alpha, \beta)$ ,  $\psi_j^0(\alpha, \beta)$  – сингулярні частини ключових функцій, які задовольняють рівняння

$$D^0 \varphi_2^0 = \varepsilon_{22}^*, \quad D^0 \varphi_3^0 = \varepsilon_{12}^*, \quad D^0 \psi_2^0 = R\alpha_{22}^*, \quad D^0 \psi_3^0 = R\alpha_{12}^*,$$

їхнє визначення докладно описано у [8, 16].

Підставимо вирази  $\varphi_j(\alpha, \beta)$ ,  $\psi_j(\alpha, \beta)$  (15) у подання (11) та проінтегруємо частинами, врахувавши залежності (2). У результаті цього отримаємо їх у такому вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi_2(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta_{0n}}{2}\right) \cos n\beta \times \\ &\quad \times \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [v^{*'}(\xi)] \left[ \Psi_n^0(\xi - \alpha) + \Psi_n^*(\xi - \alpha) \right] d\xi, \\ \varphi_3(\alpha, \beta) &= \frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta_{0n}}{2}\right) \cos n\beta \times \\ &\quad \times \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [u^{*'}(\xi)] \left[ \Psi_n^0(\xi - \alpha) + \Psi_n^*(\xi - \alpha) \right] d\xi, \\ \psi_2(\alpha, \beta) &= -\frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta_{0n}}{2}\right) \cos n\beta \times \\ &\quad \times \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [\theta^{*'}(\xi)] \left[ \Psi_n^0(\xi - \alpha) + \Psi_n^*(\xi - \alpha) \right] d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta_{0n}}{2}\right) n \sin n\beta \times \\ &\quad \times \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [w^{*'}(\xi)] \left[ \Psi_n^0(\xi - \alpha) + \Psi_n^*(\xi - \alpha) \right] d\xi, \end{aligned}$$

$$\Psi_3(\alpha, \beta) = -\frac{1}{\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{\delta_{0n}}{2}\right) \cos n\beta \times \\ \times \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [w^{*'}(\xi)] \left[ \Psi_n^0(\xi - \alpha) + \Psi_n^*(\xi - \alpha) \right] d\xi. \quad (16)$$

Тут  $\Psi_n^*(\xi - \alpha) = \Psi_n(\xi - \alpha) - \Psi_n^0(\xi - \alpha)$  – регулярна, а  $\Psi_0^0(z) = 0$  – сингулярна частини функції  $\Psi_n(\xi - \alpha)$ ,

$$\Psi_k^0(z) = \frac{1}{96k^8} e^{-k|z|} \left[ k^3 z^3 + 9k^2 z^2 \operatorname{sgn} z + 33kz + 48 \operatorname{sgn} z \right] - \frac{1}{2k^8} \operatorname{sgn} z, \\ z = \xi - \alpha, \quad k = 1, 2, \dots$$

Вигляд функції  $\Psi_n(\xi - \alpha)$  залежить від коренів отриманого на основі (14) характеристичного рівняння

$$y^8 - A_6 y^6 + A_4 y^4 - A_2 y^2 + A_0 = 0. \quad (17)$$

При дослідженнях встановлено, що у випадку  $\operatorname{Im} \tilde{\gamma} = 0$  (навантаження монотонно зростає або спадає за експоненціальним законом) корені рівняння (17) можуть мати відмінні від нуля дійсні та уявні частини:

$$y_{1,2,3,4}^{(n)} = \pm (b_{1n} \pm ia_{1n}), \quad y_{5,6,7,8} = \pm (b_{2n} \pm ia_{2n}), \quad k \leq n,$$

або ж у чотирьох коренів дійсні частини рівні нулеві:

$$y_{1,2,3,4}^{(n)} = \pm b_{1n} \pm ia_{1n}, \quad y_{5,6} = \pm ib_{2n}, \quad y_{7,8} = \pm ia_{2n}, \quad 0 \leq n < k.$$

У першому випадку функції  $\Psi_n(z)$  матимуть такий вигляд:

$$\Psi(z) = \frac{1}{X_n} \sum_{j=1}^2 \left\{ e^{-a_{jn}|z|} \left[ C_{jn}^0 \cos(b_{jn}z) \operatorname{sgn} z + B_{jn}^0 \sin(b_{jn}z) \right] - C_{jn}^0 \operatorname{sgn} z \right\}, \quad (18)$$

а у другому – такий:

$$\Psi(z) = \frac{B_{1n}^0 b_{1n} - A_{1n} a_{1n}}{p_{jn}^+} \operatorname{sgn} z - \left( A_{2n} \frac{1 - e^{-a_{2n}|z|}}{a_{2n}} + \right. \\ \left. + B_{2n}^0 \frac{1 - e^{-b_{2n}|z|}}{b_{2n}} \right) \operatorname{sgn} z + \left( \frac{B_{1n}^0 a_{1n} - A_{1n} b_{1n}}{p_{jn}^+} \sin(b_{1n}z) + \right. \\ \left. + \frac{B_{1n}^0 b_{1n} - A_{1n} a_{1n}}{p_{jn}^+} \cos(b_{1n}z) \operatorname{sgn} z \right) e^{-a_{1n}|z|}.$$

Тут

$$C_{jn}^0 = (q_{jn})^{-1} (p_{jn}^+)^{-2} (q_{jn} C_{jn} - p_{jn} B_{jn}), \\ B_{jn}^0 = (q_{jn})^{-1} (p_{jn}^+)^{-2} (p_{jn} C_{jn} + q_{jn} B_{jn}), \\ X_n = 2(C_{1n}^2 + B_{1n}^2), \\ C_{1n} = (p_{2n}^- - p_{1n}^-)^2 + q_{2n}^2 - q_{1n}^2, \quad C_{2n} = (p_{1n}^- - p_{2n}^-)^2 + q_{1n}^2 - q_{2n}^2, \\ A_{1n} = (4a_{1n} p_{1n}^+ r_1 s_1)^{-1} [5a_{1n}^4 + (a_{2n}^2 + b_{2n}^2)(b_{10}^2 + b_{2n}^2) - a_{1n}^2 (3p_{2n}^+ + 10b_{1n}^2)],$$

$$\begin{aligned}
A_{2n} &= -(2a_{2n}p_{2n}^-r_1)^{-1}, & B_{1n} &= 2(p_{2n}^- - p_{1n}^-)q_{1n}, & B_{2n} &= 2(p_{1n}^- - p_{2n}^-)q_{2n}, \\
B_{1n}^0 &= [5b_{1n}^4 + (a_{1n}^2 - a_{2n}^2)(a_{1n}^2 + b_{2n}^2) - b_{1n}^2(3p_{2n}^+ - 10a_{1n}^2)](4b_{1n}p_{1n}^+r_1s_1)^{-1}, \\
B_{2n}^0 &= (2b_{2n}p_{2n}^-s_1)^{-1}, & p_{jn}^\pm &= a_{jn}^2 \pm b_{jn}^2, & q_{jn} &= 2a_{jn}b_{jn}, & \gamma_1 &= R^2\tilde{\gamma}^2c_\tau^{-2}, \\
r_1 &= 4a_{2n}^2b_{1n}^2 + (a_{1n}^2 + b_{1n}^2 - a_{2n}), & s_1 &= 4b_{2n}^2b_{1n}^2 + (p_{1n}^+ - b_{1n}).
\end{aligned}$$

У випадку навантаження, що змінюється гармонічно ( $\text{Re } \tilde{\gamma} = 0$ ,  $\text{Im } \tilde{\gamma} \neq 0$ ), можлива також наявність дійсних коренів. Зокрема, розглянуто варіант, коли чотири корені рівняння (17) будуть комплексними, а інші чотири – дійсними:

$$y_{1,2,3,4}^{(n)} = \pm b_{1n} \pm ia_{1n}, \quad y_{5,6} = \pm b_{2n}, \quad y_{7,8} = \pm a_{2n}, \quad 0 \leq n < k,$$

$$\begin{aligned}
\Psi_n(z) &= A_{1n}^0 e^{-a_1|z|} \cos(b_1 z) \text{sgn } z + B_{1n}^0 e^{-a_1|z|} \sin(b_1 z) - \\
&\quad - A_{1n}^0 \text{sgn } z + A_{2n}^0 \sin\left(\frac{a_2 z}{2}\right)^2 \text{sgn } z - B_{2n}^0 \sin\left(\frac{b_2 z}{2}\right)^2 \text{sgn } z,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{1n}^0 &= \left[ 3a_1^4 + 3b_1^4 - 2b_1^2b_2^2 + 2a_1^2(a_2^2 - 5b_1^2 + b_2^2) - a_2^2(2b_1^2 - b_2^2) \right] (a_1^2 + b_1^2)^{-2} \times \\
&\quad \times \left\{ 2 \left[ (a_1^2 + a_2^2)^2 + 2(a_1^2 - a_2^2)b_1^2 + b_1^4 \right] \times \right. \\
&\quad \left. \times \left[ (a_1^2 + b_1^2)^2 + 2(a_1^2 - b_1^2)b_2^2 + b_2^4 \right] \right\}^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{1n}^0 &= \left\{ a_1^6 + b_1^2(a_2^2 - b_1^2)(b_1^2 - b_2^2) + a_2^4(a_2^2 - 15b_1^2 + b_2^2) + \right. \\
&\quad \left. + a_1^2 \left[ 15b_1^4 + a_2^2b_2^2 - 6b_1^2(a_2^2 + b_2^2) \right] \right\} \times \\
&\quad \times \left[ (a_1^2 + b_1^2)^2 + 2(a_1^2 - b_1^2)b_2^2 + b_2^4 \right]^{-1} \times \\
&\quad \times \left\{ 4a_1b_1(a_1^2 + b_1^2)^2 \left[ (a_1^2 + a_2^2)^2 + 2(a_1^2 - a_2^2)b_1^2 + b_1^4 \right] \right\}^{-1},
\end{aligned}$$

$$A_{2n}^0 = 2 \left\{ 2a_2^2(a_2^2 - b_2^2) \left[ (a_2^2 - b_1^2)^2 + 2a_1^2(a_2^2 + b_1^2) + a_1^4 \right] \right\}^{-1},$$

$$B_{2n}^0 = 2 \left\{ b_2^2(a_2^2 - b_2^2) \left[ (a_1^2 + b_1^2)^2 + 2b_2^2(a_1^2 - b_1^2) + b_2^4 \right] \right\}^{-1}.$$

За умови гармонічного навантаження при великих значеннях частоти коливань  $\text{Im } \tilde{\gamma} > 30000$  можлива також наявність лише двох комплексних коренів, причому інші шість будуть дійсними числами.

**3. Побудова сингулярних інтегральних рівнянь.** Вирази (16) для ключових функцій  $\varphi_j(\alpha, \beta)$ ,  $\psi_j(\alpha, \beta)$  містять невідомі стрибки переміщень і кутів повороту (2). Для їх визначення скористаємося крайовими умовами (3).

Зусилля і моменти в оболонці визначимо за відомими формулами [6, 8], які, з огляду на подання (2), (3), запишемо так:



$$\begin{aligned}
N_1 &= N_1^* e^{\gamma t} = D_0 [(1 - \nu^2)R]^{-1} (\partial_\alpha u^* + \nu(\partial_\beta v^* + w^*) - \nu R \varepsilon_{22}^*) e^{\gamma t}, \\
N_2 &= N_2^* e^{\gamma t} = D_0 [(1 - \nu^2)R]^{-1} (\partial_\beta v^* + w^* + \nu \partial_\alpha u^* - R \varepsilon_{22}^*) e^{\gamma t}, \\
M_1 &= M_1^* e^{\gamma t} = -D_0 c^2 (\partial_\alpha^2 w^* + \nu(\partial_\beta^2 w^* - \partial_\beta v^*) + \nu R^2 \varepsilon_{22}^*) e^{\gamma t}, \\
M_2 &= M_2^* e^{\gamma t} = -D_0 c^2 (\partial_\beta^2 w^* - \partial_\beta v^* + \nu \partial_\alpha^2 w^* + R^2 \varepsilon_{22}^*), \\
S &= S^* e^{\gamma t} = Eh [(1 + \nu)R]^{-1} (\partial_\beta u^* + \partial_\alpha v^* - R \varepsilon_{12}^*) e^{\gamma t}, \\
H &= H^* e^{\gamma t} = -D_0 c^2 (1 - \nu) (\partial_\alpha (\partial_\beta w^* - v^*) + R^2 \varepsilon_{12}^*) e^{\gamma t}. \tag{19}
\end{aligned}$$

У випадку симетричного відносно тріщини навантаження оболонки умови (3) з урахуванням (4) спрощуються:

$$\begin{aligned}
N_2^{*+}(\alpha, 0) &= N_2^{*-}(\alpha, 0) = f_1^*(\alpha), \\
M_2^{*+}(\alpha, 0) &= M_2^{*-}(\alpha, 0) = f_3^*(\alpha). \tag{20}
\end{aligned}$$

Використовуючи у виразах (19) подання (8), отримаємо

$$\begin{aligned}
N_2^* &= C_{N\phi} \phi_2 + D_{N\phi} \phi_3 + C_{N\psi} \psi_2 + D_{N\psi} \psi_3, \\
M_2^* &= C_{M\phi} \phi_2 + D_{M\phi} \phi_3 + C_{M\psi} \psi_2 + D_{M\psi} \psi_3, \tag{21}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
C_{N\phi} &= D_0 \left( -\partial_\alpha^4 \nabla^2 \nabla^2 - 2\gamma_1^6 c_1^{-2} \nu_-^2 \nu_+^1 + \nu_- \nu_+ \gamma_1^4 \times \right. \\
&\quad \times \left\{ c_1^{-2} \left[ \partial_\beta^2 + (3 + 2\nu) \partial_\alpha^2 \right] - 2\nu_- \nabla^2 \nabla^2 \right\} + \\
&\quad + \gamma_1^2 \left\{ \nu_- \nu_+ \left[ \partial_\beta^6 + (7 + 4\nu) \partial_\alpha^4 \partial_\beta^2 + (5 + 2\nu) \partial_\alpha^2 \partial_\beta^4 + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (3 + 2\nu) \partial_\alpha^6 \right] - c_1^{-2} \partial_\alpha^4 \right\} \Big), \\
D_{N\phi} &= D_0 \left[ \partial_\alpha^3 \partial_\beta \nabla^2 \nabla^2 - \gamma_1^4 c_1^{-2} \nu_- \partial_\alpha \partial_\beta + \right. \\
&\quad \left. + \gamma_1^2 (c_1^{-2} \partial_\alpha^3 \partial_\beta - \nu_- \partial_\alpha \partial_\beta \nabla^2 \nabla^2 - \nu_+ \partial_\alpha \partial_\beta^3) \right], \\
C_{N\psi} &= D_0 \left[ c_1^2 \nu_+ \nu_-^{-1} \partial_\alpha^4 \partial_\beta^2 P_3 - \gamma_1^4 2\nu_- \nu_+ (2\partial_\beta^2 + \nu \partial_\alpha^2) - \right. \\
&\quad \left. - \gamma_1^2 \nu_- \nu_+ 2c_1^2 (1 - \nu) \partial_\alpha^4 \partial_\beta^2 \right], \\
D_{N\psi} &= D_0 \left[ 2c_1^2 \nu_+ \partial_\alpha^3 \partial_\beta P_3 P_1 - 8\gamma_1^4 \nu_- \nu_+ \partial_\alpha \partial_\beta - \right. \\
&\quad \left. - \gamma_1^2 4c_1^2 \nu_- \nu_+ \partial_\alpha^3 \partial_\beta P_1 \right], \\
C_{M\phi} &= D_0 R \left\{ c_1^2 \nu_-^{-1} \nu_+ \partial_\alpha^4 \partial_\beta^2 P_3 - 2\gamma_1^4 \nu_- \nu_+ (2\partial_\beta^2 + \nu \partial_\alpha^2) + \right. \\
&\quad \left. + \gamma_1^2 \nu_+ \nu_- \left[ -2c_1^2 (1 - \nu) \partial_\alpha^4 \partial_\beta^2 \right] \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{M\psi} &= D_0 R \left\{ -c_1^2 v_+ \left[ 2\partial_\alpha^2 \partial_\beta^6 + v_+^{-1} \partial_\alpha^8 + 2(2+v) \partial_\alpha^6 \partial_\beta^2 + (5+v) \partial_\alpha^4 \partial_\beta^4 \right] - \right. \\
&\quad \left. - \partial_\alpha^4 - 2\gamma_1^6 v_-^2 v_+ - \gamma_1^4 v_- v_+ \left[ 2c_1^2 (2\partial_\alpha^2 \partial_\beta^2 + \partial_\alpha^4) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \gamma_1^2 v_- v_+ \left[ c_1^2 (3-v) (2\partial_\alpha^2 \partial_\beta^4 + v_+^{-1} \partial_\alpha^6 + (3+v) \partial_\alpha^4 \partial_\beta^2) \right] \right\}, \\
D_{M\varphi} &= D_0 R \left\{ c_1^2 v_-^{-1} v_+ \partial_\alpha^5 \partial_\beta P_5 - \gamma_1^4 v_- v_+ \partial_\alpha \partial_\beta - \gamma_1^2 v_- v_+ \left[ c_1^2 (1-v)^2 \partial_\alpha^5 \partial_\beta \right] \right\}, \\
D_{M\psi} &= 2c_1^2 D_0 R v_+ \left\{ v_-^{-1} \left[ \partial_\alpha \partial_\beta^7 + (1+2v) \partial_\alpha^5 \partial_\beta^3 + v \partial_\alpha^7 \partial_\beta + (2+v) \partial_\alpha^3 \partial_\beta^5 \right] + \right. \\
&\quad \left. + 2\gamma_1^4 \partial_\alpha \partial_\beta P_2 - \gamma_1^2 (3-v) \left[ \partial_\alpha \partial_\beta^5 + v \partial_\alpha^5 \partial_\beta + (1+v) \partial_\alpha^3 \partial_\beta^3 \right] \right\}, \\
P_1 &= \partial_\alpha^2 + v \partial_\beta^2, \quad P_2 = \partial_\beta^2 + v \partial_\alpha^2, \quad P_3 = (2+v) \partial_\alpha^2 + \partial_\beta^2, \\
P_4 &= (2+v) \partial_\beta^2 + \partial_\alpha^2, \quad P_4 = \partial_\alpha^2 - v \partial_\beta^2, \quad P_5 = \partial_\beta^2 - v \partial_\alpha^2.
\end{aligned}$$

Підставивши подання (21) у (20), з урахуванням (16) отримаємо систему двох інтегральних рівнянь:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [F_1(\xi) \mathcal{K}_{11}(\xi - \alpha) + F_3(\xi) \mathcal{K}_{13}(\xi - \alpha)] d\xi = f_1^*(\alpha), \\
&\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} [F_1(\xi) \mathcal{K}_{31}(\xi - \alpha) + F_3(\xi) \mathcal{K}_{33}(\xi - \alpha)] d\xi = f_3^*(\alpha), \quad (22)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
F_1(\xi) &= \frac{1}{R} [v'(\xi)], \quad F_3(\xi) = -[\theta_2'(\xi)], \\
f_1^*(\alpha) &= \frac{2\pi}{Eh} f_1(\alpha), \quad f_3^*(\xi) = \frac{2\pi}{EhR} f_3(\alpha).
\end{aligned}$$

Аналогічно до того, як це зроблено у [8], отриману систему зведемо до системи СІР з ядром типу Коші:

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 \frac{\Omega_1(u)}{u-s} du + \alpha_0 \int_{-1}^1 \Omega_1(u) \mathcal{K}_0^{11}(z) du + \alpha_0 \int_{-1}^1 \Omega_3(u) \mathcal{K}_0^{13}(z) du = f_1^*(\alpha_0 s), \\
&\int_{-1}^1 \frac{\Omega_3(u)}{u-s} du + \alpha_0 \int_{-1}^1 \Omega_1(u) \mathcal{K}_0^{31}(z) du + \alpha_0 \int_{-1}^1 \Omega_3(u) \mathcal{K}_0^{33}(z) du = f_3^*(\alpha_0 s), \quad (23)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_0^{11} &= \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{\Delta} [a_{33} \mathcal{K}_{11}^0(z) - a_{13} \mathcal{K}_{13}^0(z)], \\
\mathcal{K}_0^{31} &= \frac{1}{\Delta} [a_{11} \mathcal{K}_{13}^0(z) - a_{13} \mathcal{K}_{11}^0(z)], \\
\mathcal{K}_0^{31} &= \frac{1}{\Delta} [a_{33} \mathcal{K}_{33}^0(z) - a_{13} \mathcal{K}_{13}^0(z)], \\
\mathcal{K}_0^{11} &= \frac{1}{2} \operatorname{cth} \frac{z}{2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{\Delta} [a_{11} \mathcal{K}_{33}^0(z) - a_{13} \mathcal{K}_{13}^0(z)],
\end{aligned}$$

$$\Omega_m(u) = a_{m1}F_1(\alpha_0 u) + a_{m3}F_3(\alpha_0 u),$$

$$u = \frac{\xi}{\alpha_0}, \quad s = \frac{\alpha}{\alpha_0}, \quad z = \alpha_0(u - s), \quad \Delta = a_{11}a_{33} - a_{13}^2,$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{13} = -(1 - \nu)(3 + \nu)c_1^2[8(1 + \nu)]^{-1}, \quad a_{33} = (1 - \nu)(3 + \nu).$$

Тут  $\mathcal{K}_{11}^0$ ,  $\mathcal{K}_{13}^0$ ,  $\mathcal{K}_{33}^0$  – регулярні частини ядер системи СІР (22), які мають структуру, подібну до наведених у [6]:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11}^0 &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z}{\text{sh } z} \right) \text{cth}(0.5z) - \text{sgn } z + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{K}_{11}^0)_n + \\ &\quad + 2(\mathcal{K}_{11}^0)_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ e^{-n|z|} \left( \frac{1}{2} n z - \text{sgn } z \right) \right], \\ \mathcal{K}_{13}^0 &= \mathcal{K}_{31}^0 = \frac{c_1^2 v_-}{32} \left[ \left( \frac{z^3}{\text{sh}^2(0.5z) \text{sh } z} - 4 \right) \text{cth}(0.5z) + \frac{z^3}{3 \text{sh}^2(0.5z)} \right] + \\ &\quad + \frac{c_1^2 v_-}{16 v_+} \text{cth}(0.5z) \left[ \frac{5 + 3\nu}{2} \left( \frac{z^2}{\text{sh}^2(0.5z)} - 4 \right) + \right. \\ &\quad \left. + (11 + 5\nu) \left( \frac{z}{\text{sh } z} - 1 \right) \right] + \\ &\quad + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{v_- c_1^2 e^{-n|z|}}{96} \left( n^3 z^3 - n^2 z^2 \frac{3(5 + 3\nu)}{v_+} \text{sgn } z + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + n z \frac{3(11 + 5\nu)}{v_+} \right) \right] + 2(\mathcal{K}_{13}^0)_0 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{K}_{13}^0)_n, \\ \mathcal{K}_{33}^0 &= \left[ \frac{1}{2} v_-^2 \left( \frac{z}{\text{sh } z} - 1 \right) \text{cth}(0.5z) - v_- v_+ \text{sgn } z \right] \frac{c_1^2}{v_- v_+} + 2(\mathcal{K}_{33}^0)_0 + \\ &\quad + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (\mathcal{K}_{33}^0)_n - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{c_1^2}{v_+} e^{-n|z|} \left( n z \frac{v_-}{2} + v_+ \text{sgn } z \right) \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

Тут

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}_{11}^0(z))_n &= \left( -\partial_\alpha^8 \Psi_n - \frac{2\gamma_1^6 \Psi_n}{c_1^2 v_-^2 v_+} - n^4 \partial_\alpha^4 \Psi_n + 2n^2 \partial_\alpha^6 \Psi_n + \frac{\gamma_1^4}{v_- v_+} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[ \frac{(3 + 2\nu) \partial_\alpha^2 \Psi_n - n^2 \Psi_n}{c_1^2} - \frac{2(n^4 \Psi_n - 2n^2 \partial_\alpha^2 \Psi_n + \partial_\alpha^4 \Psi_n)}{v_-} \right] \right) + \\ &\quad + \gamma_1^2 \left\{ \frac{2n^2 [4 - \nu(2 + \nu)] \partial_\alpha^2 \Psi_n - 4n^4 \Psi_n}{v_-^2 v_+} - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left( \frac{n^2 \Psi_n}{v_-} + 2 \partial_\alpha^2 \Psi_n \right) - \frac{\partial_\alpha^4 \Psi_n}{c_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(3 + 2\nu) \partial_\alpha^6 \Psi_n - n^6 \Psi_n + n^4 (5 + 2\nu) \partial_\alpha^2 \Psi_n - n^2 (7 + 4\nu) \partial_\alpha^4 \Psi_n}{v_- v_+} \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathcal{K}_{13}^0(z))_n &= \frac{\frac{2}{1}v_-(n^4\partial_\alpha^4\Psi_n - 2(2+v)\partial_\alpha^6\Psi_n)}{v_+} - \frac{2\gamma_1^4(-2^2\Psi_n + v\partial_\alpha^2\Psi_n)}{v_-^2v_+} + \\
&+ \frac{1}{v_-v_+}\gamma_1^2\left[2n^4\Psi - n^2(5+4v)\partial_\alpha^2\Psi_n + 2c_1^2n^2v_-\partial_\alpha^4\Psi_n + \right. \\
&\left. + v(3+2v)\partial_\alpha^4\Psi_n\right], \\
(\mathcal{K}_{33}^0)_n &= -\frac{2\gamma_1^4(v\partial_\alpha^2\Psi - 2n^2\Psi)}{v_-^2v_+} + \frac{c_1^2v_-(n^4\partial_\alpha^4\Psi - 2n^2\partial_\alpha^6\Psi - n^2v\partial_\alpha^6\Psi)}{v_+} + \\
&+ \frac{1}{v_-v_+}\gamma_1^2\left(2n^4\Psi - n^2(5+4v)\partial_\alpha^2\Psi + 2c_1^2n^2v_-\partial_\alpha^4\Psi + \right. \\
&\left. + v(3+2v)\partial_\alpha^4\Psi\right).
\end{aligned}$$

Характер поведінки таких ядер досліджено у [7], де відмічено, що значення ядер  $\mathcal{K}_{13}^0(z)$  і  $\mathcal{K}_0^{33}(z)$  набагато (більш ніж у  $10^4$ ) менші ніж значення  $\mathcal{K}_{11}^0(z)$ . У цьому випадку система СІР зводиться до одного рівняння, тоді згинні моменти вважаємо рівними нулеві, а їхній вплив на руйнування неістотним.

Коефіцієнти інтенсивності (КІ) зусиль і моментів подамо у вигляді [6]

$$K_N = \frac{1}{2}\sqrt{\ell} K_N^0 e^{\tilde{\gamma}t}, \quad K_M = \frac{1}{2}Rc\sqrt{\ell} K_M^0 e^{\tilde{\gamma}t}, \quad (25)$$

де

$$K_N^0 = \lim_{u \rightarrow 1} \left[ \sqrt{1-u^2} \Omega_1(u) \right], \quad K_M^0 = \lim_{u \rightarrow 1} \left[ \sqrt{1-u^2} \Omega_3(u) \right]. \quad (26)$$

Як бачимо з (25), зміну величини коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів в часі характеризує множник  $e^{\tilde{\gamma}t}$ , швидкість навантаження  $\tilde{\gamma}$ , а геометричні та фізичні параметри оболонки враховуються множниками  $\frac{1}{2}\sqrt{\ell}K_N^0$  та  $\frac{1}{2}Rc\sqrt{\ell}K_M^0$ . Для оцінки інтенсивності зусиль і моментів у початковий момент часу ( $t < T$ ) доцільно використовувати значення  $K_N^0 = \frac{2K_N}{\sqrt{\ell}} e^{-\tilde{\gamma}t}$

та  $K_M^0 = \frac{2K_M}{Rc\sqrt{\ell}} e^{-\tilde{\gamma}t}$ , які, за аналогією з [4, 6], називатимемо відносними коефіцієнтами інтенсивності зусиль і моментів при динамічному навантаженні.

**4. Числові дослідження.** Із використанням розв'язків системи СІР (23) і співвідношень (26) досліджено залежність відносних КІ зусиль і моментів від швидкості зміни навантаження і відносної довжини тріщини у циліндричній оболонці з такими геометричними характеристиками:  $R=15 \cdot 10^{-2}$  м,  $h=15 \cdot 10^{-4}$  м. Дослідження виконано за припущення, що до берегів вирізу прикладено зусилля і моменти з постійною інтенсивністю  $N_2(\alpha, 0, \tau) = -N^0 e^{\tilde{\gamma}\tau} = 1 \cdot e^{\tilde{\gamma}\tau}$  та  $M_2(\alpha, 0, \tau) = -M^0 e^{\tilde{\gamma}\tau} = 0$  для таких матеріалів:

|              |                             |                |   |
|--------------|-----------------------------|----------------|---|
| <i>сталь</i> | $E = 2 \cdot 10^{11}$ Па,   | $\nu = 0.25$ , | $\rho = 8 \cdot 10^3$ кг/м <sup>3</sup> ,   |
| <i>мідь</i>  | $E = 1.1 \cdot 10^{11}$ Па, | $\nu = 0.34$ , | $\rho = 8.9 \cdot 10^3$ кг/м <sup>3</sup> , |
| <i>чавун</i> | $E = 1 \cdot 10^{11}$ Па,   | $\nu = 0.22$ , | $\rho = 7 \cdot 10^3$ кг/м <sup>3</sup> .   |

Період, за який пружна хвиля обходить циліндричну оболонку, виконану із вказаних матеріалів, наближено становить:

$$\text{для сталі} \quad T_{\text{st}} = 0.9 \cdot 10^{-4},$$

$$\text{для міді} \quad T_{\text{cop}} = 1.3 \cdot 10^{-4},$$

$$\text{для чавуну} \quad T_{\text{c-iron}} = 1.2 \cdot 10^{-4}.$$

На рис. 2, рис. 3 наведено результати обчислення відносних коефіцієнтів інтенсивності зусиль  $K_N^0$  (рис. 2а, рис. 3а) і моментів  $K_M^0$  (рис. 2б, рис. 3б), де штрихові криві відповідають значенням, обчисленим для оболонки, виготовленої з чавуну, штрихпунктирні – з міді, суцільні – зі сталі. На рис. 2 подано залежності  $K_N^0$  і  $K_M^0$  від відносної довжини тріщини  $\alpha_0 = \ell/R$  (для значень швидкості навантаження  $\tilde{\gamma} = 0.5$ ,  $\tilde{\gamma} = 1$ ,  $\tilde{\gamma} = 2$ ), а на рис. 3 – від швидкості зміни навантаження  $\tilde{\gamma}$  (для  $\alpha_0 = 0.1$ ,  $\alpha_0 = 0.2$ ,  $\alpha_0 = 0.4$ ).

При порівнянні значень відносних КІ зусиль (рис. 2а, рис. 3а) із відповідними значеннями КІ моментів (рис. 2б, рис. 3б) бачимо, що для КІ моментів вони більш ніж на три порядки менші від відповідних КІ зусиль. Це узгоджується із результатами роботи [7], де такі висновки зроблено на підставі аналізу ядер відповідних СІР. У [7] висловлено припущення про можливість нехтувати ними і відповідно нехтувати впливом КІ моментів при прогнозуванні міцності оболонки. Однак це питання потребує додаткового вивчення, що виходить за межі досліджень, виконаних у цій роботі. Загалом, значення відносних КІ зусиль (сталий коефіцієнт при  $e^{\tilde{\gamma}\tau}$ ) спадає зі зростанням швидкості навантаження. Відносний динамічний КІ зусиль до досягнення певного значення швидкості навантаження (це значення залежить від відносної довжини тріщини та зменшується з її збільшенням) є близьким до значення узагальненого коефіцієнта зусиль у статичному випадку (відрізняється не більше, ніж на 1 %). Після досягнення деякого критичного значення швидкості навантаження КІ починає спадати на певному проміжку значень швидкості навантаження, при цьому сам проміжок і значення КІ на його кінцях залежать від відносної довжини тріщини.

Значення відносних КІ моментів, як уже зазначалося, більш ніж на три порядки менші, ніж значення відповідних коефіцієнтів зусиль. Їхня поведінка при збільшенні швидкості навантаження вирізняється наявністю пікового значення при досягненні деякого критичного значення швидкості навантаження, залежного від відносної довжини тріщини (критична швидкість тим вища, чим більша довжина тріщини). Після досягнення свого максимуму значення відносних КІ моментів спадає до відповідного асимптотичного значення, яке є більшим, ніж аналогічні значення при малих швидкостях навантаження.

Значення відносних КІ зусиль і моментів для таких матеріалів, як мідь та чавун, є близькими за величиною і приблизно в два рази більшими, ніж аналогічні значення в оболонці, виконаній зі сталі. Враховуючи значення механічних характеристик матеріалів, можемо зробити висновок про переважний вплив модуля Юнга на величину відносних динамічних КІ зусиль.

На рис. 4 наведено залежність від часу ( $0 \leq \tau \leq 1$ ) динамічних КІ зусиль  $K_N = 0.5\sqrt{\ell}K_N^0 e^{\tilde{\gamma}\tau}$  (рис. 4а) та експоненціальну залежність  $e^{\tilde{\gamma}\tau}$  (рис. 4б) у сталевій оболонці з поздовжньою тріщиною (відносна довжина тріщини  $\alpha_0 = 3.85$ ). Криві відповідають значенням, обчисленим для швидкостей навантаження  $\tilde{\gamma} = 0.5$ ,  $\tilde{\gamma} = 1$ ,  $\tilde{\gamma} = 2$ . Як випливає з аналізу графіків, для адекватної якісної і кількісної оцінки величини динамічних коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів важливим є з'ясування значення відносного КІ на початковому етапі навантаження.

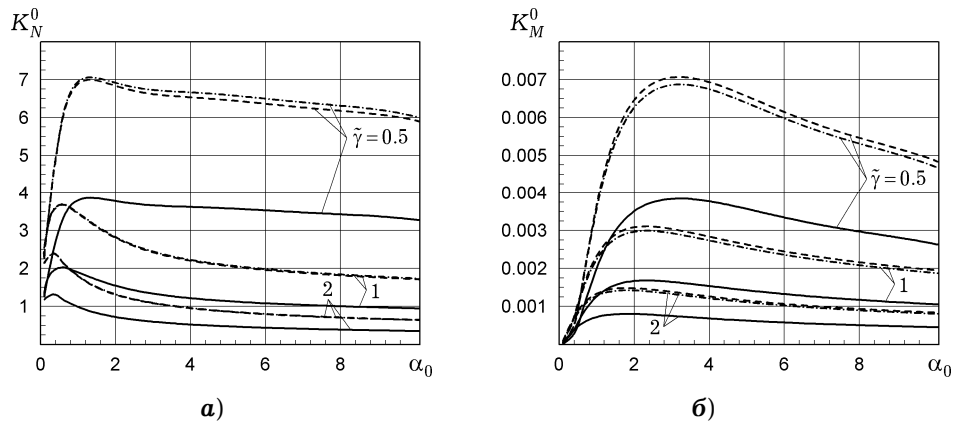


Рис. 2

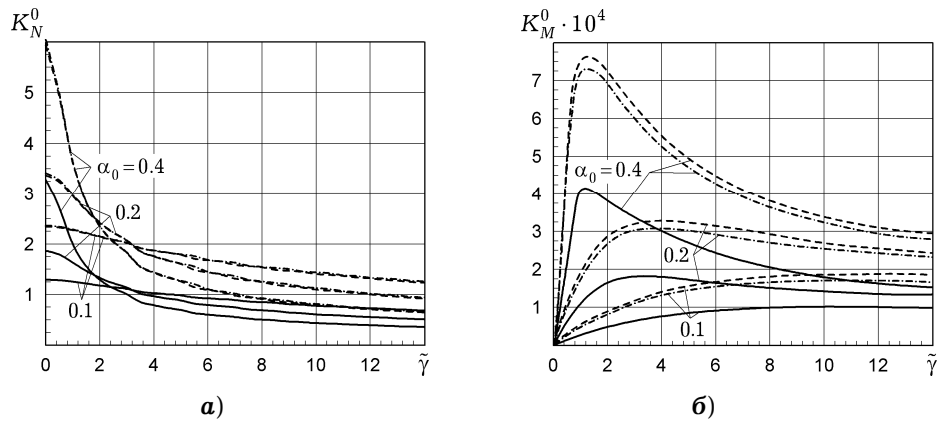


Рис. 3

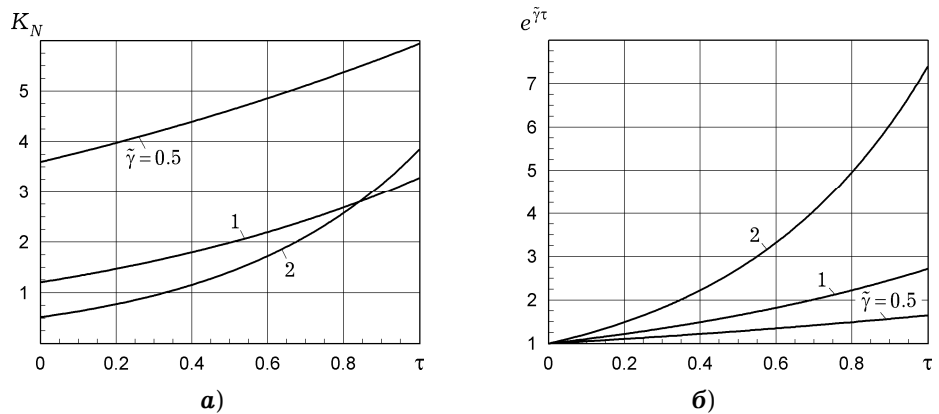


Рис. 4

**Висновки.** Для циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною за змінного в часі навантаження записано в явному вигляді систему сингулярних інтегральних рівнянь з ядром Коші (23). Отримані співвідношення можна використовувати для визначення напружено-деформованого стану таких оболонок за навантаження, що змінюється за експоненціальним або гармонічним законом. Достовірність цих співвідношень підтверджено збігом при переході до випадку статичного навантаження із відомими співвідношеннями [6, 8].

Побудовано алгоритм числового розв'язання отриманої системи рівнянь. Для оболонок, виконаних із різних матеріалів, здійснено дослідження

коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів для навантаження, яке змінюється в часі за експоненціальним законом. Виявлено переважний вплив механічної характеристики – модуля пружності матеріалів, на величину динамічних коефіцієнтів інтенсивності.

На основі виконаних досліджень встановлено, що при невисоких швидкостях зміни навантаження впливом врахування інерційності матеріалу при обчисленні відносних коефіцієнтів інтенсивності зусиль можна знехтувати.

Отримані співвідношення успішно можуть використовуватися для визначення напружено-деформованого стану циліндричних оболонок із поздовжніми розрізами, що перебувають під дією змінного в часі навантаження, а в подальшому – для з'ясування розкриття тріщини і оцінки міцності оболонки.

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. – Москва: Наука, 1976. – 512 с.
2. *Гузъ А. Н., Гузъ И. А., Меньшиков А. В., Меньшиков В. А.* Коэффициенты интенсивности напряжений для материалов с межслоевыми трещинами при гармоническом нагружении // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 10. – С. 3–13.  
Te same: *Guz A. N., Guz I. A., Men'shikov A. V., Men'shikov V. A.* Stress-intensity factors for materials with interface cracks under harmonic loading // Int. Appl. Mech. – 2011. – **46**, No. 10. – P. 1093–1100.  
– <https://doi.org/10.1007/s10778-011-0401-1>.
3. *Довбня К. М., Шевцова Н. А.* Дослідження напруженого стану ортотропної оболонки довільної кривини з внутрішньою тріщиною // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54**, № 4. – С. 138–142.  
Te same: *Dovbnya K. M., Shevtsova N. A.* Investigation of the stressed state of an orthotropic shell of arbitrary curvature with an internal crack // J. Math. Sci. – 2012. – **187**, No. 6. – P. 708–715.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-012-1095-6>.
4. *Кит Г. С., Кушнір Р. М., Михаськів В. В., Николішин М. М.* Методи визначення статичних і динамічних напружень у тілах з підповерхневими тріщинами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2011. – **47**, № 2. – С. 56–66.  
Te same: *Kit H. S., Kushnir R. M., Mykhas'kiv V. V., Nykolyshyn M. M.* Methods for the determination of static and dynamic stresses in bodies with subsurface cracks // Mater. Sci. – 2011. – **47**, No. 2. – P. 177–187.  
– <https://doi.org/10.1007/s11003-011-9382-9>.
5. *Кушнір Р. М., Николішин М. М.* Напружений стан і гранична рівновага кусково-однорідних циліндричних оболонок з тріщинами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2003. – **46**, № 1. – С. 60–74.
6. *Кушнір Р. М., Николішин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
7. *Махоркін М. І., Николішин М. М.* Гранична рівновага циліндричної оболонки з поздовжньою тріщиною за врахування інерційності матеріалу // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – **61**, № 1. – С. 130–141.  
Te same: *Makhorkin M. I., Nykolyshyn M. M.* Limit equilibrium of a cylindrical shell with longitudinal crack with regard for the inertia of the material // Mater. Sci. – 2020. – **249**, No 3. – P. 462–477.  
– <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04953-4>.
8. *Осадчук В. А.* Напряженно-деформированное состояние и предельное равновесие оболочек с разрезами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
9. *Підстригач Я. С., Ярема С. Я.* Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.
10. *Подстригач Я. С., Швець Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 343 с.
11. *Тітова О. О., Ланько В. П.* Аналіз пружних коливань циліндричних оболонок з поздовжніми тріщинами // Вісн. Запорізьк. нац. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2012. – № 1. – С. 160–166.
12. *Breslavsky I. D., Amabili M., Legrand M.* Static and dynamic behavior of circular cylindrical shell made of hyperelastic arterial material // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2016. – **83**, No. 5. – 051002 (9 pages).  
– <https://doi.org/10.1115/1.4032549>.
13. *Chen Y., Ji C., Long Y., Ji M.-R., Gao F.-Y., Ding W.* Research on dynamic

- behaviors of cylindrical shells with different wall-thickness under explosion loading // Chinese J. High Press. Phys. – 2014. – **28**, No. 5. – P. 525–532.
14. Hamzah A. A., Jobair H. K., Abdullah O. I., Hashim E. T., Sabri L. A. An investigation of dynamic behavior of the cylindrical shells under thermal effect // Case Studies Therm. Eng. – 2018. – **12**. – P. 537–545.  
– <https://doi.org/10.1016/j.csite.2018.07.007>.
  15. Han X. F., Wang Y. D., Wang T., Ding T. Ch., Jia H. G. Study on dynamic response of cylindrical shells under combined load // Appl. Mech. Mater. – 2013. – **333-335**. – P. 2151–2155. – <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.333-335.2151>.
  16. Makhorkin M., Nykolishyn M. Construction of integral equations describing limit equilibrium of cylindrical shell with a longitudinal crack under time-varying load // Econtechmod (PAN, Lublin, Polish). – 2016. – **5**, No. 3. – P. 141–146.
  17. Menshykova M. V., Menshykov O. V., Guz I. A. Linear interface crack under plane shear wave // CMES: Computer Modeling in Engineering & Sciences. – 2009. – **48**, No. 2. – P. 107–120. – <https://doi.org/10.3970/cmesc.2009.048.107>.
  18. Mohammad Malekan, Ali Khosravi, Carlos A. Cimini Jr. Deformation and fracture of cylindrical tubes under detonation loading: A review of numerical and experimental analyses // Int. J. Pres. Ves. Pip. – 2019. – **173**. – P. 114–132.  
– <https://doi.org/10.1016/j.ijpvp.2019.05.003>.
  19. Nabavi S. M., Shahani A. R. Dynamic stress intensity factors for a longitudinal semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder // Int. J. Eng. Sci. Technol. – 2014. – **6**, No. 5. – P. 57–77. – <http://doi.org/10.4314/ijest.v6i5.6>.
  20. Pothula S. G. Dynamic response of composite cylindrical shells under external impulsive loads. – MSc thesis, Univ. of Akron, 2009. – 71 p.
  21. Rouzegar S. J., Mirzaei M. Modeling dynamic fracture in Kirchhoff plates and shells using the extended finite element method // Scientia Iranica. – 2013. – **20**, No. 1. – P. 120–130. – <https://doi.org/10.1016/j.scient.2012.12.013>.

**EFFECT OF PHYSICAL AND GEOMETRIC CHARACTERISTICS OF  
A CYLINDRICAL SHELL WITH A LONGITUDINAL CRACK ON ITS LIMIT EQUILIBRIUM  
TAKING INTO ACCOUNT THE MATERIAL INERTIA**

*The problem on limit equilibrium of a long cylindrical shell with a longitudinal crack under the action of time-varying load is considered. For the case of symmetric load of the crack, a system of singular integral equations to determine the force and moment intensity factors in the vicinity of the ends of the crack is constructed. In the case of time-varying load according to the exponential law, the dependences of the values of dynamic force and moment intensity factors on the rate of changes in the load and the crack length are investigated for shells made of steel, copper and cast iron.*

**Key words:** *cylindrical shell, longitudinal crack, varying load, exponential dependence on time, singular integral equations, dynamic force intensity factors.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано  
28.12.20